

2022 学年第一学期八年级数学学科第二阶段质量调研试卷

(时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (每题 2 分, 共 12 分)

1. 下列二次根式中, 最简二次根式是 ()

A. $\sqrt{a^2b^2}$

B. $\sqrt{0.5}$

C. $\sqrt{a^2+b^2}$

D. $\sqrt{\frac{1}{3}a}$

【答案】C

【解析】

【分析】最简二次根式的概念: (1) 被开方数不含分母; (2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

【详解】解: A、 $\sqrt{a^2b^2} = |ab|$, 故该选项不符合题意;

B、 $\sqrt{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故该选项不符合题意;

C、 $\sqrt{a^2+b^2}$ 是最简二次根式, 故该选项符合题意;

D、 $\sqrt{\frac{1}{3}a} = \frac{\sqrt{3a}}{3}$, 故该选项不符合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查最简二次根式, 解题的关键是正确理解最简二次根式的概念, 本题属于基础题型.

2. $\sqrt{m-n}$ 的一个有理化因式是 ()

A. $\sqrt{m+n}$

B. $\sqrt{m} + \sqrt{n}$

C. $2\sqrt{m-n}$

D. $\sqrt{m} - \sqrt{n}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据有理化的定义以及二次根式的乘法法则逐项判断, 即可得出答案.

【详解】解: A, $\sqrt{m-n} \cdot \sqrt{m+n} = \sqrt{m^2-n^2}$, 因此 $\sqrt{m+n}$ 不是 $\sqrt{m-n}$ 的有理化因式, 故 A 选项不合题意;

B, $\sqrt{m-n} \cdot (\sqrt{m} + \sqrt{n}) = \sqrt{m^2-mn} + \sqrt{mn-n^2}$, 因此 $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ 不是 $\sqrt{m-n}$ 的有理化因式, 故 B 选项不合题意;

C, $\sqrt{m-n} \cdot 2\sqrt{m-n} = 2(m-n)$, 因此 $2\sqrt{m-n}$ 是 $\sqrt{m-n}$ 的有理化因式, 故 C 选项符合题意;

D, $\sqrt{m-n} \cdot (\sqrt{m}-\sqrt{n}) = \sqrt{m^2-mn} - \sqrt{mn-n^2}$, 因此 $\sqrt{m}-\sqrt{n}$ 不是 $\sqrt{m-n}$ 的有理化

因式, 故 D 选项不合题意;

故选 C.

【点睛】本题主要考查分母有理化, 熟练掌握有理化的定义以及二次根式的乘法法则是解题的关键.

3. 下列方程是一元二次方程的是 ()

A. $ax^2 + 2x + 1 = 0$ (a 为常数)

B. $x^2 + 2x + 3 = 0$

C. $x(2x-1) = 2x^2 - 2x - 1$

D. $\frac{x^3 + 2x}{x} = 1$

【答案】B

【解析】

【分析】利用一元二次方程的定义逐项判断即可得出答案.

【详解】解: $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 只有当 $a \neq 0$ 时才是一元二次方程, 故 A 选项不合题意;

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 是一元二次方程, 故 B 选项符合题意;

$x(2x-1) = 2x^2 - 2x - 1$ 化简后为 $x = -1$, 不是一元二次方程, 故 C 选项不合题意;

$\frac{x^3 + 2x}{x} = 1$ 不是整式方程, 因此不是一元二次方程, 故 D 选项不合题意;

故选 B.

【点睛】本题考查一元二次方程的识别, 解题的关键是掌握一元二次方程的定义: 通过化简后, 只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2 的整式方程, 叫做一元二次方程.

4. 下列二次根式中与 $\sqrt{18}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{30}$

B. $\sqrt{12}$

C. $\sqrt{32}$

D. $\sqrt{24}$

【答案】C

【解析】

【分析】把 $\sqrt{18}$ 和各选项中的式子化为最简二次根式, 再由同类二次根式的概念解答即可.

【详解】解: $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$,

A、 $\sqrt{30}$ 与 $3\sqrt{2}$ 的被开方数不同, 不是同类二次根式, 不符合题意;

B、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{2}$ 的被开方数不同, 不是同类二次根式, 不符合题意;

C、 $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ 与 $3\sqrt{2}$ 被开方数相同, 是同类二次根式, 符合题意;

D、 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$ 与 $3\sqrt{2}$ 的被开方数不同, 不是同类二次根式, 不符合题意.

故选: C.

