

2023 学年度第一学期

八年级数学 12 月练习

一、选择题：(每题 4 分，共 24 分)

1. 下列根式中，最简二次根式是 ()

A. $\sqrt{x^2 - y^2}$ B. $\sqrt{\frac{x}{a}}$ C. $\sqrt{18x}$ D. $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了最简二次根式应满足的条件：①被开方数的因数是整数，因数是整式；②被开方数不含能开得尽方的因数或因式，掌握最简二次根式满足的条件是解题的关键。

【详解】解：A、 $\sqrt{x^2 - y^2}$ 是最简二次根数，故 A 符合题意；

B、 $\sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{\sqrt{ax}}{a}$ ，不是最简二次根式，故 B 不符合题意；

C、 $\sqrt{18x} = 3\sqrt{2x}$ ，不是最简二次根式，故 C 不符合题意；

D、 $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$ ，不是最简二次根式，故 D 不符合题意；

故选：A.

2. 一元二次方程 $x^2 - 2x - m = 0$ ，用配方法解该方程，配方后的方程为 ()

A. $(x - 1)^2 = m^2 + 1$ B. $(x - 1)^2 = m - 1$

C. $(x - 1)^2 = 1 - m$ D. $(x - 1)^2 = m + 1$

【答案】D

【解析】

【分析】按照配方法的步骤，移项，配方，配一次项系数一半的平方。

【详解】 $\because x^2 - 2x - m = 0$,

$$\therefore x^2 - 2x = m,$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 = m + 1,$$

$$\therefore (x - 1)^2 = m + 1.$$

故选 D.

【点睛】此题考查了配方法解一元二次方程，解题时要注意解题步骤的准确使用。

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边分别是 a 、 b 、 c . 下列条件中, 不能说明 $\triangle ABC$ 是直角三角形的是 ()

A. $\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$

B. $\angle C=\angle A-\angle B$

C. $b^2=a^2-c^2$

D. $a:b:c=5:12:13$

【答案】A

【解析】

【分析】根据直角三角形的定义, 三角形内角和定理, 只要证明有一个角等于 90° 即可得该三角形是直角三角形; 三条边满足勾股定理的逆定理的三角形是直角三角形.

【详解】解: A. $\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$, 假设 $\angle A=3a$, 则 $\angle A+\angle B+\angle C=3a+4a+5a=180^\circ$, 解得: $a=15^\circ$, 即: $\angle A=45^\circ$, $\angle B=60^\circ$, $\angle C=75^\circ$, 不能判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 本选项符合题意;

B. $\angle C=\angle A-\angle B$, 则 $\angle A+\angle B+\angle C=\angle A-\angle B+\angle B+\angle A=2\angle A=180^\circ$, $\therefore \angle A=90^\circ$, 能判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 本选项不符合题意;

C. $b^2=a^2-c^2$, 化简后得: $b^2+c^2=a^2$, 可以判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 本选项不符合题意;

D. $a:b:c=5:12:13$, 假设 $a=5k$, $b=12k$, $c=13k$, $\therefore a^2+b^2=25k^2+144k^2=169k^2=c^2$, $\therefore$ 可以判断 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 本选项不符合题意;

故选: A.

【点睛】本题考查直角三角形的判定, 可以利用直角三角形的定义, 三角形内角和定理, 勾股定理的逆定理; 关键是证明三角形中有一个角等于 90° , 即可判定为直角三角形.

4. 关于 x 的一元二次方程 $(2m-1)x^2+x+m^2-\frac{1}{4}=0$ 有一个根为 0, 则 m 的值是 ()

A. $\pm\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. 0

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了一元二次方程的定义以及方程解的定义, 一元二次方程的二次项系数不为 0.

根据一元二次方程 $(2m-1)x^2+x+m^2-\frac{1}{4}=0$ 有一个根为 0, 得到 $m^2-\frac{1}{4}=0$ 且 $2m-1\neq 0$, 即可解得答案.

【详解】解: 根据题意得: $m^2-\frac{1}{4}=0$ 且 $2m-1\neq 0$,

解得 $m = -\frac{1}{2}$.

故选: C.

5. 下列四个命题中假命题是 ()

- A. 两条直角边对应相等的两个直角三角形全等
- B. 以线段 AB 为底边的等腰三角形顶点的轨迹是线段 AB 的垂直平分线
- C. 三角形三个内角平分线的交点到三边的距离相等
- D. 等腰直角三角形斜边上的高等于斜边的一半

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据 SAS 即可判断 A; 根据线段垂直平分线的判定和等腰三角形的定义即可判断 B; 根据角平分线的性质即可判定 C; 根据三线合一定理和直角三角形的性质即可判定 D.

