

2023-2024 学年上海市宝山区杨行中学八年级（上）第二次月考

数学试卷

一、选择题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列二次根式中,与 $\sqrt{3a}$ 属同类二次根式的是()

A. $\sqrt{9a}$

B. $\sqrt{27a^2}$

C. $\sqrt{18ab^2}$

D. $\sqrt{27ab^2}$

【答案】D

【解析】

【分析】先化简，再根据同类二次根式的定义解答.

【详解】A. $\sqrt{9a}=3\sqrt{a}$ ，与 $\sqrt{3a}$ 的被开方数不同，则它们不是同类二次根式，故本选项错误；

B. $\sqrt{27a^2}=3|a|\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{3a}$ 的被开方数不同，则它们不是同类二次根式，故本选项错误；

C. $\sqrt{18ab^2}=3|b|\sqrt{2a}$ ，与 $\sqrt{3a}$ 的被开方数不同，则它们不是同类二次根式，故本选项错误；

D. $\sqrt{27ab^2}=3|b|\sqrt{3a}$ ，与 $\sqrt{3a}$ 的被开方数相同，则它们是同类二次根式，故本选项正确；

故选 D.

【点睛】此题主要考查了同类二次根式的定义，即：二次根式化成最简二次根式后，被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式.

2. 如果 $x=2$ 是方程 $\frac{1}{2}x^2+ax=-1$ 的根，那么 a 的值是()

A. 2

B. $-\frac{3}{2}$

C. -2

D. $\frac{3}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据方程的解的定义，将 $x=2$ 代入方程 $\frac{1}{2}x^2+ax=-1$ 并求解即可获得答案.

【详解】解：将 $x=2$ 代入方程 $\frac{1}{2}x^2+ax=-1$ ，

可得 $\frac{1}{2} \times 2^2 + 2a = -1$ ，

解得 $a = -\frac{3}{2}$.

故选：B.

【点睛】本题主要考查了方程的解以及解一元一次方程，解题关键是理解方程的解即为能使方程左右两边相等的未知数的值.

3. 下列命题中，假命题是（ ）

A. 垂直于同一条直线的两条直线平行

B. 等腰三角形的顶角平分线垂直平分底边

C. 有两角和一边对应相等的两个三角形全等

D. 有两边和其中一边上的中线对应相等的两个三角形全等

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查的是命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题. 判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理. 根据平行线的判定、等腰三角形的性质、三角形全等的判定定理判断即可.

【详解】解：A、在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行，故本选项命题是假命题，符合题意；

B、等腰三角形的顶角平分线垂直平分底边，是真命题，不符合题意；

C、有两角和一边对应相等的两个三角形全等，是真命题，不符合题意；

D、有两边和其中一边上的中线对应相等的两个三角形全等，是真命题，不符合题意；

故选：A.

4. 在平面直角坐标系中，反比例函数 $y = \frac{2-k}{x} (k < 0)$ 图象的两支分别在（ ）

A. 第一、三象限

B. 第一、二象限

C. 第二、四象限

D. 第三、四象限

【答案】A

【解析】

【分析】根据反比例函数的性质可得到正确的选项.

【详解】解：∵ $k < 0$,

∴ $-k > 0$,

∴ $2-k > 0$,

∴ 反比例函数 $y = \frac{2-k}{x} (k < 0)$ 的图象经过第一、三象限，

故选 A.

【点睛】本题考查了反比例函数的性质，确定 $2-k > 0$ 是解题的关键.

5. 已知某等腰三角形的周长为 36，腰长为 x ，底边长为 y ，那么 y 关于 x 的函数关系式及定义域是（ ）

$$A. x = \frac{36-y}{2} (9 < y < 18)$$

$$B. y = 36 - 2x (0 < x < 18)$$

$$C. y = \frac{36-x}{2} (0 < y < 18)$$

$$D. y = 36 - 2x (9 < x < 18)$$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的定义及三角形三边关系，列函数关系式，解不等式组，根据等腰三角形的定义得到 $2x + y = 36$ ，则 $y = 36 - 2x$ ，再由三角形三边的关系得到 $\begin{cases} 36 - 2x > 0 \\ x + x > y = 36 - 2x \end{cases}$ ，解得 $9 < x < 18$ ，据此可得答案.

