

2023 学年度第一学期八年级数学 10 月练习

满分：150 分 时间：100 分钟

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. 下列二次根式，不能与 $\sqrt{12}$ 合并的是（ ）

A. $2\sqrt{48}$

B. $3\sqrt{18}$

C. $4\sqrt{1\frac{1}{3}}$

D. $-\sqrt{75}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了同类二次根式的定义，根据化成最简式后，且被开方数相同，判定计算即可。

【详解】 $\because \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$,

$\therefore$ 被开方数是 3,

A. $2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}$ ，是同类二次根式，能合并，不符合题意；

B. $3\sqrt{18} = 9\sqrt{2}$ ，不是同类二次根式，不能合并，符合题意；

C. $4\sqrt{1\frac{1}{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ ，是同类二次根式，能合并，不符合题意；

D. $-\sqrt{75} = -5\sqrt{3}$ ，是同类二次根式，能合并，不符合题意；

故选：B.

2. 下列计算不正确的是（ ）

A. $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{10a} = 5\sqrt{2a}$

B. $\sqrt{2} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\sqrt{16a^4} = 4a^2$

D. $\sqrt{3a} - \sqrt{2a} = \sqrt{a}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查二次根式计算。根据题意逐一对选项进行计算即可得到本题答案。

【详解】解： $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{10a} = \sqrt{50a^2} = 5\sqrt{2a}$ ，故 A 选项正确；

$\sqrt{2} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，故 B 选项正确；

$\sqrt{16a^4} = 4a^2$ ，故 C 选项正确；

$\sqrt{3a} - \sqrt{2a}$ 无法计算，故 D 选项不正确，

故选：D.

3. 已知 $m = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ，下列各式为负值的是 ().

A. $\frac{1}{m}$

B. $2 - (\sqrt{3} + m)$

C. $m - 1$

D. $1 - \sqrt{3}m$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了分母有理化、二次根式的混合运算等知识点，掌握分母有理化的方法成为解题关键.

先对 $m = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ 分母有理化，然后再分别代入各选项计算判断即可.

【详解】解：∵ $m = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3} > 0$.

∴ A. $\frac{1}{m} = \frac{1}{\frac{1}{2+\sqrt{3}}} = 2+\sqrt{3} > 0$ ，不符合题意；

B. $2 - (\sqrt{3} + m) = 2 - (\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}) = 2 - 2 = 0$ ，不符合题意；

C. $m - 1 = 2 - \sqrt{3} - 1 = 1 - \sqrt{3} < 0$ ，符合题意；

D. $1 - \sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3} > 0$ ，不符合题意.

故选 C.

4. 下列四个命题中假命题是 ()

A. 顶角相等的两个等腰三角形全等

B. 两条直角边对应相等的两个直角三角形全等

C. 等腰三角形顶角的平分线把它分成两个全等三角形

D. 有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了三角形全等的判定、等腰三角形的性质、等边三角形的判定，熟练掌握三角形全等的判定是解题关键. 根据三角形全等的判定、等腰三角形的性质、等边三角形的判定逐项判断即可得.

- 【详解】解：A、顶角相等的两个等腰三角形不一定全等，则此项是假命题，符合题意；
- B、两条直角边对应相等的两个直角三角形全等（依据是SAS定理），则此项是真命题，不符合题意；
- C、等腰三角形顶角的平分线把它分成两个全等的三角形（依据是SAS定理），则此项是真命题，不符合题意；
- D、有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形，则此项是真命题，不符合题意；

故选：A.

5. 若 $\sqrt{x^3+4x^2} = -x\sqrt{x+4}$ ，则 x 的取值范围是（ ）

- A. $x \leq 0$ B. $x \geq -4$ C. $-4 \leq x \leq 0$ D. $x \leq -4$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质与化简，利用了二次根式的性质. 根据二次根式的被开方数是非负数，二次根式的值是非负数，可得答案.

【详解】解： $\because \sqrt{x^3+4x^2} = -x\sqrt{x+4}$ ；

$\therefore x \leq 0$ ， $x+4 \geq 0$ ；

解得： $-4 \leq x \leq 0$ ；

故选：C.

6. BP 和 CP 是 $\triangle ABC$ 两个外角的平分线，则 $\angle BPC$ 为（ ）

- A. $\frac{1}{2}\angle A$ B. $90 + \frac{1}{2}\angle A$ C. $90 - \frac{1}{2}\angle A$ D. $\angle A$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意作出图形，根据由三角形的内角和定理以及三角形外角的性质，求得 $\angle P$ 与 $\angle A$ 的关系，从而计算出 $\angle P$ 的度数.