【详解】 解: A、两条直角边对应相等的两个直角三角形全等, 原命题是真命题, 不符合题意;

B、以线段 AB 为底边的等腰三角形顶点的轨迹是线段 AB 的垂直平分线, 但不包括线段 AB 的中点, 原命题是假命题, 符合题意;

C、三角形三个内角平分线的交点到三边的距离相等, 原命题是真命题, 不符合题意;

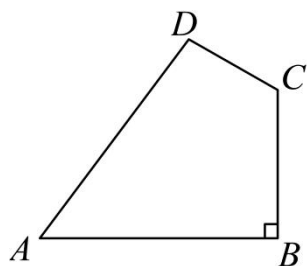
D、等腰直角三角形斜边上的高等于斜边的一半, 原命题是真命题, 不符合题意;

故选 B.

【点睛】 本题主要考查了判断命题真假, 线段垂直平分线的判定, 角平分线的性质, 三线合一定理, 直角三角形的性质, 全等三角形的判定等等, 灵活运用所学知识是解题的关键.

6. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = 20$, $BC = 15$, $CD = 7$, $DA = 24$, 且 $\angle B = 90^\circ$, 下列结论中:

① $\angle D = 90^\circ$; ② $\angle A + \angle C = 180^\circ$; ③ $\angle C = 120^\circ$; ④ $S_{\text{四边形}ABCD} = 204$. 其中正确的结论是 ()



A. ②

B. ①②

C. ①④

D. ①③④

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了勾股定理, 勾股定理的逆定理, 四边形内角和定理, 先根据勾股定理得到

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 625$ ，进而证明 $CD^2 + AD^2 = AC^2$ ，推出 $\triangle ACD$ 是直角三角形，且 $\angle D = 90^\circ$ ，由四边形内角和定理得到 $\angle BAD + \angle BCD = 360^\circ - \angle D - \angle B = 180^\circ$ ，再由 $S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}$ 得到 $S_{\text{四边形}ABCD} = 234$ ，据此可判断①②④；根据现有条件无法得到 $\angle C = 120^\circ$ ，即可判断③。

【详解】解：如图所示，连接 AC ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 20$ ， $BC = 15$ ，

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 = 20^2 + 15^2 = 625$ ，

$\therefore CD = 7$ ， $DA = 24$ ，

$\therefore CD^2 + AD^2 = 7^2 + 24^2 = 625$ ，

$\therefore CD^2 + AD^2 = AC^2$ ，

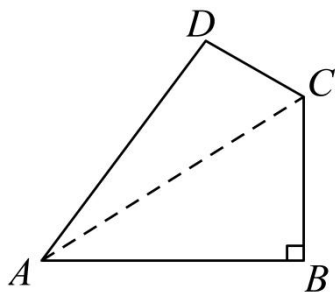
$\therefore \triangle ACD$ 是直角三角形，且 $\angle D = 90^\circ$ ，故①正确；

$\therefore \angle BAD + \angle BCD = 360^\circ - \angle D - \angle B = 180^\circ$ ，故②正确；

$S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times 15 \times 20 + \frac{1}{2} \times 7 \times 24 = 150 + 84 = 234$ ，故④错误；

根据现有条件无法得到 $\angle C = 120^\circ$ ，故③错误；

故选 B。



二、填空题：（每题 4 分，满分 48 分）

7. 二次根式 $\sqrt{x+3}$ 有意义的条件是_____

【答案】 $x \geq -3$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件可得 $x+3 \geq 0$ ，再解不等式即可。

【详解】解： $\therefore$ 要使 $\sqrt{x+3}$ 有意义，必须 $x+3 \geq 0$ ，

$\therefore x \geq -3$ ，

故答案为： $x \geq -3$ 。

【点睛】本题主要考查了二次根式有意义的条件，关键是掌握二次根式中的被开方数是非负数。

8. 当 $m \cdot n < 0$ 时, 化简: $\sqrt{m^2 n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-m\sqrt{n}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了化简二次根式, 先根据题意得到 $m < 0$, $n > 0$, 再根据二次根式的性质化简即可.

【详解】 解: $\because m \cdot n < 0$, 且 $\sqrt{m^2 n}$ 有意义,

$$\therefore m < 0, \quad n > 0,$$

$$\therefore \sqrt{m^2 n} = |m|\sqrt{n} = -m\sqrt{n},$$

故答案为: $-m\sqrt{n}$.

9. 一元二次方程 $4(x-2)^2 - 16 = 0$ 的根是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x_1 = 0, \quad x_2 = 4$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程, 先移项再化简, 然后利用开平方法可求得结果, 正确计算是解答本题的关键.