【点睛】本题考查的是同类二次根式，熟知一般地，把几个二次根式化为最简二次根式后，如果它们的被开方数相同，就把这几个二次根式叫做同类二次根式是解题的关键.

5. 下列语句中哪句话是定义 ()

- A. 连接 A 、 B 两点.
- B. 等角的余角相等吗?
- C. 内错角相等，两直线平行.
- D. 整数与分数统称为有理数.

【答案】 D

【解析】

【分析】判断一件事情的语句,叫做命题.根据命题和定义的概念进行判断.

【详解】解：A、联结 A 、 B 两点，不是定义，不符合题意；

B、等角的余角相等吗？不是定义，不符合题意；

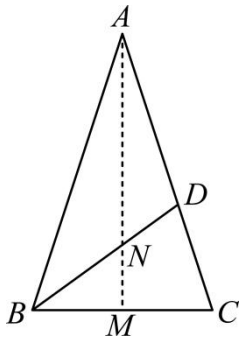
C、内错角相等，两直线平行，不是定义，不符合题意；

D、整数与分数统称为有理数，是定义，符合题意；

故选: D.

【点睛】本题主要考查了命题的定义：判断一件事情的语句是命题，一般有“是”，“不是”等判断词，比较简单.

6. 如图, 已知 $AB = AC$, $AD = BD = BC$, 那么下列结论中, 错误的是 ()



- A. $\angle BAC = 36^\circ$
 B. BD 平分 $\angle ABC$
 C. 如果取 BC 边上的中点 M , 联结 AM 交 BD 于 N , 那么 $\angle MNB = 54^\circ$
 D. 点 N 是 BD 的中点

【答案】 D

【解析】

【分析】设 $\angle BAC = \alpha$ ，根据等腰三角形的性质可得 $\angle ABD = \angle BAC = \alpha$ ，利用外角的性质可得 $\angle BDC = 2\alpha$ ，进而得出 $\angle BDC = \angle C = \angle ABC = 2\alpha$ ，再根据三角形内角和定理可得 $\alpha = 36^\circ$ ；根据 $\angle ABC = 2\alpha$ ， $\angle ABD = \alpha$ ，可得 BD 平分 $\angle ABC$ ；根据等腰三角形“三

线合一”可得 $\angle BAM = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\alpha = 18^\circ$ ，再利用外角的性质可得 $\angle MNB = 54^\circ$ ；最

后根据三角形中位线的性质可判断 D 选项错误.

【详解】解：设 $\angle BAC = a$,

$$\because AD = BD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle BAC = a,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BAC + \angle ABD = 2a,$$

$$\because BC = BD,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle C = 2a,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C = 2a,$$

$$\because \angle ABC + \angle C + \angle BAC = 180^\circ,$$

$$\therefore 2a + 2a + a = 180^\circ,$$

$$\therefore a = 36^\circ, \text{ 即 } \angle BAC = 36^\circ, \text{ 故 A 选项结论正确, 不合题意;}$$

$$\because \angle ABC = 2a, \angle ABD = a,$$

$$\therefore BD \text{ 平分 } \angle ABC, \text{ 故 B 选项结论正确, 不合题意;}$$

$$\because AB = AC, \text{ 点 } M \text{ 是 } BC \text{ 边上的中点,}$$

$$\therefore \angle BAM = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} a = 18^\circ,$$

$$\therefore \angle MNB = \angle BAM + \angle ABD = 18^\circ + 36^\circ = 54^\circ, \text{ 故 C 选项结论正确, 不合题意;}$$

$$\because AM \text{ 与 } AC \text{ 不平行, } BM = CM,$$

$$\therefore BN \neq ND, \text{ 即点 } N \text{ 不是 } BD \text{ 的中点, 故 D 选项结论错误, 符合题意;}$$

故选 D.

【点睛】本题考查等腰三角形的性质, 三角形内角和定理, 三角形外角的性质, 角平分线的定义等, 熟练掌握等腰三角形的性质是解题的关键.

二、填空题 (每题 3 分, 共 36 分)

7. 如果二次根式 $\sqrt{3-x}$ 有意义, 那么 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \leq 3$

【解析】

【分析】直接利用二次根式有意义的条件分析得出答案.

【详解】解: 二次根式 $\sqrt{3-x}$ 有意义, 则 $3-x \geq 0$,

解得: $x \leq 3$.

故答案为: $x \leq 3$.

【点睛】此题主要考查了二次根式有意义的条件, 正确把握定义是解题关键.

8. 不等式 $\sqrt{3}x < \sqrt{2}x - 1$ 的解集是_____.

