

静教院附校 2023 学年第一学期八年级

数学期末考试

(卷面总分: 100 分

卷面完成时间: 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含四个大题, 共 26 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本调研卷上答题一律无效.

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列各式中, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类根式的是 ()

A. $\sqrt{0.2}$

B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

C. $\sqrt{\frac{1}{8}}$

D. $\sqrt{50x^2}$

【答案】A

【解析】

【分析】先化成最简二次根式, 再根据同类二次根式的定义, 两个二次根式的被开方数相等判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{0.2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 故本选项正确;

B、 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式, 故本选项错误;

C、 $\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式, 故本选项错误;

D、 $\sqrt{50x^2} = 5|x|\sqrt{2}$, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式, 故本选项错误.

故选 A.

【点睛】本题考查同类二次根式的概念, 同类二次根式是化为最简二次根式后, 被开方数相同的二次根式称为同类二次根式.

2. 如果方程 $mx^2 - 6x + 1 = 0$ 有实数根, 那么 m 的取值范围是 ()

A. $m < 9$ 且 $m \neq 0$;

B. $m \leq 9$ 且 $m \neq 0$;

C. $m < 9$;

D. $m \leq 9$.

【答案】D

【解析】

【分析】根据方程有实数根，分类讨论：当 $m = 0$ 时， $-6x + 1 = 0$ ；当 $m \neq 0$ 时， $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ，分别进行求解即可。

【详解】解： $\because$ 方程 $mx^2 - 6x + 1 = 0$ 有实数根，

当 $m = 0$ 时， $-6x + 1 = 0$ ，

解得 $x = \frac{1}{6}$ ，

当 $m \neq 0$ 时， $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times m \times 1 \geq 0$ ，

解得 $m \leq 9$ ，

$\therefore m$ 的取值范围是 $m \leq 9$ ，

故选：D.

3. 下列说法正确的是()

- A. 面积一定的平行四边形的一边和这边上的高成正比例
- B. 面积一定的平行四边形的一边和这边上的高成反比例
- C. 周长一定的等腰三角形的腰长与它底边的长成正比例
- D. 周长一定的等腰三角形的腰长与它底边的长成反比例

【答案】B

【解析】

【分析】利用正比、反比的性质进行判断即可。

【详解】解：面积一定的平行四边形的一边和这边上的高成反比例，故 A 错误，B 正确；
周长一定的等腰三角形的腰长与它底边的长成一次函数，故 C、D 错误。

故选：B.

【点睛】本题考查了正比、反比的性质，平行四边形的面积公式，等腰三角形的腰、底、周长的关系，解决本题的关键是明确正比与反比的意义。

4. 某工厂第四季度的每月产值的增长率都是 x ，其中 12 月份的产值是 100 万元，那么 10 月份的产值是()

- A. $100(1 - x^2)$ ；
- B. $100(1 - x)^2$ ；
- C. $\frac{100}{(1 + x)^2}$ ；
- D. $\frac{100}{1 + x^2}$.

【答案】C

【解析】

【分析】设9月份的产值为 a ，根据题意可得 $a(1+x)^3=100$ ，求得 $a=\frac{100}{(1+x)^3}$ ，即可求解.

【详解】解：设9月份的产值为 a ，

由题意可得， $a(1+x)^3=100$ ，

$$\therefore a = \frac{100}{(1+x)^3},$$

$$\therefore 10 \text{ 月份的产值是 } \frac{100}{(1+x)^3} \cdot (1+x) = \frac{100}{(1+x)^2},$$

故选：C.

5. 用下列长度的三条线段为边能构成直角三角形是 ()

- A. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$; B. 4, 5, 6; C. 17, 8, 15; D. 1, 3, $2\sqrt{3}$.

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了勾股定理逆定理，根据勾股定理逆定理逐项判断即可求解.

【详解】解：A. $\because \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \neq \left(\frac{1}{3}\right)^2$ ， $\therefore$ 构不成直角三角形，不合题意；

B. $\because (4)^2 + (5)^2 \neq (6)^2$ ， $\therefore$ 构不成直角三角形，不合题意；

C. $\because 8^2 + 15^2 = 17^2$ ， $\therefore$ 能构成直角三角形，符合题意；

D. $\because 1^2 + 3^2 \neq (2\sqrt{3})^2$ ， $\therefore$ 构不成直角三角形，不合题意.

故选：C

6. 下列说法正确的是 ()

- A. 任何命题都有逆命题 B. 任何定理都有逆定理
C. 真命题的逆命题一定是真命题 D. 定理的逆命题一定是真命题

【答案】A

【解析】

【分析】利用逆命题、逆定理的知识对各项进行判断即可得到答案.