【详解】解：由题意得， $2x + y = 36$ ，

$$\therefore y = 36 - 2x,$$

$\because$ 三角形中，两边之和大于第三边，

$$\therefore \begin{cases} 36 - 2x > 0 \\ x + x > y = 36 - 2x \end{cases}$$

$$\therefore 9 < x < 18.$$

故选：D.

6. 定义：若两个一元二次方程有且只有一个相同的实数根，我们就称这两个方程为“同伴方程”. 例如 $x^2 = 4$ 和 $(x-2)(x+3) = 0$ 有且仅有一个相同的实数根 $x = 2$. 所以这两个方程为“同伴方程”，若关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的参数同时满足 $a + b + c = 0$ 和 $a - b + c = 0$. 且该方程与 $(x+2)(x-n) = 0$ 互为“同伴方程”，则 n 的值为 ()

A. 1 或 -1

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】由 $a + b + c = 0$ 和 $a - b + c = 0$ 可得关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 两个实数根为 $x_1 = 1, x_2 = -1$ ，由 $(x+2)(x-n) = 0$ ，可得 $(x+2)(x-n) = 0$ 的根为 $x = -2$ 或 $x = n$ ，根据 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 与 $(x+2)(x-n) = 0$ 互为“同伴方程”，即得 $n = 1$ 或 $n = -1$. 掌握“同伴方程”的定义是解题的关键.

【详解】解： $\because$ 同时满足 $a + b + c = 0$ 和 $a - b + c = 0$,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 两个实数根为 $x_1 = 1, x_2 = -1$

$$\therefore (x+2)(x-n) = 0,$$

$$\therefore x+2=0 \text{ 或 } x-n=0,$$

$$\therefore (x+2)(x-n)=0 \text{ 的根为 } x=-2 \text{ 或 } x=n,$$

$$\therefore ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0) \text{ 与 } (x+2)(x-n)=0 \text{ 互为“同伴方程”},$$

$$\therefore n=1 \text{ 或 } n=-1.$$

故答案为: 1 或 -1.

二、填空题: 本题共 13 小题, 共 30 分.

7. 函数 $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \geq -3$ 且 $x \neq 1$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件, 分式有意义的条件, 列出不等式组, 解不等式组即可求解.

【详解】 解: 依题意,
$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases},$$

解得: $x \geq -3$ 且 $x \neq 1$,

故答案为: $x \geq -3$ 且 $x \neq 1$.

【点睛】 本题考查了求函数自变量的取值范围, 掌握二次根式有意义的条件, 分式有意义的条件是解题的关键.

8. 方程 $x(x+3) = 4(x+3)$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = -3, x_2 = 4$

【解析】

【分析】 先移项, 使方程右边为 0, 再提公因式 $(x+3)$, 然后根据“两式相乘值为 0, 这两式中至少有一式值为 0” 进行求解.

【详解】 解: 原方程可化为: $x(x+3) - 4(x+3) = 0$,

因式分解得: $(x+3)(x-4) = 0$,

所以 $x+3=0$ 或 $x-4=0$,

解得: $x_1 = -3$, $x_2 = 4$,

故答案为: $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解法. 解一元二次方程常用的方法有直接开平方法, 配方法, 公式法, 因式分解法, 要根据方程的特点灵活选用合适的方法. 本题运用的是因式分解法.

9. 在实数范围内分解因式 $2x^2 + 3x - 1 =$ _____.

【答案】 $2\left(x - \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}\right)$

【解析】

【分析】 先求出方程的两个根, 再因式分解.

【详解】 $\because 2x^2 + 3x - 1 = 0$ 的根为 $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$,

$$\therefore 2x^2 + 3x - 1 = 2\left(x - \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}\right).$$

故答案为: $2\left(x - \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}\right)$.

【点睛】 本题考查了因式分解, 正确计算方程的两个根是解题的关键.