【详解】解：如图， $\because$ BP、CP 是 $\triangle ABC$ 的外角平分线，

$\therefore \angle PBC = \frac{1}{2}(\angle A + \angle ACB)$ ， $\angle PCB = \frac{1}{2}(\angle A + \angle ABC)$ ，

又 $\because \angle PBC + \angle PCB + \angle P = 180^\circ$ ，

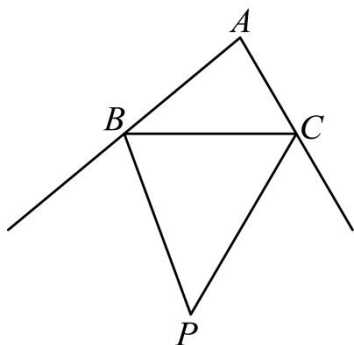
$\therefore \angle P = 180^\circ - (\angle PBC + \angle PCB)$

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle ACB + \angle A + \angle ABC)$

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180 + \angle A)$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A,$$

故选 C.



【点睛】 本题考查了三角形外角的性质以及三角形的内角和定理. 解决问题的关键是掌握: 三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $\sqrt{12} + \sqrt{\frac{1}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{7}{3}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的化简方法和运算法则进行计算.

【详解】 解: 原式 $= 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{7}{3}\sqrt{3},$

故答案为: $\frac{7}{3}\sqrt{3}.$

【点睛】 本题考查二次根式的计算, 在化简二次根式的基础上再把同类二次根式合并.

8. 若 $\sqrt{2x-4}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $x \geq 2$

【解析】

【分析】 若使二次根式在实数范围内有意义, 被开方数必须大于等于零, 由此可列出不等式, 求解即可.

【详解】 解: 若使 $\sqrt{2x-4}$ 在实数范围内有意义,

$$\therefore 2x-4 \geq 0,$$

解得 $x \geq 2,$

故答案为: $x \geq 2.$

【点睛】 本题考查了二次根式有意义的条件: 二次根式被开方数必须大于等于零.

9. 如果最简二次根式 $\sqrt{3a-1}$ 与 $\sqrt{14}$ 是同类二次根式, 那么 $a =$ _____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 此题主要考查了同类二次根式的定义, 即: 化成最简二次根式后, 被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式. 根据最简二次根式及同类二次根式的定义列方程求解.

【详解】 解: $\because$ 最简二次根式 $\sqrt{3a-1}$ 与 $\sqrt{14}$ 是同类二次根式,

$$\therefore 3a-1=14,$$

$$\text{解得: } a=5,$$

故答案为: 5.

10. 若 $x < 0$, 化简 $\sqrt{(x-2)^2} =$ _____.

【答案】 $2-x$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的性质, 掌握 $\sqrt{a^2} = \begin{cases} -a (a < 0) \\ a (a \geq 0) \end{cases}$ 成为解题的关键.

利用 $\sqrt{a^2} = \begin{cases} -a (a < 0) \\ a (a \geq 0) \end{cases}$ 进行解答即可.

【详解】 解: $\because x < 0$,

$$\therefore x-2 < 0,$$

$$\therefore \sqrt{(x-2)^2} = -(x-2) = 2-x.$$

故答案为: $2-x$.

11. 化简: $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$ _____.

【答案】 $\sqrt{x} + \sqrt{y}$

【解析】

【分析】 将分子用平方差公式因式分解, 再化简即可;

【详解】 解: 原式 $= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$

故答案为: $\sqrt{x} + \sqrt{y}.$

【点睛】 本题主要考查了二次根式的化简, 准确计算是解题的关键.

12. 解不等式: $x - \sqrt{3} < \sqrt{2}x$ 的解集是_____.

【答案】 $x > -\sqrt{3} - \sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查解不等式, 二次根式的运算.

根据解不等式的步骤求解, 最后将分母进行有理化, 即可解答.

【详解】 $x - \sqrt{3} < \sqrt{2}x$,

移项, 得: $x - \sqrt{2}x < \sqrt{3}$,

合并同类项, 得: $(1 - \sqrt{2})x < \sqrt{3}$,

系数化为 1, 得: $x > \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{2}}$,

即 $x > -\sqrt{3} - \sqrt{6}$.