【详解】解：A.任何命题都有逆命题，故A说法正确，符合题意；

B.任何定理不一定有逆定理，故B说法错误，不符合题意；

C.真命题的逆命题不一定是真命题，故C说法错误，不符合题意；

D. 定理的逆命题不一定是真命题, 故 D 说法错误, 不符合题意;

故选: A.

【点睛】 本题考查了命题与定理, 判断事物的语句叫命题; 正确的命题叫真命题, 错误的命题叫假命题, 经过推理论证的真命题叫定理, 两个命题的题设与结论为互换的命题互为逆命题.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 当 $a < -1$ 时, $\sqrt{(a+1)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-a-1$ ## $-(a+1)$ ## $-1-a$ ## $-(1+a)$

【解析】

【分析】 根据不等式的性质可得 $a+1 < 0$, 再根据二次根式的性质求解即可.

【详解】 解: $\because a < -1$,

$$\therefore a+1 < 0,$$

$$\therefore \sqrt{(a+1)^2} = -(a+1) = -a-1,$$

故答案为: $-a-1$.

8. 如果 $\sqrt{x^2(2+x)} = -x \cdot \sqrt{2+x}$, 那么等式成立的条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-2 \leq x \leq 0$ ## $0 \geq x \geq -2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的性质, 求不等式组的解集, 解题的关键是根据二次根式的性质得出 $x \leq 0$, $2+x \geq 0$, 再求解即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{x^2(2+x)} = -x \cdot \sqrt{2+x}$,

$$\therefore \begin{cases} x \leq 0 \\ 2+x \geq 0 \end{cases},$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 0,$$

$$\therefore \text{等式成立的条件是: } -2 \leq x \leq 0,$$

故答案为: $-2 \leq x \leq 0$.

9. 计算: $\frac{a-b}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

【解析】

【分析】 本题考查分母有理化和分数指数幂等知识, 先把分数指数幂转化成二次根式, 再利用平方差公式

进行二次根式的有理化求解即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \frac{a-b}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}} \\ &= \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \\ &= \frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\ &= \frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} \\ &= \sqrt{a}+\sqrt{b}, \end{aligned}$$

故答案为: $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

10. 不等式: $(\sqrt{3}-2)x < 1$ 的解集是_____.

$$\text{【答案】 } x > -\sqrt{3}-2$$

【解析】

$$\text{【详解】 } \because \sqrt{3}-2 < 0,$$

$$\therefore (\sqrt{3}-2)x < 1 \text{ 的解集是: } x > \frac{1}{\sqrt{3}-2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-2} = \frac{(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} = -\sqrt{3}-2.$$

故不等式的解集为: $x > -\sqrt{3}-2$.

故答案为 $x > -\sqrt{3}-2$.

点睛: 解不等式的时候要判断不等式的符号是否需要改变, 掌握根式的估算及分母有理化.

11. 在实数范围内因式分解 $x^2y^2-3xy-2=$ _____.

$$\text{【答案】 } \left(xy - \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(xy + \frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)$$

【解析】

【分析】 先利用配方法进行因式分解, 再利用平方差公式进行因式分解即可.

【详解】解: $x^2y^2 - 3xy - 2$

$$= (xy)^2 - 3xy + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 2$$

$$= \left(xy - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

$$= \left(xy - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2$$

$$= \left(xy - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\right) \left(xy - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$= \left(xy - \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right) \left(xy + \frac{\sqrt{17} - 3}{2}\right),$$

故答案为: $\left(xy - \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right) \left(xy + \frac{\sqrt{17} - 3}{2}\right)$.

12. 函数 $y = \frac{x-3}{2-x}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq 2$

【解析】

【分析】 本题考查了函数的自变量取值范围, 分式有意义的条件, 根据分式有意义的条件得到 $2-x \neq 0$, 解得 $x \neq 2$, 问题得解.

【详解】 解: 由题意得 $2-x \neq 0$,

解得 $x \neq 2$.

故答案为: $x \neq 2$

13. 函数 $y = -\frac{2}{5x}$ 的图像经过的象限是_____.

【答案】 二、四

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的性质, 根据反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$, 当 $k > 0$ 时, 图象经过第一、三象限, 当 $k < 0$ 时, 图象经过第二、四象限, 即可得出答案, 熟练掌握反比例函数的性质是解此题的关键.