【答案】 $x < -\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ## $x < -\sqrt{2} - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 利用解不等式的方法与步骤求得解集，进一步化简即可.

【详解】 解: $\sqrt{3}x < \sqrt{2}x - 1$,

$$\sqrt{3}x - \sqrt{2}x < -1,$$

$$x < -\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}},$$

$$x < -\sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

故答案为: $x < -\sqrt{3} - \sqrt{2}$

【点睛】 本题主要考查了解一元一次不等式，二次根式的化简，熟练掌握一元一次不等式的解法和二次根式的性质是解题的关键.

9. 在实数范围内分解因式: $2x^2 - 6xy - y^2 =$ _____.

【答案】 $2\left(x - \frac{3 - \sqrt{11}}{2}y\right)\left(x - \frac{3 + \sqrt{11}}{2}y\right)$

【解析】

【分析】 先提取2，再将括号里面的式子配方，最后用平方差公式因式分解即可.

【详解】 解: $2x^2 - 6xy - y^2$

$$= 2\left(x^2 - 3xy - \frac{1}{2}y^2\right)$$

$$= 2\left(x^2 - 3xy + \frac{9}{4}y^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{9}{4}y^2\right)$$

$$= 2\left[\left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{11}{4}y^2\right]$$

$$= 2\left[\left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{11}}{2}y\right)^2\right]$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{2}y + \frac{\sqrt{11}}{2}y\right)\left(x - \frac{3}{2}y - \frac{\sqrt{11}}{2}y\right)$$

$$= 2\left(x - \frac{3 - \sqrt{11}}{2}y\right)\left(x - \frac{3 + \sqrt{11}}{2}y\right).$$

故答案为: $2\left(x - \frac{3 - \sqrt{11}}{2}y\right)\left(x - \frac{3 + \sqrt{11}}{2}y\right)$

【点睛】本题考查了利用公式法因式分解以及实数的概念，主要涉及完全平方公式以及平方差公式，熟记完全平方公式以及平方差公式是解题关键.

10. 已知 $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 - x$ ，则 x 的取值范围是_____；

【答案】 $x \leq 2$

【解析】

【分析】试题分析：先根据完全平方公式对根号下的式子因式分解，再根据二次根式的性质判断.

【详解】 $\because \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 - x$,

$$\therefore \sqrt{(x-2)^2} = 2 - x,$$

$$\therefore 2 - x \geq 0, \quad x \leq 2.$$

故答案为: $x \leq 2$

【点睛】解答本题的关键是熟练掌握二次根式的性质: 当 $a \geq 0$ 时, $\sqrt{a^2} = a$, 当 $a \leq 0$ 时, $\sqrt{a^2} = -a$

11. 如果 $\sqrt{4x^2 - 1} = \sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{2x-1}$ 成立, 那么 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】结合题意, 根据二次根式的性质, 通过列一元一次不等式组并求解, 即可得到答案.

【详解】解: $\because \sqrt{4x^2 - 1} = \sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{2x-1}$,

$$\therefore \sqrt{(2x+1)(2x-1)} = \sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{2x-1},$$

$$\therefore \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore x \geq \frac{1}{2}$$

故答案为: $x \geq \frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查二次根式有意义的条件、解一元一次不等式组等, 解题的关键是牢记二次根式中根号里的式子要大于或等于零.

12. 某种商品原价 100 元, 经过两次降价后该种商品的利润减少了 36 元, 那么该种商品平均每次降价的百分比是_____

【答案】 20%

【解析】

【分析】 设每次降价的百分比为 x , 第一次降价后价格变为 $100(1-x)$, 第二次在第一次降价后的基础上再降, 变为 $100(1-x)(1-x)$, 从而列出方程, 求出答案.

【详解】 设每次降价的百分比为 x , 根据题意得:

$$100(1-x)^2=100-36,$$

解得: $x_1=1.8$, $x_2=0.2$.

因 $x=1.8$ 不合题意, 故舍去, 所以 $x=0.2$,

答: 该商品平均每次降价的百分比是 20%.

故答案为 20%.

【点睛】 本题考查一元二次方程的应用, 正确找出等量关系列出方程是解题的关键.

13. 把命题“对顶角相等”改写成“如果……, 那么……”的形式: _____.

【答案】 两个角是对顶角, 那么这两个角相等

【解析】

【分析】 先找到命题的题设和结论, 再写成“如果……, 那么……”的形式.