故答案为: $x > -\sqrt{3} - \sqrt{6}$

13. 命题“等腰三角形的两个底角相等”的逆命题是_____.

【答案】 “两个角相等的三角形是等腰三角形”

【解析】

【分析】 逆命题就是原命题的题设和结论互换, 找到原命题的题设为等腰三角形, 结论为两个角相等, 互换即可.

【详解】 解: 命题“等腰三角形的两个底角相等”的逆命题是“两个角相等的三角形是等腰三角形”, 故答案为: “两个角相等的三角形是等腰三角形”.

【点睛】 本题考查逆命题的概念, 解决本题的关键是熟练掌握逆命题的概念, 知道题设和结论互换.

14. 平面内, 到点 A 的距离等于 2 的点的轨迹是_____.

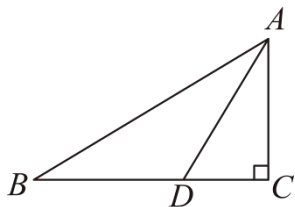
【答案】 以 A 为圆心, 2 为半径的圆

【解析】

【分析】 本题考查了圆的定义, 解题关键是掌握圆是平面内到一定点的距离等于定长的所有点的集合.

【详解】 解: 由圆的定义可知, 平面内到点 A 的距离等于 2 的点的轨迹是以 A 为圆心 2 为半径的圆, 故答案为: 以 A 为圆心, 2 为半径的圆.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$, $BC = 10\text{cm}$, $BD = 7\text{cm}$, 则点 D 到 AB 的距离是_____ cm.

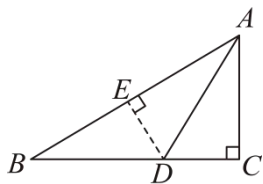


【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了角平分线的性质，熟练掌握角平分线的性质是解题关键．先求出 $CD = 3\text{cm}$ ，再根据角平分线的性质求解即可得．

【详解】 解：如图，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，



$\because BC = 10\text{cm}, BD = 7\text{cm},$

$\therefore CD = BC - BD = 3\text{cm},$

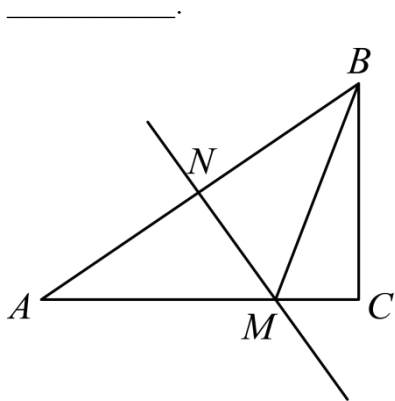
$\because AD$ 平分 $\angle BAC, \angle C = 90^\circ, DE \perp AB,$

$\therefore DE = CD = 3\text{cm},$

即点 D 到 AB 的距离是 $3\text{cm},$

故答案为： 3.

16. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $BC = 6, AC = 8, AB = 10, MN$ 是边 AB 的垂直平分线，则 $\triangle BMC$ 的周长是



【答案】 14

【解析】

【分析】 本题考查了线段的垂直平分线的性质，结合周长列式计算即可．

【详解】 $\because$ 线段 AB 的垂直平分线交 AC 于点 $M,$

$$\therefore AM = BM ;$$

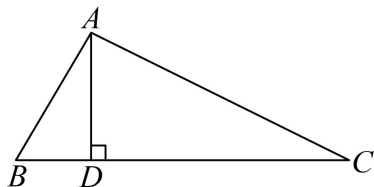
$$\because \triangle BMC \text{ 的周长是 } BC + BM + MC = BC + AM + MC = BC + AC ;$$

$$\because BC = 6, AC = 8, AB = 10 ;$$

$$\therefore BC + AC = 14 ;$$

故答案为：14.

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 135^\circ$ ， $AD \perp BC$ 于 D，且 $AB + BD = DC$ ，那么 $\angle C = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$.



【答案】15

【解析】

【分析】此题考查了全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质等知识，在 DC 上截取 $BD = DE$ ，连接 AE 构造出全等三角形，再利用全等三角形的对应边，对应角相等，三角形内角和等即可解题，正确作出辅助线是解题的关键.