【详解】 解: $\because y = -\frac{2}{5x} = -\frac{2}{5} \times \frac{1}{x} = -\frac{\frac{2}{5}}{x}$,

$$\therefore k = -\frac{2}{5} < 0,$$

∴ 函数 $y = -\frac{2}{5x}$ 的图像经过的象限是二、四，

故答案为：二、四.

14. 函数 $y = \frac{x}{2m-3}$ (m 为常数) 中, y 的值随 x 的增大而减小, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 根据一次函数的增减性与自变量的系数的关系可得 $2m-3 < 0$, 再求解即可.

【详解】 解: ∵ 函数 $y = \frac{x}{2m-3}$ (m 为常数) 中, y 的值随 x 的增大而减小,

∴ 一次函数 $y = \frac{x}{2m-3}$ (m 为常数) 经过第二、四象限,

∴ $2m-3 < 0$,

∴ $m < \frac{3}{2}$,

故答案为: $m < \frac{3}{2}$.

15. “等腰三角形两腰上的高相等”的逆命题是_____

【答案】 若一个三角形两条边上的高相等, 则三角形是等腰三角形

【解析】

【分析】 把一个命题的条件和结论互换就得到它的逆命题.

【详解】 解: 命题“等腰三角形两腰上的高相等”的逆命题: 若三角形两边上的高相等, 则这个三角形是等腰三角形.

故答案为: 若三角形两边上的高相等, 则这个三角形是等腰三角形.

【点睛】 本题主要考查命题与定理的知识点, 两个命题中, 如果第一个命题的条件是第二个命题的结论, 而第一个命题的结论又是第二个命题的条件, 那么这两个命题叫做互逆命题. 其中一个命题称为另一个命题的逆命题.

16. 已知线段 AB , 以 $\angle A$ 为顶角的等腰 $\triangle ABC$ 的顶点 C 的轨迹是_____.

【答案】 以点 A 为圆心, 线段 AB 为半径的圆 (点 B 除外)

【解析】

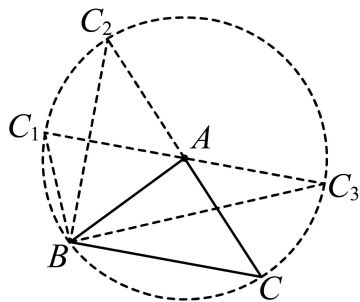
【分析】 根据等腰三角形的性质可得 $AB = AC$, 即可求解.

【详解】 解: 如图, ∵ $\triangle ABC$ 是等腰三角形, $\angle A$ 为顶角,

∴ $AB = AC$,

∴ 顶点 C 的轨迹是以点 A 为圆心, 线段 AB 为半径的圆 (点 B 除外),

故答案为：以点 A 为圆心，线段 AB 为半径的圆（点 B 除外）.



17. 已知一个直角三角形的两直角边长分别为 5 和 12，则斜边上中线的长是__.

【答案】 6.5 或 $\frac{13}{2}$

【解析】

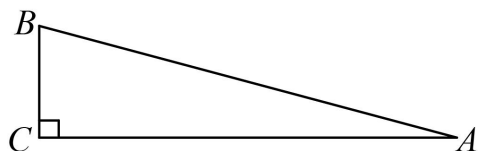
【分析】 本题考查了勾股定理，直角三角形的性质，根据直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半即可求解.

【详解】 解：斜边长 $= \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$,

$\therefore$ 斜边上中线的长是 $\frac{13}{2} = 6.5$,

故答案为：6.5.

18. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 15^\circ$ ， $AB = 6$ ，(如图)，点 D 是 AB 的中点，将 $\triangle ACD$ 沿直线 CD 翻折后点 A 落在点 E ，那么 BE 的长为_____.



【答案】 $3\sqrt{3}$

【解析】

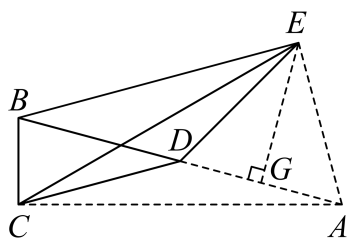
【分析】 连接 AE ，过点 E 作 $EG \perp AB$ 于点 G ，由折叠的性质得， $CE = CA$ ， $\angle ECD = \angle ACD$ ， $\angle CDE = \angle CDA$ ， $ED = AD$ ，根据直角三角形的性质可得 $CD = AD = 3$ ，由三角形外角的性质可得 $\angle BDC = 30^\circ$ ，根据直角三角形的性质求得 $\angle DEG = 30^\circ$ ， $DG = \frac{1}{2}DE = \frac{3}{2}$ ，利用勾股定理求得

$EG = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，从而可得 $BG = \frac{9}{2}$ ，再利用勾股定理即可求解.