【详解】 解: $4(x-2)^2 - 16 = 0$,

$$\text{移项得: } 4(x-2)^2 = 16,$$

$$\text{化简得: } (x-2)^2 = 4,$$

$$\text{开方得: } x-2 = -2 \text{ 或 } x-2 = 2,$$

$$\text{解得: } x_1 = 0, \quad x_2 = 4,$$

故答案为: $x_1 = 0, \quad x_2 = 4$.

10. 已知 $m < 0$, 判断方程 $4x^2 - 5x + m = 0$ 的解的情况: $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 有两个不相等的实数根

【解析】

【分析】 此题考查一元二次方程根的情况与判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的关系: (1) $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; (2) $\Delta = 0$ 方程有两个相等的实数根; (3) $\Delta < 0$ 方程没有实数根.

先求一元二次方程的判别式, 由 Δ 与 0 的大小关系来判断方程根的情况.

【详解】 解: $\because a = 4, \quad b = -5, \quad c = m < 0$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 4 \times m = 25 - 16m > 0,$$

$\therefore$ 一元二次方程有两个不相等的实数根.

故答案为: 有两个不相等的实数根.

11. 若点 A 的坐标为 $(1, 2)$, 点 B 的坐标为 $(-3, 0)$, 则线段 AB 的长为_____.

【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了两点间距离公式, 解题的关键是熟练掌握点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

【详解】 解: $\because$ 点 A 的坐标为 $(1, 2)$, 点 B 的坐标为 $(-3, 0)$,

$$\therefore \text{线段 } AB \text{ 的长为 } \sqrt{(-3-1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{5}.$$

12. 命题“邻补角互补”的逆命题是: _____.

【答案】 如果两个角互补, 那么这两个是邻补角

【解析】

【分析】 把一个命题的条件和结论互换就得到它的逆命题.

【详解】 命题“邻补角互补”的条件是两个角是邻补角, 结论是它们互补, 故其逆命题是如果两个角互补, 那么这两个是邻补角,

故答案为: 如果两个角互补, 那么这两个是邻补角.

13. 在实数范围内分解因式: $3x^2 - 4x - 1 =$ _____.

【答案】 $3\left(x - \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了实数范围内因式分解, 用配方法、完全平方公式、平方差公式进行因式分解.

【详解】 解: $3x^2 - 4x - 1 = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) - 1$

$$= 3\left[x^2 - \frac{4}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] - 1 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= 3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{9}\right]$$

$$= 3 \left[\left(x - \frac{2}{3} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^2 \right]$$

$$= 3 \left(x - \frac{2+\sqrt{7}}{3} \right) \left(x - \frac{2-\sqrt{7}}{3} \right)$$

故答案为: $3 \left(x - \frac{2+\sqrt{7}}{3} \right) \left(x - \frac{2-\sqrt{7}}{3} \right)$.

14. 某超市一月份的营业额为 100 万元, 已知第一季度的总营业额为 700 万元, 如果每个月比上一个月的增长率都相同, 设这个增长率为 x , 那么列出的方程是_____.

【答案】 $100 + 100 \times (1+x) + 100 \times (1+x)^2 = 700$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的应用, 根据增长率为 x , 先得到二月份的营业额, 三月份的营业额, 再根据一月份的营业额 + 二月份的营业额 + 三月份的营业额列方程即可.

【详解】 解: $\because$ 一月份的营业额为 100 万元, 平均每月增长率为 x ,

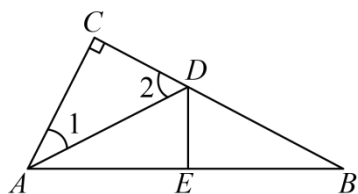
$\therefore$ 二月份的营业额为 $100 \times (1+x)$,

$\therefore$ 三月份的营业额为 $100 \times (1+x) \times (1+x) = 100 \times (1+x)^2$,

$\therefore$ 可列方程为 $100 + 100 \times (1+x) + 100 \times (1+x)^2 = 700$,

故答案为: $100 + 100 \times (1+x) + 100 \times (1+x)^2 = 700$.

15. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, DE 垂直平分 AB , 如果 $\angle 1 : \angle 2 = 2 : 3$, 那么 $\angle B =$ _____ 度.



【答案】 27

【解析】

【分析】 本题考查了线段垂直平分线的性质以及三角形外角的性质. 此题难度不大, 注意掌握数形结合思想与方程思想的应用.

设 $\angle 1 = 2x^\circ$, $\angle 2 = 3x^\circ$. 由 DE 垂直平分 AB , 可得 $AD = BD$, 即可得 $\angle DAB = \angle B$, 可求得 x 的值, 继而求得答案.

【详解】 $\because \angle 1 : \angle 2 = 2 : 3$,

$\therefore$ 设 $\angle 1 = 2x^\circ$, $\angle 2 = 3x^\circ$.