【详解】解：在 DC 上截取 $BD = ED$ ，连接 AE

$$\because AD \perp BC$$

$$\angle ADB = \angle ADE = 90^\circ$$

$$\because AD = AD$$

$$BD = ED$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle ADE (SAS)$$

$$\therefore \angle B = \angle AED, AE = AB$$

$$\because AB + BD = DC, DE + EC = DC$$

$$\therefore AE = AB = EC$$

$$\therefore \angle AEB = 2\angle EAC = 2\angle C$$

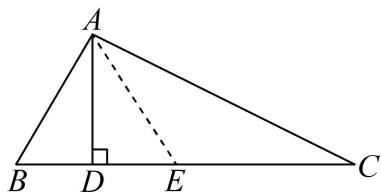
$$\therefore \angle B = 2\angle C$$

$$\because \angle BAC = 135^\circ, \angle B + \angle C + \angle BAC = 180^\circ$$

$$\therefore 3\angle C = 45^\circ$$

$$\therefore \angle C = 15^\circ$$

故答案为 15.



18. $\sqrt{8-a^2} + 8\sqrt{2} = (2\sqrt{2}-a)b$, 则 $a-b =$ _____.

【答案】 $-\frac{2\sqrt{34}}{17} - 4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式，算术平方根，不等式等知识．熟练掌握两个式子相等，对应部分相等，是解决问题的关键．

先去括号，根据含 $\sqrt{2}$ 部分对应相等，得到 $b=4$ ，根据剩余部分对应相等，得到 $a = -\frac{2\sqrt{34}}{17}$ ，即得．

【详解】 $\because \sqrt{8-a^2} + 8\sqrt{2} = (2\sqrt{2}-a)b$

$$\therefore \sqrt{8-a^2} + 8\sqrt{2} = 2b\sqrt{2} - ab,$$

$$\therefore 8\sqrt{2} = 2b\sqrt{2}, \quad \sqrt{8-a^2} = -ab,$$

$$\therefore b = 4,$$

$$\therefore \sqrt{8-a^2} = -4a,$$

$$\therefore 8 - a^2 = 16a^2,$$

$$\therefore a^2 = \frac{8}{17},$$

$$\because \sqrt{8-a^2} = -4a \geq 0,$$

$$\therefore a = -\frac{2\sqrt{34}}{17},$$

$$\because 8 - a^2 \geq 0,$$

$$\therefore -2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2},$$

$$\therefore a = -\frac{2\sqrt{34}}{17} \text{ 符合},$$

$$\therefore a - b = -\frac{2\sqrt{34}}{17} - 4$$

故答案为: $-\frac{2\sqrt{34}}{17}-4$.

三、解答题:

19. (1) 计算: $2\sqrt{25a}-3\sqrt{ab}-\left(\sqrt{36a}-2a\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$;

(2) 计算: $3\sqrt{\frac{12}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{xy}}\right)\div\frac{3}{4}\sqrt{\frac{18}{xy^3}}$;

(3) 计算: $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1}$;

(4) 解方程: $\frac{1}{2}(3-\sqrt{8}x)=1+\sqrt{18}x$;

(5) 计算: $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\frac{2}{3-\sqrt{5}}-\sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{5}{24}}+(\sqrt{3}-2)^0$.

【答案】(1) $4\sqrt{a}-\sqrt{ab}$; (2) $-\frac{2y\sqrt{2x}}{x}$; (3) $1-\sqrt{3}+\sqrt{2}$; (4) $x=\frac{\sqrt{2}}{16}$; (5) $\frac{1}{2}+\sqrt{5}$.

【解析】

【分析】(1) 利用二次根式的性质化简, 合并同类二次根式, 即得;

(2) 利用二次根式的性质, 二次根式的乘除法法则进行计算;

(3) 利用平方差公式, 负整数指数幂的法则, 分母有理化, 合并同类二次根式, 即得;

(4) 利用解一元一次方程的一般步骤去分母, 去括号, 移项合并同类项, 系数化成 1, 即得;

(5) 利用二次根式的性质, 分母有理化, 0 指数幂性质化简, 合并同类二次根式, 即得.