【详解】 解: 把命题“对顶角相等”改写成“如果……, 那么……”的形式为:

如果两个角是对顶角, 那么这两个角相等.

故答案为: 两个角是对顶角, 那么这两个角相等

【点睛】 本题主要考查了将原命题写成条件与结论的形式, “如果”后面是命题的条件, “那么”后面是条件的结论, 解决本题的关键是找到相应的条件和结论, 比较简单.

14. 已知 m 是常数, 那么关于 x 的方程 $2x^2 + mx - 1 = 0$ 根的情况是_____.

【答案】 有两个不相等的实数根

【解析】

【分析】 利用根的判别式即可判断出根的情况.

【详解】 解: 一元二次方程 $2x^2 + mx - 1 = 0$ 中, $a=2$, $b=m$, $c=-1$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4 \times 2 \times (-1) = m^2 + 8 > 0,$$

$\therefore$ 该方程有两个不相等的实数根.

故答案为: 有两个不相等的实数根.

【点睛】 本题考查根的判别式, 解题的关键是掌握 $\Delta = b^2 - 4ac$, 以及 $\Delta > 0$ 时一元二次方程有两个不相等的实数根.

15. 如果关于 x 的一元二次方程 $(m-3)x^2 + 3x + m^2 - 2m - 3 = 0$ 有一个根是 $x=0$, 那么

$$m = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 -1

【解析】

【分析】 先把 $x=0$ 代入 $(m-3)x^2+3x+m^2-2m-3=0$ 得 $m^2-2m-3=0$ ，再解关于 m 的方程，然后根据一元二次方程的定义确定满足条件的 m 的值.

【详解】 解：把 $x=0$ 代入 $(m-3)x^2+3x+m^2-2m-3=0$ ，得 $m^2-2m-3=0$ ，

解得 $m_1=3$ ， $m_2=-1$ ，

$\because m-3 \neq 0$ ，即 $m \neq 3$ ，

$\therefore m$ 的值为 -1 .

故答案为： -1 .

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解. 也考查了一元二次方程的定义.

16. 已知实数 x, y 满足 $(x^2+y^2)(x^2+y^2-7)=8$ ，那么 $x^2+y^2=\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 8

【解析】

【分析】 将 x^2+y^2 看作一个整体，先进行因式分解，再利用平方的非负性即可求解.

【详解】 解： $\because (x^2+y^2)(x^2+y^2-7)=8$ ，

$$\therefore (x^2+y^2)^2 - 7(x^2+y^2) - 8 = 0,$$

$$\therefore (x^2+y^2-8)(x^2+y^2+1) = 0,$$

$$\because x^2+y^2+1 > 1,$$

$$\therefore x^2+y^2-8 = 0,$$

$$\therefore x^2+y^2 = 8,$$

故答案为： 8.

【点睛】 本题考查因式分解的应用，解题的关键是掌握整体思想以及平方的非负性.

17. 等腰三角形的一边长为 2，另两边长是关于 x 的方程 $x^2-6x+m-1=0$ 的两个实数根，则 m 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 10

【解析】

【分析】 讨论：当底边长为 2 时，则腰长为方程 $x^2-6x+m-1=0$ 的两个根，利用判别式得到 m 的值；当腰长为 2，则将 $x=2$ 代入方程 $x^2-6x+m-1=0$ 求解，然后根据三角形三

边的关系加以判断.

【详解】解: 当底边长为 2 时, 则腰长为方程 $x^2 - 6x + m - 1 = 0$ 的两个根,

$$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4(m-1) = 0, \text{ 解得 } m = 10;$$

当腰长为 2, 则 $x = 2$ 为方程 $x^2 - 6x + m - 1 = 0$ 的一个根,

$$\therefore 4 - 12 + m - 1 = 0, \text{ 解得 } m = 9,$$

方程化为 $x^2 - 6x + 8 = 0$, 解得 $x_1 = 2, x_2 = 4$,

$$\because 2 + 2 = 4,$$

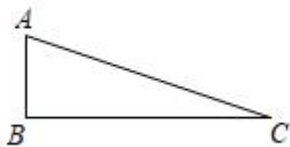
$\therefore 2, 2, 4$ 不符合三角形三边的关系, 舍去,

综上所述, m 的值为 10.

故答案为: 10.

【点睛】本题考查了根的判别式: 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系: 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根. 也考查了三角形三边的关系.

18. 如图, 在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 4\sqrt{3} + 5$, 点 D 在边 BC 上, 将 $\triangle ACD$ 沿直线 AD 翻折得 $\triangle AED$, 如果 $DE \perp BC$, 那么 $S_{\triangle ACD} =$ _____.