$\because DE$ 垂直平分 AB ,

$\therefore AD = BD$,

$\therefore \angle BAD = \angle B$.

$\because \angle 2 = \angle DAB + \angle B = 3x^\circ$,

$\therefore \angle DAB = \angle B = \frac{3}{2}x^\circ$.

$\because \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$,

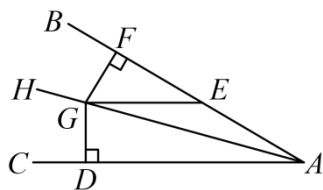
$\therefore 2x^\circ + 3x^\circ = 90^\circ$,

解得: $x = 18$,

$\therefore \angle B = \frac{3}{2}x^\circ = 27^\circ$.

故答案为: 27.

16. 已知: 如图, 点 G 为 AH 上一点, $GE \parallel AC$ 且交 AB 于点 E , $GD \perp AC$, $GF \perp AB$, 垂足分别为点 D 、 F , 如果 $GD = \frac{1}{2}GE$, $EF = \frac{\sqrt{3}}{2}GE$, 那么 $\angle DGA =$ _____ 度.



【答案】 75

【解析】

【分析】 本题考查了到角的两边距离相等的点在角的平分线上, 特殊角的三角函数值, 平行线的性质, 根据锐角三角函数求出 $\angle FEG = 30^\circ$, 再根据直角三角形 30° 角所对的直角边等于斜边的一半可得

$GF = \frac{1}{2}GE$, 然后根据到角的两边距离相等的点在角的平分线上判断出 AH 平分 $\angle BAC$, 然后求解即可.

【详解】 解: $\because EF = \frac{\sqrt{3}}{2}GE$,

$\therefore \cos \angle FEG = \frac{EF}{GE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \angle FEG = 30^\circ$,

$\because GE \parallel AC$,

$\therefore \angle BAC = 30^\circ$,

$$\therefore GF = \frac{1}{2}GE,$$

$$\text{又} \because GD = \frac{1}{2}GE, \quad GD \perp AC, \quad GF \perp AB,$$

$$\therefore GF = GD,$$

$$\therefore AH \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle CAH = \frac{1}{2} \times 30^\circ = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle DGA = 90^\circ - \angle CAH = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ.$$

故答案为：75.

17. 已知 a 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x - 11 = 0$ 的一个根，则 $\frac{a^2 - 11}{2a^3 - 3a^2 + 11}$ 的值等于_____.

【答案】 $\frac{1}{21}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程解的定义，根据一元二次方程的解是使方程左右两边相等的未知数的值得到 $a^2 - a - 11 = 0$ ，进而得到 $a^2 - a = 11$ ， $a^2 - 11 = a$ ，再把所求式子转化为

$$\frac{a}{2a(a^2 - a) - (a^2 - 11)}, \text{ 据此整体代入求解即可.}$$

【详解】 解： $\because a$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x - 11 = 0$ 的一个根，

$$\therefore a^2 - a - 11 = 0,$$

$$\therefore a^2 - a = 11, \quad a^2 - 11 = a,$$

$$\therefore \frac{a^2 - 11}{2a^3 - 3a^2 + 11}$$

$$= \frac{a}{(2a^3 - 2a^2) - (a^2 - 11)}$$

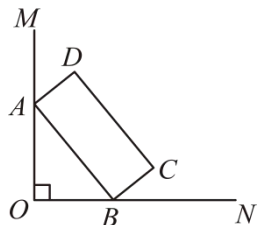
$$= \frac{a}{2a(a^2 - a) - (a^2 - 11)}$$

$$= \frac{a}{22a - a}$$

$$= \frac{1}{21},$$

故答案为: $\frac{1}{21}$.

18. 如图, $\angle MON = 90^\circ$, 矩形 $ABCD$ 的顶点 A 、 B 分别在边 OM 、 ON 上, 当 B 在边 ON 上运动时, A 随之在 OM 上运动, 矩形 $ABCD$ 的形状保持不变, 其中 $AB = 2$, $BC = 1$, 运动过程中, 点 D 到点 O 的最大距离为 _____.



【答案】 $\sqrt{2} + 1$

【解析】

【分析】取 AB 的中点 E , 连接 OD 、 OE 、 DE , 根据直角三角形斜边中线定理可得 $OE = AE = \frac{1}{2}AB = 1$, 利用勾股定理求出 DE , 根据三角形任意两边之和大于第三边可知当 OD 过点 E 时, 点 D 到点 O 的距离最大.