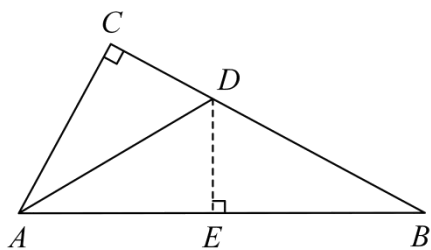
10. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle CAB$ 的平分线 AD 交 BC 于点 D , $BC = 8$, $BD = 5$, 那么 D 到 AB 的距离是_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据角平分线上的点到角两边的距离相等, 即可得解.

【详解】 解: 如图, 过点 D 作 $DE \perp AB$,



$$\therefore AD \text{ 平分 } \angle CAB, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore DE = CD,$$

$$\therefore BC = 8, BD = 5,$$

$$\therefore DE = CD = BC - BD = 3;$$

即: D 到 AB 的距离是 3.

故答案为: 3.

【点睛】 本题考查角平分线的性质, 熟练掌握角平分线上的点到角两边的距离相等, 是解题的关键.

11. 已知 $f(x) = \frac{6}{x}$, 那么 $f(\sqrt{2}) =$ _____.

【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 将 $x = \sqrt{2}$ 代入 $f(x) = \frac{6}{x}$, 进行求解即可.

【详解】 解: $f(\sqrt{2}) = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2};$

故答案为: $3\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查求函数值, 分母有理化. 正确的计算是解题的关键.

12. 某型号的手机原来每台售价 800 元, 经过两次降价, 且每次降价的百分率相同, 现在每台售价为 578 元, 则每次降价的百分率是_____.

【答案】 15%

【解析】

【分析】 设每次降价百分率为 x , 根据原来每台售价 800 元, 经过两次降价, 且每次降价的百分率相同, 现在每台售价为 578 元, 列方程即可.

【详解】 解: 设每次降价百分率为 x ,

由题意得: $800(1-x)^2 = 578,$

解得: $x_1 = 0.15 = 15\%, x_2 = 1.85$ (舍),

$\therefore$ 每次降价的百分率是 15%,

故答案为: 15%.

【点睛】 本题考查理一元二次方程的应用, 是个增长率问题, 根据两次降价前的结果, 和现在的价格, 列出方程是关键.

13. 已知: 点 $A(-2, y_1)$, $B(2, y_2)$, $C(3, y_3)$ 都在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上 ($k > 0$), 用 “ $<$ ” 表示 y_1 、

y_2 、 y_3 的大小关系是_____.

【答案】 $y_1 < y_3 < y_2$

【解析】

【分析】由 $k > 0$ ，可知反比例函数图象的两个分支分别位于第一、三象限，再根据反比例函数的性质进行判断即可.

【详解】解：∵反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中， $k > 0$ ，

∴函数图象的两个分支分别位于一、三象限，且在每一象限内 y 随 x 的增大而减小，

∵ $-2 < 0$ ，

∴点 $A(-2, y_1)$ 位于第三象限，

∴ $y_1 < 0$ ，

∵ $0 < 2 < 3$ ，

∴点 $B(2, y_2)$ ， $C(3, y_3)$ 位于第一象限，

∴ $y_2 > y_3 > 0$ ，

∴ $y_1 < y_3 < y_2$ ，

故答案为： $y_1 < y_3 < y_2$.

【点睛】本题考查反比例函数图象和性质，熟练掌握反比例函数图象上点的坐标特征是解题的关键.

14. 命题“等腰三角形两底角平分线相等”的逆命题是_____；它是_____命题（真、假）.

【答案】 ①. 在三角形中，若两个角的角平分线相等，那么这个三角形是等腰三角形 ②. 真

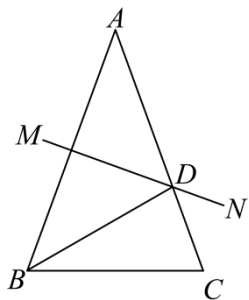
【解析】

【分析】本题考查了互逆命题的知识，两个命题中，如果第一个命题的条件是第二个命题的结论，而第一个命题的结论又是第二个命题的条件，那么这两个命题叫做互逆命题. 其中一个命题称为另一个命题的逆命题. 找出原命题中的题设和结论，进行互换即可得到其逆命题.