【详解】(1) $2\sqrt{25a}-3\sqrt{ab}-\left(\sqrt{36a}-2a\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$

$$=10\sqrt{a}-3\sqrt{ab}-6\sqrt{a}+2\sqrt{ab}$$

$$=4\sqrt{a}-\sqrt{ab};$$

(2) $3\sqrt{\frac{12}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{xy}}\right)\div\frac{3}{4}\sqrt{\frac{18}{xy^3}}$

$$=6\sqrt{\frac{3}{x}}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{xy}}\right)\div\frac{9}{4y}\sqrt{\frac{2}{xy}}$$

$$=-6\times\frac{1}{2}\times\frac{4y}{9}\sqrt{\frac{3}{x}\cdot\frac{3}{xy}\cdot\frac{xy}{2}}$$

$$= -\frac{4y}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2x}}{2x}$$

$$= -\frac{2y\sqrt{2x}}{x};$$

$$(3) (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1}$$

$$= 1^2 - (\sqrt{2})^2 - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$= 1 - 2 - \frac{1 \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$$

$$= 1 - 2 - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2}$$

$$= -1 - \sqrt{3} + \sqrt{2};$$

$$(4) \frac{1}{2}(3 - \sqrt{8}x) = 1 + \sqrt{18}x,$$

$$\text{去分母得, } 3 - 2\sqrt{2}x = 2(1 + 3\sqrt{2}x),$$

$$\text{去括号得, } 3 - 2\sqrt{2}x = 2 + 6\sqrt{2}x,$$

$$\text{移项得, } -2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}x = 2 - 3,$$

$$\text{合并同类项得, } -8\sqrt{2}x = -1,$$

$$\text{系数化成 1 得, } x = \frac{\sqrt{2}}{16};$$

$$(5) \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \frac{2}{3-\sqrt{5}} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{5}{24}} + (\sqrt{3}-2)^0$$

$$= |2-\sqrt{5}| + \frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} - \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} + 1$$

$$= \sqrt{5} - 2 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + 1$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{5}.$$

【点睛】 本题主要考查了二次根式的混合运算，解一元一次方程．熟练掌握二次根式的性质，二次根式混

合运算的顺序和各种运算的法则，分母有理化，0 指数幂性质，负整数幂性质，一元一次方程的解法，是解决问题的关键.

20. 先化简，再求值:

已知 $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ，求 $\frac{a^2-2a+1}{a-1} - \frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$ 的值.

【答案】 $a-1+\frac{1}{a}$, 3

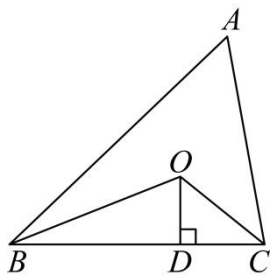
【解析】

【分析】 先化简得 $a-1+\frac{1}{a}$ ，再将 $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ 代入 $a-1+\frac{1}{a}$ 即可得.

【详解】 解：原式 $= \frac{(a-1)^2}{a-1} - \frac{\sqrt{(1-a)^2}}{a(a-1)}$
 $= a-1 - \frac{1-a}{a(a-1)}$
 $= a-1 + \frac{1}{a}$
 当 $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ 代入 $a-1+\frac{1}{a}$ 得： $\frac{1}{2+\sqrt{3}} - 1 + \frac{1}{\frac{1}{2+\sqrt{3}}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} - 1 + 2 + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} - 1 + 2 + \sqrt{3} = 3$.

【点睛】 本题考查了整式的化简求值，二次根式的混合运算，正确计算是解题的关键.

21. 如图，已知 $\triangle ABC$ 的周长是 21， OB ， OC 分别平分 $\angle ABC$ ， $\angle ACB$ ， $OD \perp BC$ 于点 D ，且 $OD = 3$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.



【答案】 $\frac{63}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了角平分线的性质定理，求三角形的面积，熟练掌握角平分线的性质定理及三角形面积的求解是解题的关键. 过点 O 分别作 $OE \perp AB$ 于点 E ， $OF \perp AC$ 于点 F ，根据角平分线性质的定理，可证明 $OD = OE = OF = 3$ ，根据 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC}$ ，可列出算式，并结合 $\triangle ABC$ 的周长求出面积.

【详解】如图，过点 O 分别作 $OE \perp AB$ 于点 E ， $OF \perp AC$ 于点 F ，

$\because OB$ 分别平分 $\angle ABC$ ， $OD \perp BC$ ，

$\therefore OD = OE = 3$ ，

同理 $OD = OF = 3$ ，

$\because \triangle ABC$ 的周长是 21，

$\therefore AB + BC + AC = 21$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC}$$