【详解】解: 如图, 取 AB 的中点 E , 连接 OD 、 OE 、 DE ,

$$\because \angle MON = 90^\circ, AB = 2$$

$$\therefore OE = AE = \frac{1}{2}AB = 1,$$

$$\because BC = 1, \text{ 四边形 } ABCD \text{ 是矩形},$$

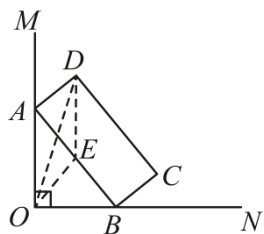
$$\therefore AD = BC = 1,$$

$$\therefore DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

根据三角形的三边关系, $OD \leq OE + DE$,

$$\therefore \text{当 } OD \text{ 过点 } E \text{ 时, 等号成立, } DO \text{ 的值最大, 最大值为 } \sqrt{2} + 1.$$

故答案为: $\sqrt{2} + 1$.



【点睛】本题考查矩形的性质、直角三角形斜边中线定理、三角形三边关系, 勾股定理的应用, 确定 OD 过点 E 时, 点 D 到点 O 的距离最大.

三、解答题: (共 78 分, 第 19、20 每题 6 分、21 每小题 6 分, 第 22、23、24、25、26 每题 8 分, 第 27 题 14 分)

19. 计算: $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + 2\sqrt{8} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^0 + \sqrt{\frac{1}{2}} \div \sqrt{2}$.

【答案】 $5\sqrt{2} + \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 先把各二次根式化为最简二次根式，然后根据二次根式的性质和零指数幂的意义进行计算，最后再进行加减运算即可.

【详解】
$$\begin{aligned} & \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + 2\sqrt{8} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^0 + \sqrt{\frac{1}{2}} \div \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} - 1 + 4\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2} \\ &= 5\sqrt{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了二次根式的计算：先把各二次根式化为最简二次根式，再进行二次根式的乘除运算，然后合并同类二次根式，同时也考查了零指数幂.

20. 已知: $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, 求代数式 $\frac{6x}{x^2+2x-8} + \frac{x}{x+4}$ 的值

【答案】 $\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，二次根式的性质，分式化简求值，先利用二次根式的性质进行化简、分式化简求值，然后代入计算即可，解题的关键是掌握运算法则进行解题.

【详解】 解: $\because x = \frac{1}{2+\sqrt{3}},$

$$\therefore x = \frac{(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3},$$

化简 $\frac{6x}{x^2+2x-8} + \frac{x}{x+4}$

$$= \frac{6x}{(x+4)(x-2)} + \frac{x(x-2)}{(x+4)(x-2)}$$

$$= \frac{6x+x^2-2x}{(x+4)(x-2)}$$

$$= \frac{x^2 + 4x}{(x+4)(x-2)}$$

$$= \frac{x(x+4)}{(x+4)(x-2)}$$

$$= \frac{x}{x-2},$$

将 $x = 2 - \sqrt{3}$ 代入 $\frac{x}{x-2}$ 得: $\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}-2} = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$.

21. 解方程:

$$(1) \quad x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$$

$$(2) \quad (x-5)^2 = 4x(5-x)$$

【答案】 (1) $x_1 = -\sqrt{3} + \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{3} - \sqrt{2}$

$$(2) \quad x_1 = 5, x_2 = 1$$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程;

(1) 根据配方法解一元二次方程, 即可求解;

(2) 根据因式分解法解一元二次方程, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$,

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 2,$$

$$\therefore (x + \sqrt{3})^2 = 2,$$

$$\therefore x + \sqrt{3} = \pm\sqrt{2},$$

解得: $x_1 = -\sqrt{3} + \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{3} - \sqrt{2}$;

【小问 2 详解】

解: $(x-5)^2 = 4x(5-x)$,

$$\therefore (x-5)^2 + 4x(x-5) = 0,$$

$$\therefore (x-5)(x-5+4x) = 0,$$

$$\therefore 5(x-5)(x-1)=0,$$

$$\therefore x-5=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

$$\text{解得: } x_1=5, x_2=1.$$

22. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2 + 2mx + m + 3 = 0$ 有实数根, 求 m 的取值范围.

【答案】 $m \leq \frac{3}{2}$ 且 $m \neq 1$

【解析】

【分析】 直接利用一元二次方程根的判别式、一元二次方程的定义求解即可得.

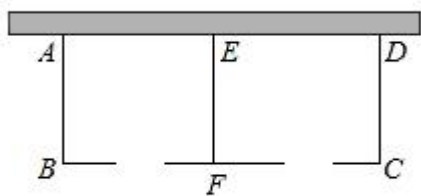
【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2 + 2mx + m + 3 = 0$ 有实数根,

$$\therefore \begin{cases} (2m)^2 - 4(m-1)(m+3) \geq 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } m \leq \frac{3}{2} \text{ 且 } m \neq 1.$$

【点睛】 本题考查了一元二次方程根的判别式和一元二次方程的定义, 熟练掌握一元二次方程根的判别式是解题关键.