【详解】解：命题“等腰三角形两底角平分线相等”的逆命题是“在三角形中，若两个角的角平分线相等，那么这个三角形是等腰三角形”. 它是真命题.

故答案为：在三角形中，若两个角的角平分线相等，那么这个三角形是等腰三角形，真.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle A = 40^\circ$ ， AB 的垂直平分线 MN 交 AC 于点 D ，则 $\angle DBC =$ _____ $^\circ$.



【答案】 30

【解析】

【分析】 本题考查线段垂直平分线的性质、等腰三角形的性质，熟练掌握线段垂直平分线的性质和等腰三角形的性质是解答的关键.

【详解】 解: $\because AB$ 的垂直平分线 MN 交 AC 于点 D ,

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle A = 40^\circ,$$

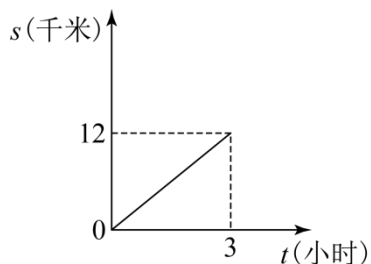
$$\because \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } AB = AC, \angle A = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ,$$

故答案为: 30.

16. 如图, 某人从甲地行走到乙地的路程 S (千米) 与时间 t (小时) 的函数关系如图所示, 那么此人行走 5 千米, 所用的时间是_____小时.



【答案】 1.25

【解析】

【分析】 根据速度=路程 $\div$ 时间求出行驶的速度, 再根据时间=路程 $\div$ 速度进行计算即可得解.

【详解】 解: 由图可知, 速度 $= 12 \div 3 = 4$ 千米/时,

所以, 行走 5 千米所用的时间 $= 5 \div 4 = 1.25$ 小时.

故答案为: 1.25.

【点睛】 本题考查了函数图象, 准确识图, 确定出路程和时间然后求出此人的速度是解题的关键.

17. 关于 x 的方程 $x^2 - k(x+1) + x = 0$ 有实数根, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】任意实数

【解析】

【分析】利用一元二次方程根的判别式求解即可.

【详解】解: 方程 $x^2 - k(x+1) + x = 0$ 整理得 $x^2 - (k-1)x - k = 0$,

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - k(x+1) + x = 0$ 有实数根,

$$\therefore \Delta = (k-1)^2 + 4k = (k+1)^2 \geq 0,$$

$\therefore k$ 的取值范围是任意实数,

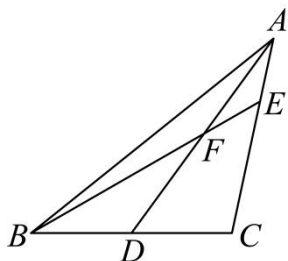
故答案为: 任意实数.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 若

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 则方程有两个不相等的实数根, 若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 则方程有两个相等的实数根, 若

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 则方程没有实数根.

18. 如图, 已知 AD 是 $\triangle ACB$ 的中线, 点 E 是 AC 上的一点, BE 交 AD 于 F , $AC = BF$, $\angle DAC = 24^\circ$, $\angle EBC = 30^\circ$, 则 $\angle ACB =$ _____

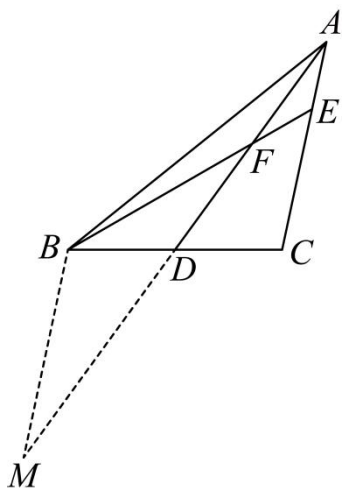


【答案】 102° ## 102 度

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质、等腰三角形的判定和性质等知识, 延长 AD 到 M , 使得 $DM = AD$, 连接 BM , 证 $\triangle BDM \cong \triangle CDA$ (SAS), 得 $BM = AC = BF$, $\angle M = \angle DAC = 24^\circ$, $\angle C = \angle DBM$, 再证 $\triangle BFM$ 是等腰三角形, 求出 $\angle MBF$ 的度数, 即可解决问题, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造全等三角形解决问题.