【详解】 解：如图，连接 AE ，过点 E 作 $EG \perp AB$ 于点 G ，
由折叠的性质得， $CE = CA$ ， $\angle ECD = \angle ACD$ ， $\angle CDE = \angle CDA$ ， $DE = AD$ ，
 $\therefore \angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 15^\circ$ ，点 D 是 AB 的中点，

$$\begin{aligned}
&\therefore CD = AD = 3, \\
&\therefore \angle DCA = \angle DAC = 15^\circ, \\
&\therefore \angle BDC = \angle DCA + \angle A = 30^\circ, \\
&\therefore DE = AD = 3, \\
&\therefore \angle CDE = \angle CDA = 180^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 150^\circ, \\
&\therefore \angle BDE = \angle CDE - \angle BDC = 150^\circ - 30^\circ = 120^\circ, \\
&\therefore \angle EDG = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ, \\
&\therefore \angle EGD = 90^\circ, \\
&\therefore \angle DEG = 30^\circ, \\
&\therefore DG = \frac{1}{2}DE = \frac{3}{2}, \\
&\therefore EG = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \\
&\therefore BG = BD + DG = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}, \\
&\text{在 } Rt\triangle EGB \text{ 中, } BE = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = 3\sqrt{3},
\end{aligned}$$

故答案为: $3\sqrt{3}$.



【点睛】 本题考查等腰三角形的性质、勾股定理、直角三角形的性质、三角

形外角的性质、折叠的性质，添加辅助线，构造直角三角形是解题的关键.

三、(本大题共 5 题，每题 6 分，满分 30 分)

19. 计算: $2\sqrt{12} + \frac{6}{1-\sqrt{3}} - \sqrt{6}\left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$

【答案】 $-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的混合运算法则进行计算即可.

【详解】 解: 原式 $= 4\sqrt{3} - 3(1 + \sqrt{3}) - \sqrt{6} \times \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

$$= 4\sqrt{3} - 3 - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3$$

$$= -\sqrt{3}.$$

20. 已知函数 $f(x) = a^2\sqrt{4-3x} - \frac{4a}{\sqrt{4x-2}}$,

(1) 求函数的定义域;

(2) 当 $f(1) = 3$ 时, 求 a 的值.

【答案】 20. $\frac{1}{2} < x \leq \frac{4}{3}$

21. $a_1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$, $a_2 = \sqrt{2} - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式有意义的条件, 求函数值, 解一元二次方程, 解题的关键是理解题意.

(1) 根据二次根式有意义的条件可得 $4-3x \geq 0$, $4x-2 > 0$, 再进行求解即可;

(2) 根据 $f(1) = 3$ 可得, $a^2 - 2\sqrt{2}a = 3$, 再解一元二次方程即可.

【小问 1 详解】

解: $\because 4-3x \geq 0$,

$$\therefore x \leq \frac{4}{3},$$

又 $\because 4x-2 > 0$,

$$\therefore x > \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{函数的定义域为 } \frac{1}{2} < x \leq \frac{4}{3};$$

【小问 2 详解】

解: 当 $f(1) = 3$ 时, $a^2 \cdot \sqrt{4-3} - \frac{4a}{\sqrt{4-2}} = 3$,

即 $a^2 - 2\sqrt{2}a = 3$,

解得 $a_1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$, $a_2 = \sqrt{2} - \sqrt{5}$.

21. 关于 x 的方程 $(k+2)x^2 - 2kx + k-1 = 0$ 的两个实数根为 α 、 β , 且 $\alpha^2 = \beta^2$, 求 k 的值.

【答案】 $k = 0$ 或 $k = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次根于系数的关系和根的判别式等知识. 根据 $a^2 = \beta^2$ 得到 $a + \beta = 0$ 或

$a = \beta$. 分 $a + \beta = 0$ 和 $a = \beta$ 两种情况分类讨论, 分别利用一元二次方程根与系数的关系和根的判别式进行求解, 并进行检验即可求解.

【详解】 解: $\because a^2 = \beta^2$

$\therefore a + \beta = 0$ 或 $a = \beta$.

当 $a + \beta = 0$ 时,

$\therefore a, \beta$ 为关于 x 的方程 $(k+2)x^2 - 2kx + k - 1 = 0$ 的两个实数根,

$\therefore a + \beta = -\frac{-2k}{k+2} = \frac{2k}{k+2} = 0$.