23. 如图, 利用长 20 米的一段围墙, 用篱笆围一个长方形的场地, 中间用篱笆分割出 2 个小长方形, 与墙平行的一边上各开一扇宽为 1 米的门, 共用去篱笆 34 米, 为了使这个长方形 $ABCD$ 的面积为 96 平方米, 求 AB 、 BC 边各为多少米?



【答案】 AB 长为 8 米, BC 长为 12 米

【解析】

【分析】 设 AB 为 x 米, 则 BC 为 $(36 - 3x)$ 米, 然后根据题意可列出方程进行求解即可.

【详解】 解: 设 AB 为 x 米, 则 BC 为 $(36 - 3x)$ 米,

$$x(36 - 3x) = 96,$$

$$\text{解得: } x_1 = 4, x_2 = 8,$$

当 $x = 4$ 时,

$$36 - 3x = 24 > 20 \text{ (不合题意, 舍去),}$$

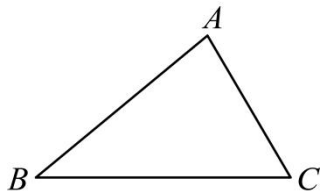
当 $x = 8$ 时,

$$36 - 3x = 12.$$

答: AB 的长为 8 米, BC 的长为 12 米.

【点睛】 本题主要考查一元二次方程的应用, 熟练掌握一元二次方程的应用是解题的关键.

24. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 $\angle BAC$ 的平分线上, 且点 D 到点 B 、 C 的距离相等



(1) 请在图中作出点 D 的位置 (保留作图痕迹);

(2) 过点 D 作 $DM \perp AB$ 于点 M , $DN \perp AC$, 交 AC 的延长线于点 N . 求证: $BM = CN$

【答案】 (1) 见详解 (2) 证明见详解

【解析】

【分析】 本题考查了角平分线的性质和线段垂直平分线的性质以及全等三角形的判定和性质:

(1) 根据题意先作角平分线, 然后再作线段的垂直平分线, 交点即为所求;

(2) 根据角平分线的性质可得角平分线上一点到两边距离相等, 垂直平分线上一点到线段两点的距离相等, 再根据两个三角形全等, 对应边相等, 即可得到结果.

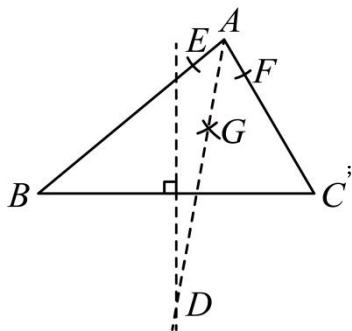
【小问 1 详解】

解: 以点 A 为圆心, 以适当长为半径画圆, 交 AB 和 AC 于点 E 和点 F ,

再分别以点 E 和点 F 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}EF$ 长为半径画圆, 两圆交点为一点 G , 连接 AG 并延长, 此时为 $\angle BAC$ 的平分线,

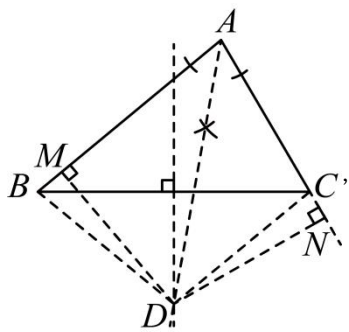
作 BC 的垂直平分线, 交 AG 的延长线于一点 D ,

此时点 D 即为所求, 如图所示:



【小问 2 详解】

证明: 由题可得如图所示:



由 (1) 可得 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线,

$\therefore DM \perp AB, DN \perp AC,$

$\therefore DM = DN,$

$\therefore$ 点 D 到点 B 、 C 的距离相等,

$\therefore DB = DC,$

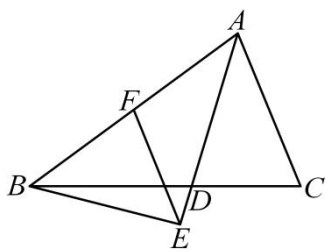
在 $Rt\triangle DMB$ 和 $Rt\triangle DNC$ 中,

$$\begin{cases} DM = DN \\ DB = DC \end{cases},$$

$\therefore Rt\triangle DMB \cong Rt\triangle DNC (HL),$

$\therefore BM = CN.$

25. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, 点 F 是 AB 的中点, $EF \parallel AC$, 交 AD 的延长线于点 E . 求证: $BE \perp AD$.



【答案】证明见解析

【解析】

【分析】本题考查平行线的性质、三角形内角和定理和角平分线的定义. 先证明 $\angle AEF = \angle FAE$ 得到 $AF = EF$, 再证明 $BF = EF$, 得到 $\angle FBE = \angle FEB$, 结合三角形内角和定理即可证明.