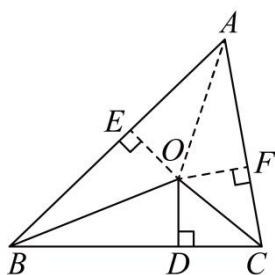
$$= \frac{1}{2} AB \cdot OE + \frac{1}{2} BC \cdot OD + \frac{1}{2} AC \cdot OF$$

$$= \frac{3}{2} AB + \frac{3}{2} BC + \frac{3}{2} AC$$

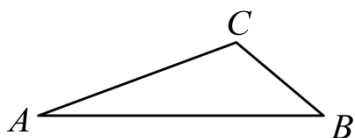
$$= \frac{3}{2} (AB + BC + AC)$$

$$= \frac{3}{2} \times 21$$

$$= \frac{63}{2}.$$



22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 20^\circ$ ， $\angle B = 40^\circ$ ， $BC = 3$ 。



(1) 在线段 AB 上求作一点 D ，使 $DA = DC$ （保留作图痕迹）；

(2) 在 (1) 的条件下，连接 CD ，求 AD 的长。

【答案】(1) 答案见解析

(2) 3

【解析】

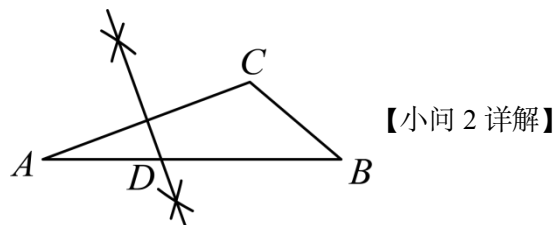
【分析】本题考查了用直尺和圆规作线段的垂直平分线，线段的垂直平分线的性质，等腰三角形的判断与性质，熟练掌握相关知识是解题的关键。

(1) 作线段 AC 的垂直平分线，交 AB 于点 D ，根据线段垂直平分线的性质，可知 $DA = DC$ ；

(2) 根据线段垂直平分线的性质, 可知 $DA = DC$, 故 $\angle A = \angle DCA = 20^\circ$, 因此 $\angle CDB = 40^\circ$, 根据等腰三角形的判定, 可得 $CD = BC = 3$, 从而可得答案.

【小问 1 详解】

如图, 点 D 就是所求的点;



由 (1) 的作法可知, DE 是边 AC 的垂直平分线,

$$\therefore AD = CD,$$

$$\therefore \angle A = \angle DCA = 20^\circ,$$

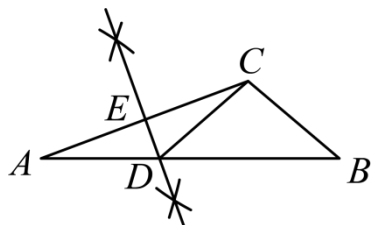
$$\therefore \angle CDB = 40^\circ,$$

$$\because \angle B = 40^\circ,$$

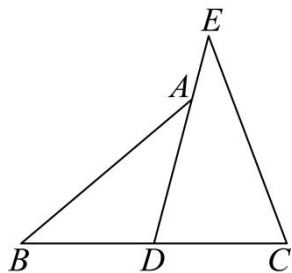
$$\therefore \angle B = \angle CDB,$$

$$\therefore CD = BC = 3,$$

$$\therefore AD = 3.$$



23. 如图, D 是 BC 上的一点, $BD = CD, \angle BAD = \angle CED$, 求证: $AB = EC$.



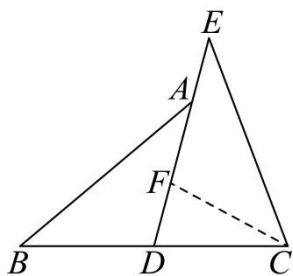
【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形的性质, 全等三角形的判定及性质, 正确作出辅助线是解题的关键.

在 DE 上取点 F , 连接 CF , 使得 $CF = CD$, 得到 $\angle CDF = \angle CFD$, 进而 $\angle BDA = \angle CFE$, 从而根据 “AAS” 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ECF$, 即可得证结论.

【详解】如图，在 DE 上取点 F ，连接 CF ，使得 $CF = CD$ ，



$$\therefore \angle CDF = \angle CFD,$$

$$\therefore 180^\circ - \angle CDF = 180^\circ - \angle CFD,$$

$$\text{即 } \angle BDA = \angle CFE,$$

$$\therefore BD = CD, \quad CD = CF,$$

$$\therefore BD = CF,$$

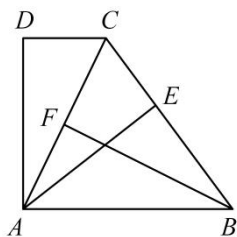
$\therefore$ 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECF$ 中

$$\begin{cases} \angle BAD = \angle CEF \\ \angle BDA = \angle CFE, \\ BD = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECF (\text{AAS}),$$

$$\therefore AB = EC.$$

24. 已知：如图， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $DC \parallel AB$ ， $BA = BC$ ， $AE \perp BC$ ，垂足为点 E ，点 F 为 AC 的中点.