解得 $k = 0$, 经检验 $k = 0$ 是方程 $\frac{2k}{k+2} = 0$ 的解,

此时一元二次方程为 $2x^2 - 1 = 0$, 有两个互为相反数的实数根, 符合题意;

当 $a = \beta$ 时, 方程有两个相等的实数根,

$\therefore \Delta = (-2k)^2 - 4(k+2)(k-1) = 0$

解得 $k = 2$,

此时一元二次方程为 $4x^2 - 4x + 1 = 0$, 有两个相等的实数根, 符合题意.

$\therefore k = 0$ 或 $k = 2$

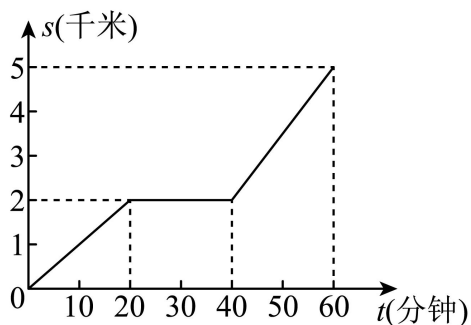
22. 甲、乙两人同时从 A 地前往相距 5 千米的 B 地. 甲骑自行车, 途中修车耽误了 20 分钟, 甲行驶的路程 s (千米) 关于时间 t (分钟) 的函数图像如图所示; 乙慢跑所行的路程 s (千米) 关于时间 t (分钟) 的函数解析式为 $s = \frac{1}{12}t (0 \leq t \leq 60)$.

(1) 在图中画出乙慢跑所行的路程关于时间的函数图像;

(2) 乙慢跑的速度是每分钟_____千米;

(3) 甲修车后行驶的速度是每分钟_____千米;

(4) 甲、乙两人在出发后, 中途_____分钟时相遇.



【答案】(1) 图像见解析; (2) $\frac{1}{12}$; (3) $\frac{3}{20}$; (4) 24.

【解析】

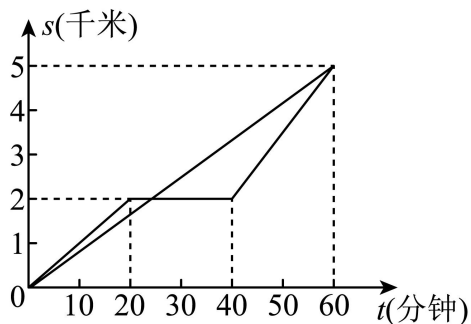
【分析】(1) 根据所给解析式可知函数过原点, 并过点 (60, 5), 由这两点即可得出答案.

(2) 乙慢跑的速度即是乙慢跑所行的路程 s (千米) 关于时间 t (分钟) 的函数解析式的斜率;

(3) 甲修车后行驶路程是 3km, 所用时间是 20min, 即可求出速度;

(4) 甲乙相遇, 体现在 (1) 中的图形即是它们的交点, 即求出交点得出答案.

【详解】(1) 所画图形如下所示:



(2) 乙慢跑的速度为: $\frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ 千米/分钟;

(3) 甲修车后行驶 20min, 所行路程为 3km,

故甲修车后行驶的速度为: $3 \div 20 = \frac{3}{20}$ km/min;

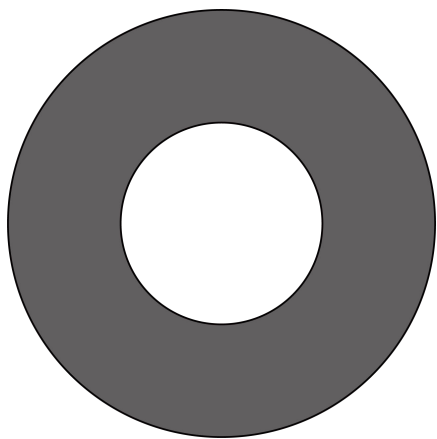
(4) 由甲行驶的路程 s (千米) 关于时间 t (分钟) 的函数图象与乙慢跑所行的路程 s (千米) 关于时间 t (分钟) 的函数图象可知:

在距离 A 地 2km 处甲乙相遇, 此时乙行驶了 $2 \times 12 = 24$ 分钟,

即甲、乙两人在出发后, 中途 24 分钟时相遇.

【点睛】本题考查了一次函数的实际应用, 难度不大, 读懂题意是关键, 同时注意与图形结合解答问题.

23. 如图, 圆环的内外圈用铁丝围成, 其中大圆半径比小圆半径的 2 倍多 1 米, 如果圆环的面积等于 40π 平方米, 求围成圆环铁丝的总长度.