【答案】 $8\sqrt{3} + 2$

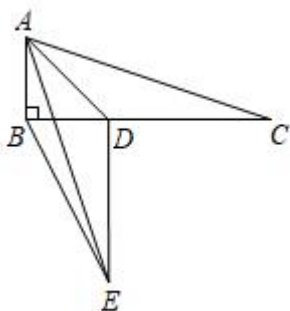
【解析】

【分析】由折叠的性质可得 $\angle ADC = \angle ADE$, 结合 $DE \perp BC$, 可得

$\angle ADC = \angle ADE = 135^\circ$, 进而利用三角形外角的性质推出 $\angle BAD = \angle ADB = 45^\circ$, 根据

等角对等边可得 $BD = AB = 4$, 即可求出 CD , 最后根据 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}CD \cdot AB$ 即可求出答案.

【详解】解: 如图,



$$\begin{aligned}
 &\because \text{将} \triangle ACD \text{ 沿直线 } AD \text{ 翻折得 } \triangle AED, \\
 &\therefore \angle ADC = \angle ADE, \\
 &\because DE \perp BC, \\
 &\therefore \angle CDE = \angle BDE = 90^\circ, \\
 &\therefore \angle ADC = \angle ADE = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle CDE) = 135^\circ, \\
 &\therefore \angle ADB = \angle ADE - \angle BDE = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ, \\
 &\because \angle B = 90^\circ, \\
 &\therefore \angle BAD = \angle ADB = 45^\circ, \\
 &\therefore BD = AB = 4, \\
 &\therefore CD = BC - BD = 4\sqrt{3} + 5 - 4 = 4\sqrt{3} + 1, \\
 &\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}CD \cdot AB = \frac{1}{2} \times (4\sqrt{3} + 1) \times 4 = 8\sqrt{3} + 2.
 \end{aligned}$$

故答案为: $8\sqrt{3} + 2$.

【点睛】本题考查折叠的性质，等腰三角形的性质，三角形外角的性质等，解题的关键是掌握折叠前后对应边相等、对应角相等.

三、简答题 (每题 6 分, 共 24 分)

19. 计算: $\sqrt{32} - \sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2} - (1+\sqrt{2})^{-1}$

【答案】 $\frac{15\sqrt{2}}{4} - 2$

【解析】

【分析】先化简，然后合并同类二次根式即可.

【详解】解: $\sqrt{32} - \sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2} - (1+\sqrt{2})^{-1}$

$$\begin{aligned}
&= 4\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} - (3 - \sqrt{2}) - \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \\
&= 4\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} - 3 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) \\
&= 4\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} - 3 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 \\
&= \frac{15\sqrt{2}}{4} - 2.
\end{aligned}$$

【点睛】 本题考查二次根式的混合运算、负整数指数幂、分母有理化，解答本题的关键是明确二次根式混合运算的计算方法.

20. 计算: $2x\sqrt{\frac{1}{x}} \div 3\sqrt{4x^3} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{9x^4}$

【答案】 $\frac{x}{6}$.

【解析】

【分析】 直接利用二次根式的乘除运算法则计算得出答案.

【详解】 解: $2x\sqrt{\frac{1}{x}} \div 3\sqrt{4x^3} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{9x^4}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2x}{3} \times \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4x^3} \cdot 9x^4} \\
&= \frac{x}{9} \times \frac{3}{2} \\
&= \frac{x}{6}.
\end{aligned}$$

【点睛】 此题主要考查了二次根式的乘除运算，正确化简二次根式是解题关键.

21. 用配方法解方程: $3x^2 - 2x - 6 = 0$

【答案】 $x_1 = \frac{1 + \sqrt{19}}{3}$, $x_2 = \frac{1 - \sqrt{19}}{3}$.

【解析】

【分析】 利用解一元二次方程—配方法: 先把二次项系数化为 1, 然后方程两边同时加上一次项系数一半的平方, 进行计算即可解答.

【详解】 解: $3x^2 - 2x - 6 = 0$,

整理得 $3x^2 - 2x = 6$, 即 $x^2 - \frac{2}{3}x = 2$,

配方得 $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{19}{9}$, 即 $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{19}{9}$,

$$\therefore x - \frac{1}{3} = \pm \frac{\sqrt{19}}{3},$$

$$\therefore x - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{19}}{3} \text{ 或 } x - \frac{1}{3} = -\frac{\sqrt{19}}{3},$$

$$\therefore x_1 = \frac{1 + \sqrt{19}}{3}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{19}}{3}.$$

【点睛】本题考查了解一元二次方程—配方法：熟练掌握用配方法解一元二次方程的步骤是解决问题的关键.