(1) 求证： $\angle AFB = 90^\circ$ ；

(2) 求证： $\triangle ADC \cong \triangle AEC$ ；

(3) 连接 DE ，试判断 DE 与 BF 的位置关系，并证明.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 平行，证明见解析

【解析】

【分析】(1) 由 $BA = BC$ ， F 是 AC 的中点，根据等腰三角形的三线合一，可得 $BF \perp AC$ ，即可证得 $\angle AFB = 90^\circ$ ；

(2) 易证 $DC \parallel AB$ ，又由 $BA = BC$ ，根据等边对等角，证得 $\angle ECA = \angle CAB$ ，即可根据 AAS 证得 $\triangle ADC \cong \triangle AEC$ ；

(3) 首先设 DE 交 AC 于点 H ，由 $\triangle ADC \cong \triangle AEC$ ，即可得 $AD = AE$ ， $\angle DAH = \angle EAH$ ，根据等腰三角形的三线合一，则可证得 $BH \perp DE$ ，则可得 $\angle AFB = \angle AHE$ ，又由同位角相等，两直线平行，证得 $DE \parallel BF$ 。

【小问 1 详解】

$\because BA = BC$ ， F 是 AC 的中点，

$\therefore BF \perp AC$ 。

$\therefore \angle AFB = 90^\circ$ 。

【小问 2 详解】

$\because AE \perp BC$ ，

$\therefore \angle AEC = 90^\circ$ 。

$\because \angle ADC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ADC = \angle AEC$ 。

$\because DC \parallel AB$ ，

$\therefore \angle DCA = \angle CAB$ 。

$\because BA = BC$ ，

$\therefore \angle ECA = \angle CAB$ 。

$\therefore \angle DCA = \angle ECA$ 。

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle AEC$ 中，

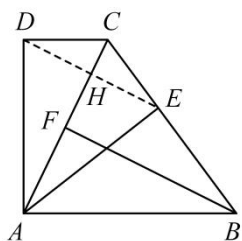
$$\begin{cases} \angle ADC = \angle AEC \\ \angle DCA = \angle ECA \\ AC = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle AEC$ 。

【小问 3 详解】

DE 与 BF 平行。

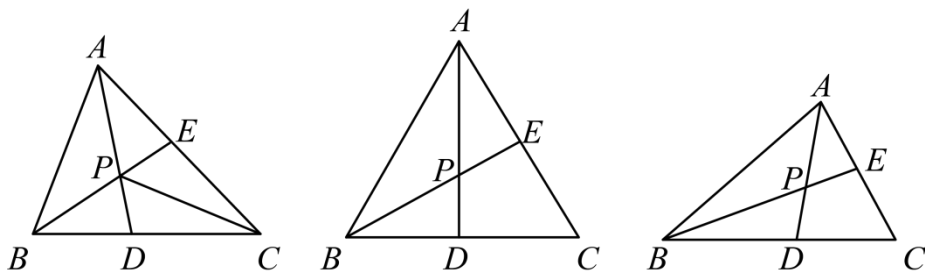
证明：如图，设 DE 交 AC 于点 H ，



$\because \triangle ADC \cong \triangle AEC$,
 $\therefore AD = AE, \angle DAH = \angle EAH$.
 $\therefore AH \perp DE$.
 $\therefore \angle AHE = 90^\circ$
 $\therefore \angle AFB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle AFB = \angle AHE$.
 $\therefore DE \parallel BF$.

【点睛】此题考查了等腰三角形的性质，平行线的判定与性质以及全等三角形的判定与性质. 此题综合性较强，难度适中，解题的关键是要注意数形结合思想的应用.

25. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB$ 和 $\angle CBA$ 的平分线 AD 、 BE 交于点 P ，连接 CP .



- (1) 求证: CP 平分 $\angle ACB$;
- (2) 当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时，求证: $EP = PD$;
- (3) 当 $\triangle ABC$ 不是等边三角形，且 $\angle ACB = 60^\circ$ 时，(2) 中的结论是否还成立？若成立，请加以证明，若不成立，说明理由.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 成立，理由见解析

【解析】

【分析】本题考查角平分线性质的判定，内角和定理，全等性质的判定，等边三角形性质.