【答案】 20π

【解析】

【分析】 设小圆的半径为 r ，则大圆的半径为 $2r+1$ ，根据 $S_{\text{圆环}} = S_{\text{大圆}} - S_{\text{小圆}}$ ，列方程求得大圆和小圆的半径，再计算大圆和小圆的周长之和即可求解.

【详解】 解： 设小圆的半径为 r ，则大圆的半径为 $2r+1$ ，

由图可得， $S_{\text{圆环}} = S_{\text{大圆}} - S_{\text{小圆}}$ ， 即 $(2r+1)^2 \cdot \pi - \pi r^2 = 40\pi$ ，

解得， $r = -\frac{13}{3}$ (舍)， $r = 3$ ，

$\therefore 2r+1 = 2 \times 3 + 1 = 7$ ，

$\therefore 2\pi \times 3 + 2\pi \times 7 = 20\pi$ ，

答： 围成圆环铁丝的总长度为 20π .

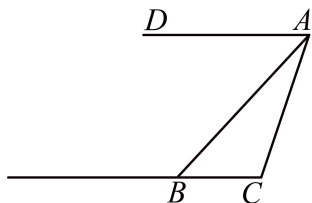
四、(本大题共 3 题，第 24 题 10 分，第 25、26 题每题 9 分，满分 28 分)

24. 已知： 如图， $\triangle ABC$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle DAB = 2\angle BAC$.

操作： 过点 C 作 $CE \perp AD$ ，垂足为 E ，在 CB 的延长线上，求作一点 P ，使点 P 到 $\angle BAD$ 两边的距离相等，连接 AP ， AP 与 CE 相交于点 Q .

猜想： 线段 PQ 与 AC 之间的数量关系为： _____ .

证明：



【答案】 猜想 $PA = 2AC$ ，证明见解析

【解析】

【分析】根据题意可知点 P 在 $\angle BAD$ 的角平分线上，则 $\angle BAP = \angle DAP = \frac{1}{2} \angle BAD$ ，由此推出 $\angle BAP = \angle DAP = \angle BAC$ ，设 $\angle BAP = \angle DAP = \angle BAC = x$ ，由平行线的性质可得 $\angle BPA = \angle DAP = x$ ， $CE \perp BC$ ，如图所示，取 PQ 中点 H ，连接 CH ，则 $PH = CH = \frac{1}{2} PQ$ ，根据等边对等角得到 $\angle CPH = \angle PCH = x$ ，由三角形外角的性质得到 $\angle CHA = \angle CPH + \angle PCH = 2x$ ，进而可证明 $\angle CHA = \angle CAH = \angle CAB + \angle BAP = 2x$ ，得到 $CH = AC$ ，则 $PA = 2AC$ 。

【详解】解：猜想 $PQ = 2AC$ ，证明如下：

$\because$ 点 P 到 $\angle BAD$ 两边的距离相等，

$\therefore$ 点 P 在 $\angle BAD$ 的角平分线上，

$$\therefore \angle BAP = \angle DAP = \frac{1}{2} \angle BAD,$$

$$\because \angle DAB = 2\angle BAC,$$

$$\therefore \angle BAP = \angle DAP = \angle BAC,$$

$$\text{设 } \angle BAP = \angle DAP = \angle BAC = x,$$

$$\because AD \parallel BC, CE \perp AD,$$

$$\therefore \angle BPA = \angle DAP = x, CE \perp BC,$$

如图所示，取 PQ 中点 H ，连接 CH ，

$$\therefore PH = CH = \frac{1}{2} PQ,$$

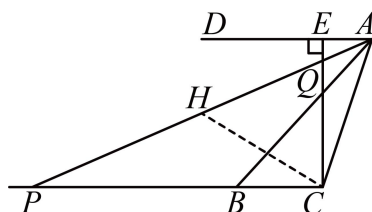
$$\therefore \angle CPH = \angle PCH = x,$$

$$\therefore \angle CHA = \angle CPH + \angle PCH = 2x,$$

$$\therefore \angle CHA = \angle CAH = \angle CAB + \angle BAP = 2x,$$

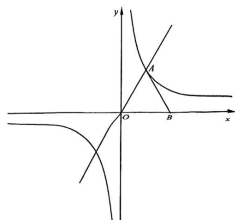
$$\therefore CH = AC,$$

$$\therefore PA = 2AC.$$



【点睛】本题主要考查了等腰三角形的性质与判定，直角三角形的性质，角平分线的定义和角平分线的判定，平行线的性质，熟知直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半是解题的关键。

25. 如图，已知点 O 为坐标原点，点 A 在正比例函数 $y = \sqrt{3}x$ 第一象限的图像上， $OA = 4$ ，反比例函数的图像经过点 A 。



(1) 求反比例函数的解析式;

(2) 已知点 B 在 x 轴上, 且 $AB = AO$. 如果点 P 在反比例函数的图像上 (点 P 与点 A 不重合), Q 在 x 轴上, $\triangle PQB$ 为等边三角形, 求点 Q 的坐标.