22. 解方程: $\sqrt{2}x^2 + 3x = 2\sqrt{2}$

【答案】 $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】将原方程二次项系数化 1, 然后用配方法求解即可.

【详解】解: $\sqrt{2}x^2 + 3x = 2\sqrt{2}$

$$\sqrt{2}\left(x^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}x\right) = 2\sqrt{2},$$

$$x^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}x = 2,$$

$$x^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}x + \frac{9}{8} = 2 + \frac{9}{8},$$

$$\left(x + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{8},$$

$$x + \frac{3}{2\sqrt{2}} = \pm \frac{5}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{即 } x + \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \text{ 或 } x + \frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{5}{2\sqrt{2}},$$

$$\therefore x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = -2\sqrt{2}.$$

【点睛】本题考查一元二次方程的解法，配方法是常用方法，掌握配方法解方程的步骤是解答此题的关键.

四.解答题 (第 23 题 7 分, 第 24 题 4 分, 第 25 题 7 分, 第 26 题 10 分, 共 28 分)

23. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2 - (2m+5)x + (m+4) = 0$ 有两个实数根

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 请写出 m 的最小整数值, 并求出此时方程的根.

【答案】(1) $m \geq -\frac{41}{8}$ 且 $m \neq 1$;

(2) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

【解析】

【分析】(1) 根据一元二次方程的定义和判别式的意义得到 $m-1 \neq 0$ 且 $\Delta \geq 0$, 然后解不等式即可;

(2) 根据 (1) 的结论得到 m 满足条件的最小负整数为 -5 , 则原方程化为 $6x^2 - 5x + 1 = 0$, 然后利用公式法解方程.

【小问 1 详解】

解: 根据题意, 得 $m-1 \neq 0$ 且 $\Delta = [-(2m+5)]^2 - 4(m-1)(m+4) \geq 0$,

解得 $m \geq -\frac{41}{8}$ 且 $m \neq 1$;

【小问 2 详解】

解: m 满足条件的最小整数值 -5 , 则原方程化为 $6x^2 - 5x + 1 = 0$,

$$\therefore \Delta = (-5)^2 - 4 \times 6 \times 1 = 1,$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm 1}{12},$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}.$$

【点睛】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$: 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根. 也考查了一元二次方程的定义.

24. 2022 年卡塔尔世界杯即将在本月开幕, 共有若干支球队参赛. 第一阶段为小组赛, 第二阶段为淘汰赛. 在小组赛阶段, 所有参赛球队将被分成 8 个小组 (每组参赛球队数量相同), 分别进行单循环赛 (两支球队之间只踢一场), 根据规则, 小组前 2 名的球队顺利出线, 进入淘汰赛. 已知本届世界杯小组赛阶段共有 48 场比赛, 请问: 共有多少支队伍参加比赛?

【答案】共有 32 支队伍参加比赛

【解析】

【分析】设每组有 n 支队伍参加比赛，则每个小组需要比赛 $\frac{n(n-1)}{2}$ 场，由此列一元二次

方程即可求解.

【详解】解：设每组有 n 支队伍参加比赛，

$$\text{则 } \frac{n(n-1)}{2} \times 8 = 48,$$

$$\text{整理得 } n^2 - n - 12 = 0,$$

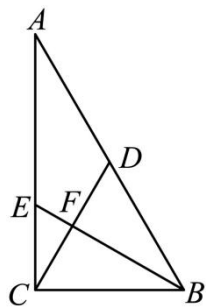
$$\text{解得 } n_1 = 4, \quad n_2 = -3 \quad (\text{舍}),$$

$$4 \times 8 = 32 \quad (\text{支}),$$

即共有 32 支队伍参加比赛.

【点睛】本题考查一元二次方程的实际应用，读懂题意，列出一元二次方程是解题的关键.

25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 AB 上一点， $BD = AD = CD$ ，过点 B 作 $BE \perp CD$ ，分别交 AC 于点 E ，交 CD 于点 F .



(1) 求证： $\angle ACB = 90^\circ$ ；

(2) 如果 $BE = CD$ ，求证： $AC = 2BC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由 $BD = AD = CD$ ，推出 $\angle A = \angle ACD$ ， $\angle ABC = \angle DCB$ ，再由三角形内角和定理即可证明；

(2) 取 AC 中点 G ，连接 DG ，证明 $\triangle CDG \cong \triangle BEC$ (AAS) 即可解决问题.