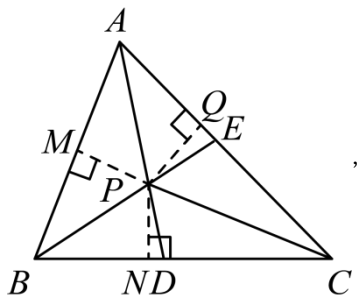
(1) 过点 P 作 $PM \perp AB$ ， $PN \perp BC$ ， $PQ \perp AC$ ，利用角平分线性质即可得到 $PM = PN$ ， $PM = PQ$ ，再利用角平分线判定即可得到本题答案；

(2) 作 $PH \perp AB$ 于 H ，利用等边三角形性质得 $PD \perp BC$ ， $PE \perp AC$ ，即可得到本题答案；

(3) 设 $\angle CAB < \angle CBA$ ，作 $PH \perp AC$ 于 H ， $PM \perp CB$ 于 M ， $PQ \perp AB$ 于 Q ，利用三角形内角和定理得 $\angle PAB + \angle PBA = 60^\circ$ ，再利用全等三角形判定及性质即可得到本题答案.

【小问 1 详解】

证明：过点 P 作 $PM \perp AB$ ， $PN \perp BC$ ， $PQ \perp AC$ ，垂足分别为 M, N, Q ，



$\therefore P$ 在 $\angle BAC$ 的平分线 AD 上,

$\therefore PM = PQ$,

$\therefore P$ 在 $\angle ABC$ 的平分线 BE 上,

$\therefore PM = PN$,

$\therefore PN = PQ$,

$\therefore$ 点 P 在 $\angle ACB$ 的平分线上,

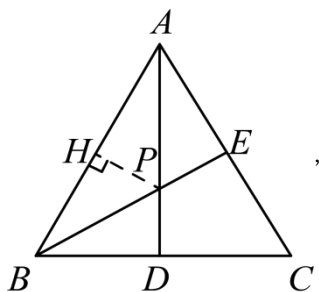
$\therefore CP$ 平分 $\angle ACB$;

【小问 2 详解】

证明: $\because \triangle ABC$ 为等边三角形, AD 平分 $\angle CAB$,

$\therefore PD \perp BC$, 同理 $PE \perp AC$,

作 $PH \perp AB$ 于 H ,



$\therefore AD$ 平分 $\angle CAB$, $PE \perp AC$,

$\therefore PE = PH$, 同理 $PD = PH$,

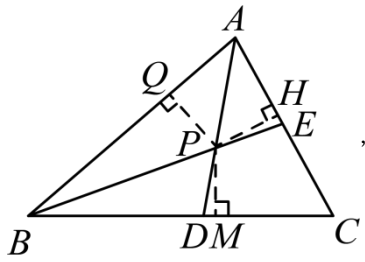
$\therefore PE = PD$,

$\therefore EP = DP$;

【小问 3 详解】

解: $EP = PD$ 成立, 理由如下:

设 $\angle CAB < \angle CBA$, 作 $PH \perp AC$ 于 H , $PM \perp CB$ 于 M , $PQ \perp AB$ 于 Q , 则点 H 在线段 CE 上, 点 M 在线段 BD 上,



$\because \angle CAB$ 和 $\angle ACB$ 的平分线 AD , BE 交于点 P ,

$\therefore PH = PQ = PM$,

$\because \angle ACB + \angle CAB + \angle ABC = 180^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$,

$\therefore \angle CAB + \angle ABC = 120^\circ$,

$\because AD$, BE 分别平分 $\angle CAB$, $\angle ABC$,

$\therefore \angle PAB + \angle PBA = 60^\circ$,

$\because \angle CEP = \angle CAP + \angle PAB + \angle PBA = \angle CAP + 60^\circ$,

$\angle ADB = \angle CAP + \angle ACD = \angle CAP + 60^\circ$,

$\therefore \angle CEP = \angle ADB$,

在 $\triangle PHE$ 和 $\triangle PMD$ 中,

$$\begin{cases} \angle HEP = \angle MDP \\ \angle EHP = \angle DMP, \\ PH = PM \end{cases}$$

$\therefore \triangle PHE \cong \triangle PMD$,

$\therefore EP = PD$.