【答案】(1) 反比例函数表达式为 $y = \frac{4\sqrt{3}}{x}$

(2) $Q\left(-\frac{14}{3}, 0\right)$ 或 $Q\left(\frac{32}{5}, 0\right)$

【解析】

【分析】(1) 过点 A 作 $AC \perp OB$ 于点 C , 设点 $A(a, \sqrt{3}a)$, 反比例函数表达式为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$, 则 $AC = \sqrt{3}a$, $OC = a$, 利用勾股定理列方程求得 $A(2, 2\sqrt{3})$, 再把点 A 的坐标代入反比例函数表达式求解即可;

(2) 过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D , 根据等腰三角形的性质可得 $OB = 4$, 设 $P(b, 4\sqrt{3}b)$, 则 $PD = 4\sqrt{3}b$, $BD = b - 4$, $BQ = 2BD = 2b - 8$, 利用勾股定理求得 $BP^2 = (4\sqrt{3}b)^2 + (b - 4)^2$, 再根据等边三角形的性质可得 $BP = BQ$, 即 $(4\sqrt{3}b)^2 + (b - 4)^2 = (2b - 8)^2$, 从而求得 $P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)$ 或 $P\left(\frac{4}{5}, \frac{16\sqrt{3}}{5}\right)$, 再根据等边三角形的性质分别求解即可.

【小问 1 详解】

解: 如图, 过点 A 作 $AC \perp OB$ 于点 C ,

设点 $A(a, \sqrt{3}a)$, 反比例函数表达式为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$,

$$\therefore AC = \sqrt{3}a, \quad OC = a,$$

$$\therefore (\sqrt{3}a)^2 + a^2 = 4^2,$$

解得 $a = \pm 2$,

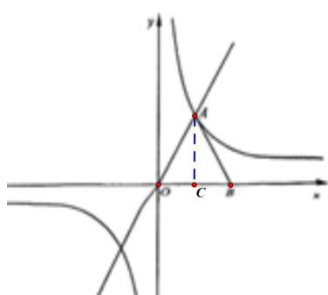
$\therefore$ 点 A 在第一象限,

$$\therefore A(2, 2\sqrt{3}),$$

又 $\therefore$ 点 A 在反比例函数图象上,

$$\therefore k = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{反比例函数表达式为 } y = \frac{4\sqrt{3}}{x};$$



【小问 2 详解】

解：过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D ,

$$\because AB = AO = 4, \quad AC \perp OB,$$

$$\therefore BC = OC,$$

$$\therefore A(2, 2\sqrt{3}),$$

$$\therefore OB = 4,$$

$$\text{设 } P(b, 4\sqrt{3}b),$$

$$\therefore PD = 4\sqrt{3}b, \quad BD = b - 4,$$

$$\therefore BQ = 2BD = 2b - 8,$$

$$\therefore BP^2 = (4\sqrt{3}b)^2 + (b - 4)^2,$$

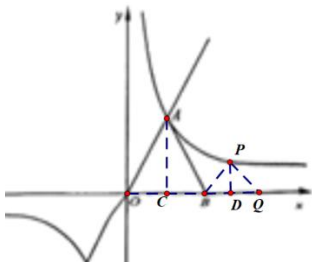
又 $\because \triangle PQB$ 为等边三角形,

$$\therefore BP = BQ,$$

$$\therefore (4\sqrt{3}b)^2 + (b - 4)^2 = (2b - 8)^2,$$

$$\text{解得 } b = -\frac{4}{3} \text{ 或 } b = \frac{4}{5},$$

$$\therefore P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{16\sqrt{3}}{3}\right) \text{ 或 } P\left(\frac{4}{5}, \frac{16\sqrt{3}}{5}\right),$$