【详解】证明: $\because EF \parallel AC,$

$\therefore \angle CAE = \angle AEF,$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC,$

$\therefore \angle CAE = \angle FAE,$

$$\therefore \angle AEF = \angle FAE,$$

$$\therefore AF = EF,$$

$\because$ 点 F 是 AB 的中点,

$$\therefore AF = BF,$$

$$\therefore BF = EF,$$

$$\therefore \angle FBE = \angle FEB,$$

$$\because \angle EAF + \angle FBE + \angle BEA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF + \angle FBE + \angle BEF + \angle AEF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF + \angle AEF = 90^\circ = \angle AEB,$$

$$\therefore BE \perp AD.$$

26. 如图, 小明所在学校的旗杆 BD 高约为 13 米, 距离旗杆 20 米处刚好有一棵高约为 3 米的香樟树 AE . 活动课上, 小明有意在旗杆与香樟树之间的连线上来回踱步, 发现有一个位置 C 到旗杆顶部与树顶的距离相等. 请你求位置 C 与旗杆之间的距离.



【答案】 $1.12 - \sqrt{39}$ 米

【解析】

【详解】 试题分析:

设这个点为点 C , 连接 EC 、 DC , 则由题意可知 $EC=DC$, 再设 $AC=x$ 米, 则 $BC=(20-x)$ 米, 在两个直角三角形中, 由勾股定理分别表达出 CE^2 和 CD^2 , 就可列出方程解得 x 的值, 从而就可求出该位置与旗杆之间的距离.

试题解析:

根据题意可得: $AE=3\text{m}$, $AB=20\text{m}$, $BD=13\text{m}$.

如图, 设该位置为点 C , 且 $AC=x\text{m}$.

由 $AC=x\text{m}$ 得: $BC=(20-x)\text{m}$.

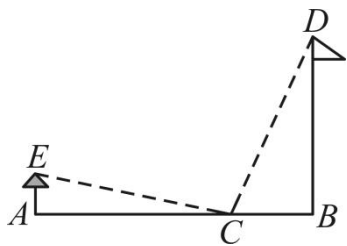
由题意得: $CE=CD$, 则 $CE^2=CD^2$.

$$\therefore 3^2 + x^2 = (20-x)^2 + 13^2, \text{ 解得: } x=14.$$

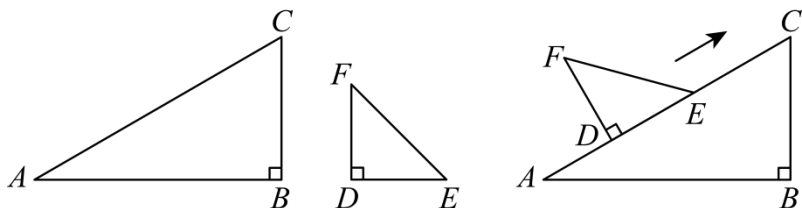
$$\therefore CB=20-x=6.$$

由 $0 < 14 < 20$ 可知, 该位置是存在的.

答: 该位置与旗杆之间的距离为 6 米.



27. 某同学在一次课外活动中用硬纸片做了两个直角三角形, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 6\text{cm}$. $\text{Rt}\triangle DEF$ 中, $\angle D = 90^\circ$, $\angle E = 45^\circ$, $DE = 4\text{cm}$. 该同学将 $\triangle DEF$ 的直角边 DE 与 $\triangle ABC$ 的斜边 AC 重合在一起, 并将 $\triangle DEF$ 沿 AC 方向移动, 在移动过程中, D 、 E 两点始终在 AC 边上.



- (1) 当 $\triangle DEF$ 移动至什么位置, 即 AD 的长为多少时, F 、 C 的连线与 AB 平行?
- (2) 当 $\triangle DEF$ 移动至什么位置, 即 AD 的长为多少时, 以线段 AD 、 FC 、 BC 的长为三边长的三角形是直角三角形?
- (3) 在 $\triangle DEF$ 的移动过程中, 是否存在某个位置, 使得 $\angle FCD = 15^\circ$? 如果存在, 求出 AD 的长; 如果不存在, 说明理由.

【答案】 (1) $12 - 4\sqrt{3}$

(2) $\frac{31}{6}$

(3) 不存在, 理由见解析.

【解析】

【分析】 本题主要考查平移的性质以及勾股定理的应用, 结合已知条件应用相关性质解题即可.