【小问 1 详解】

证明： $\because BD = AD = CD$ ，

$$\therefore \angle A = \angle ACD, \quad \angle ABC = \angle DCB,$$

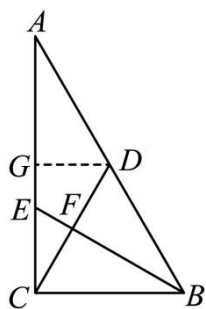
$$\therefore \angle A + \angle ACD + \angle ABC + \angle DCB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle BCD = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ;$$

【小问2 详解】

证明：取 AC 中点 G ，连接 DG ，



$\therefore DG$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore GD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle CGD + \angle ACB = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle CGD = \angle ECB = 90^\circ$ ，

$\therefore BE \perp CD$ ，

$\therefore \angle EBC + \angle BCF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle GCD + \angle BCF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle GCD = \angle EBC$ ，

$\therefore BE = CD$ ，

$\therefore \triangle CDG \cong \triangle BEC$ (AAS)，

$\therefore CG = BC$ ，

$\therefore AC = 2CG$ ，

$\therefore AC = 2BC$ 。

【点睛】本题考查等腰三角形的性质，三角形全等的判定和性质，中位线定理，关键是作辅助线构造全等三角形。

26. 如图，已知： $\triangle ABC$ 是等边三角形， $CN \parallel AB$ ，点 D 为直线 BC 上一点，点 E 是直线 CN 上一点，连接 AD 、 AE 、 DE 。

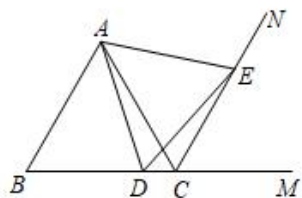


图1

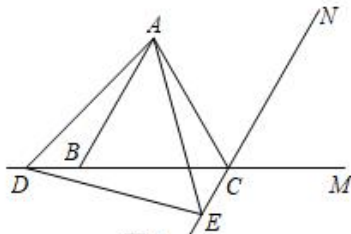
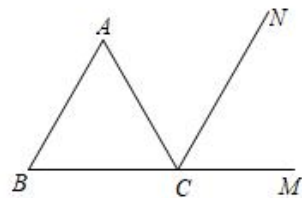


图2



备用图

(1) 如图1，当 $\angle DAE = 60^\circ$ 且点 D 在边 BC 上，求证： $\triangle ADE$ 是等边三角形；

(2) 如果 $\triangle ABC$ 的边长为 11，且 $\angle DAC = 30^\circ$ ，请直接写出线段 CD 的长度；(无需写出解

题过程)

(3) 当 $\angle ADE = 60^\circ$ 时,

①如图 1, 当点 D 在边 BC 上, (1) 中的结论还成立吗? 请说明理由;

②如图 2, 点 D 在 BC 的反向延长线上, (1) 中的结论还成立吗? 请说明理由;

【答案】(1) 证明见解析

(2) 线段 CD 的长度为 $\frac{11}{2}$ 或 11

(3) ①成立, 理由见解析; ②成立, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 根据等边三角形的性质, 得出 $AB = AC$, $\angle BAC = \angle B = 60^\circ$, 再根据平行线的性质, 得出 $\angle ACE = \angle BAC$, 再根据等量代换, 得出 $\angle B = \angle ACE$, 再根据角之间的数量关系, 得出 $\angle BAD = \angle CAE$, 再根据“角边角”, 得出 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$, 再根据全等三角形的性质, 得出 $AD = AE$, 再根据等边三角形的判定定理, 即可得出结论;

(2) ①当点 D 在边 BC 上时, 根据角之间的数量关系, 得出 $\angle DAC = \angle BAD$, 再根据等边三角形的性质和三线合一的性质, 即可得出线段 CD 的长度; ②点 D 在边 BC 的延长线上时, 根据角之间的数量关系, 得出 $\angle BAD = 90^\circ$, 进而得出 $\angle ADB = 30^\circ$, 再根据直角三角形 30° 所对的直角边等于斜边的一半, 得出 $BD = 2AB = 22$, 再根据线段之间的数量关系, 即可得出线段 CD 的长度;