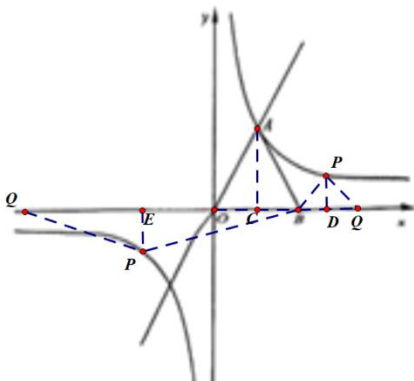


如图，当点 $P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)$ 时， $BE = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$,

$$\therefore QE = \frac{10}{3},$$

$$\therefore QO = \frac{10}{3} + \frac{4}{3} = \frac{14}{3},$$

$$\therefore Q\left(-\frac{14}{3}, 0\right),$$

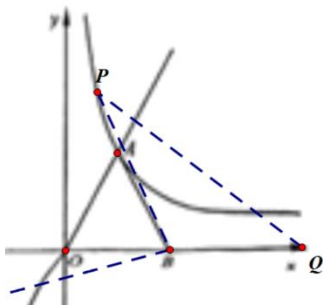


如图，当点 $P\left(\frac{4}{5}, \frac{16\sqrt{3}}{5}\right)$ 时， $BQ = PA = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{768}{25}} = \frac{28}{5}$,

$$\therefore QO = \frac{28}{5} + \frac{4}{5} = \frac{32}{5},$$

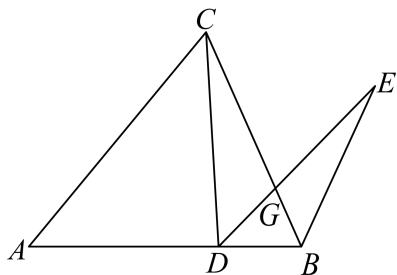
$$\therefore Q\left(\frac{32}{5}, 0\right),$$

综上所述， $Q\left(-\frac{14}{3}, 0\right)$ 或 $Q\left(\frac{32}{5}, 0\right)$.



【点睛】 本题考查勾股定理、解一元二次方程、等边三角形的性质和等腰三角形的性质、利用待定系数法求反比例函数解析式，利用待定系数法求出反比例函数解析式是解题的关键。

26. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 在边 AB 上， $\angle CDE = \angle CBE = \angle A$ 。



(1) $\angle DBE$ 与 $\angle A$ 之间有怎样的数量关系？并证明你所得的结论。

(2) 求证： $DE = DC$ 。

【答案】 (1) $\angle DBE = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ ，证明过程见解析

(2) 证明过程见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据等腰三角形的性质和三角形内角和定理可得 $\angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ ，再根据 $\angle DBE = \angle DBC + \angle A$ ，即可得出结论；

(2) 在 BC 上截取 $DB = DF$ ，根据对顶角相等可得 $\angle DGC = \angle BGE$ ，再根据三角形内角和可得 $\angle DCF = \angle BEG$ ，由 $\angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ ，可得 $\angle CFD = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ ，从而可得 $\angle CFD = \angle EBD$ ，可证 $\triangle CFD \cong \triangle EBD$ (AAS)，即可得出结论。

【小问 1 详解】

解： $\angle DBE = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ ，理由如下：

$\because AB = AC$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ ，

$\because \angle DBE = \angle DBC + \angle CBE$ ， $\angle CBE = \angle A$ ，

$\therefore \angle DBE = \angle DBC + \angle A$ ，

$\therefore \angle DBE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A + \angle A = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ ；

【小问 2 详解】

证明：在 BC 上截取 $DB = DF$ ，

$\because \angle CDE = \angle CBE$ ， $\angle DGC = \angle BGE$ ，

$\therefore \angle DCF = \angle BEG$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\text{又} \because DB = DF,$$

$$\therefore \angle DFB = \angle ACB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\therefore \angle CFD = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle A\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A,$$

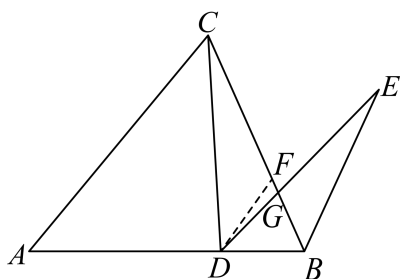
$$\therefore \angle EBD = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A + \angle A = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\therefore \angle CFD = \angle EBD,$$

$$\text{又} \because DB = DF,$$

$$\therefore \triangle CFD \cong \triangle EBD (AAS),$$

$$\therefore CD = ED.$$



【点睛】 本题考查等腰三角形的性质、对顶角相等、三角形内角和定理及全等三角形的判定与性质，添加辅助线，构造全等三角形是解题的关键.