(1) 因为 $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 6$, 所以 $AC = 12$, 又因为 $\angle D = 90^\circ$, $\angle E = 45^\circ$, $DE = 4$, 所以 $DF = 4$, 连接 FC , 设 $FC \parallel AB$, 则可求证 $\angle FCD = \angle A = 30^\circ$, 故 AD 的长可求;

(2) 设 $AD = x$, 则 $FC^2 = DC^2 + FD^2 = (12 - x)^2 + 16$, 再分情况讨论: FC 为斜边; AD 为斜边; BC 为斜边, 综合分析即可求得 AD 的长;

(3) 假设 $\angle FCD = 15^\circ$, 因为 $\angle EFC = 30^\circ$, 作 $\angle EFC$ 的平分线, 交 AC 于点 P , 则 $\angle EFP = \angle CFP = 15^\circ$, $\angle DFE + \angle EFP = 60^\circ$ 所以 $PD = 4\sqrt{3}$, $PC = FP = 8$, 则 $PC + PD$ 的值大于边长 12, 故不存在.

【小问 1 详解】

解: $\because \text{Rt}\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$ $BC = 6$,

$$\therefore AC = 2BC = 12,$$

$\because \text{Rt}\triangle DEF$ 中, $\angle D = 90^\circ$, $\angle E = 45^\circ$, $DE = 4\text{cm}$

$$\therefore DF = 4,$$

如图 1, 连接 FC ,

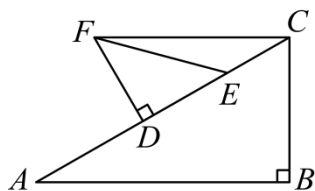


图1

当 $FC \parallel AB$ 时,

$$\angle FCD = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore FC = 2DF = 8$$

$$\therefore DC = \sqrt{FC^2 - FD^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore AD = AC - DC = 12 - 4\sqrt{3}$$

$\therefore$ 当 $AD = 12 - 4\sqrt{3}$ 时, $FC \parallel AB$.

【小问 2 详解】

设 $AD = x$, 在 $\text{Rt}\triangle FDC$ 中,

$$FC^2 = DC^2 + FD^2 = (12 - x)^2 + 16$$

当 FC 为斜边时,

$$\text{由 } AD^2 + BC^2 = FC^2 \text{ 得 } x^2 + 6^2 = (12 - x)^2 + 16,$$

$$\text{解得: } x = \frac{31}{6},$$

当 AD 为斜边时, 由 $FC^2 + BC^2 = AD^2$

$$\text{得 } (12 - x)^2 + 16 + 6^2 = x^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{49}{6}$$

$$\therefore DE = 4$$

$$\therefore AD = AC - DE = 12 - 4 = 8,$$

$$\therefore x = \frac{49}{6} > 8 \text{ (不合题意舍去)}$$

当 BC 为斜边时, 由 $AD^2 + FC^2 = BC^2$

$$\text{得, } x^2 + (12-x)^2 + 16 = 36,$$

$$\text{整理得出: } x^2 - 12x + 62 = 0.$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 144 - 4 \times 62 = 144 - 248 < 0$$

$\therefore$ 此方程无解,

综上所述: 当 $x = \frac{31}{6}$ 时, 以线段 AD 、 FC 、 BC 的长度为三边长的三角形是直角三角形.

【小问 3 详解】

不存在这样的位置, 使得 $\angle FCD = 15^\circ$

理由如下:

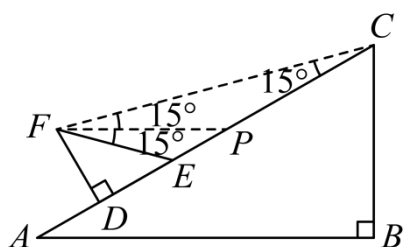


图2

假设 $\angle FCD = 15^\circ$ (如上图 2)

$$\therefore \angle EFC = 180^\circ - \angle D - \angle FCD - \angle DFE = 180^\circ - 90^\circ - 15^\circ - 45^\circ = 30^\circ$$

作 $\angle EFC$ 的平分线, 交 AC 于点 P ,

$$\text{则 } \angle EFP = \angle CFP = 15^\circ, \quad \angle DFE + \angle EFP = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FPD = 30^\circ,$$

$$\therefore FP = 2FD = 8$$

$$\therefore PD = \sqrt{FP^2 - FD^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3},$$

$$\text{又 } \therefore \angle CFP = \angle FCP = 15^\circ$$

$$\therefore PC = FP = 8,$$

$$\therefore PC + PD = 8 + 4\sqrt{3} > 12$$

$\therefore$ 不存在这样的位置, 使得 $\angle FCD = 15^\circ$.

【点睛】 本题考查的是平移的性质、勾股定理的应用, 以及角平分线的性质, 平行的性质等等知识点, 灵

活运用分情况讨论思想是解题的关键，解答时，注意勾股定理的应用和正确解出一元二次方程.