(3) ①在 AB 上截取 $AG = CD$, 连接 DG , 根据等边三角形的判定定理, 得出 $\triangle BDG$ 是等边三角形, 再根据等边三角形的性质, 得出 $\angle BGD = \angle BDG = 60^\circ$, 再根据邻补角互补, 得出 $\angle AGD = 120^\circ$, 再根据平行线的性质, 得出 $\angle ACE = \angle BAC = 60^\circ$, 再根据角之间的数量关系, 得出 $\angle DCE = 120^\circ$, 进而得出 $\angle AGD = \angle DCE$, 再根据三角形的外角的性质和角之间的数量关系, 得出 $\angle CDE = \angle GAD$, 再根据“角边角”, 得出 $\triangle AGD \cong \triangle DCE$, 再根据全等三角形的性质, 得出 $AD = DE$, 再根据等边三角形的判定定理, 即可得出结论; ②过 D 作 $DH \parallel AB$ 交 CA 的延长线于点 H , 根据等边三角形的判定定理, 得出 $\triangle CDH$ 是等边三角形, 再根据等边三角形的性质, 得出 $DH = DC$, 再根据平行线的性质, 得出 $\angle DCE = \angle ABC = 60^\circ$, 再根据角之间的数量关系, 得出 $\angle ADH = \angle EDC$, 再根据“角边角”, 得出 $\triangle ADH \cong \triangle EDC$, 再根据全等三角形的性质, 得出 $AD = ED$, 再根据等边三角形的判定定理, 即可得出结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AB = AC$, $\angle BAC = \angle B = 60^\circ$,

$\because CN \parallel AB$,

$$\therefore \angle ACE = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle DAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle ACE \\ AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (ASA),$$

$$\therefore AD = AE,$$

$\therefore ADE$ 是等边三角形;

【小问 2 详解】

解: ①当点 D 在边 BC 上时,

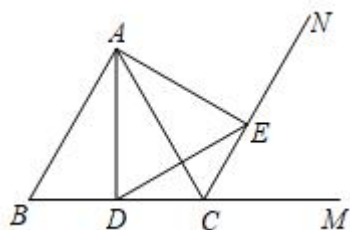
$$\therefore \angle DAC = 30^\circ, \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle BAD,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形, 边长为 11,

$$\therefore AB = BC = 11, CD = BD = \frac{1}{2}BC = \frac{11}{2};$$



②点 D 在边 BC 的延长线上时,

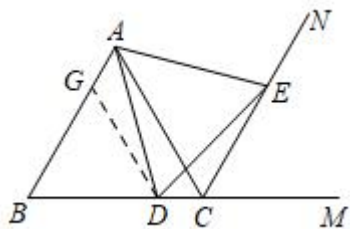
$$\therefore \angle DAC = 30^\circ, \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle DAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ - \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = 2AB = 22,$$

$$\therefore CD = BD - BC = 22 - 11 = 11,$$



②成立，理由如下：

如图，过 D 作 $DH \parallel AB$ 交 CA 的延长线于点 H ，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle BAC = \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$ ， $AB = BC = AC$ ，

$\because DH \parallel AB$ ，

$\therefore \angle ADH = \angle BAD$ ， $\angle H = \angle BAC = 60^\circ$ ， $\angle CDH = \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle H = \angle CDH = \angle ACB$ ，

$\therefore \triangle CDH$ 是等边三角形，

$\therefore DH = DC$ ，

$\because CN \parallel AB$ ，

$\therefore \angle DCE = \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\because \angle CDH = \angle ADE = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle ADH = \angle EDC$ ，

在 $\triangle ADH$ 和 $\triangle EDC$ 中，

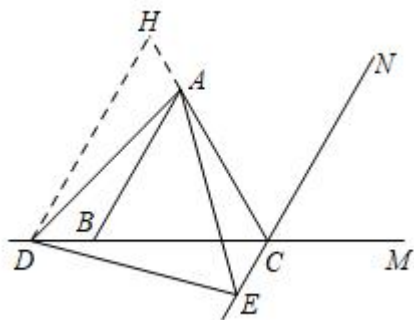
$$\begin{cases} \angle H = \angle DCE = 60^\circ \\ DH = DC \\ \angle ADH = \angle EDC \end{cases},$$

$\therefore \triangle ADH \cong \triangle EDC (ASA)$ ，

$\therefore AD = ED$ ，

又 $\because \angle ADE = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形.



【点睛】 本题考查了等边三角形的判定与性质、平行线的性质、全等三角形的判定与性质、含 30° 角的直角三角形的性质、三角形的外角的性质，解本题的关键在证明三角形全等和运用分类讨论思想.