【详解】如图, 延长 AD 到 M , 使得 $DM = AD$, 连接 BM ,



在 $\triangle BDM$ 和 $\triangle CDA$ 中,

$$\begin{cases} DM = DA \\ \angle BDM = \angle CDA, \\ BD = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDM \cong \triangle CDA (\text{SAS}),$$

$$\therefore BM = AC,$$

$$\therefore \angle M = \angle DAC = 24^\circ, \quad \angle C = \angle DBM,$$

$$\because BF = AC,$$

$$\therefore BF = BM,$$

$$\therefore \angle M = \angle BFM = 24^\circ,$$

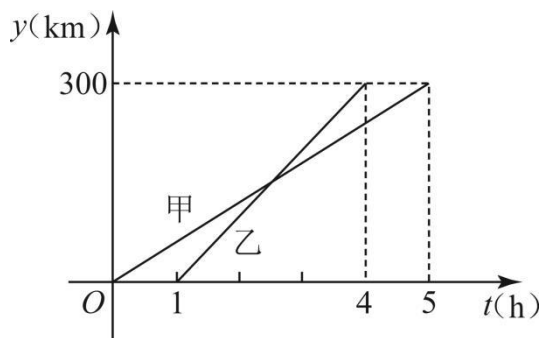
$$\therefore \angle MBF = 180^\circ - \angle M - \angle BFM = 132^\circ,$$

$$\because \angle EBC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DBM = \angle MBF - \angle EBC = 102^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DBM = 102^\circ.$$

19. 甲、乙两车从A城出发匀速行驶至B城,在整个行驶过程中,甲、乙两车离开A城的距离 y (千米)与甲车行驶的时间 t (小时)之间的函数关系如图所示,则:



(1) A, B两城相距_____千米;

- (2) 乙车速度为_____千米/小时;
(3) 乙车出发后_____小时追上甲车.

【答案】(1) 300

(2) 100

(3) 1.5

【解析】

【分析】(1) 根据函数图像中的数据, 可以解答本题;

(2) 根据函数图像中的数据, 可以求得乙车的速度;

(3) 先求出甲车速度, 再根据甲、乙两车行驶的路程相等列方程求解即可.

【小问1详解】

解: 由图像可得, A, B 两城两城相距 300 千米.

故答案为: 300;

【小问2详解】

由图像可得, 乙车从 A 城出发匀速行驶至 B 城所需的时间为: $4-1=3$ (小时),

$\therefore$ 乙车的速度为: $300 \div 3 = 100$ (千米/小时).

故答案为: 100;

【小问3详解】

由图像可得, 甲车从 A 城出发匀速行驶至 B 城所需的时间为 5 小时,

$\therefore$ 甲车的速度为: $300 \div 5 = 60$ (千米/小时),

设乙车出发后 a 小时追上甲车,

$$\therefore 60(a+1) = 100a,$$

解得: $a = 1.5$,

即乙车出发后 1.5 小时追上甲车.

故答案为: 1.5.

【点睛】本题考查一次函数和一元一次方程的应用, 解题的关键是明确题意, 利用数形结合的思想解答.

三、解答题: 本题共 7 小题, 共 52 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

20. 计算: $\sqrt{18} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 4\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$.

【答案】 $-5 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】直接利用二次根式的乘除运算法则化简，先算乘除，再利用二次根式的加减运算法则计算得出答案.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \sqrt{18} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 4\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} \\ &= 3\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{4} - |\sqrt{3}-2| \\ &= 3\sqrt{2} - 3 - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2 + \sqrt{3} \\ &= -5 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算：先把二次根式化为最简二次根式，然后进行二次根式的乘除运算，再合并即可．在二次根式的混合运算中，如能结合题目特点，灵活运用二次根式的性质，选择恰当的解题途径，往往能事半功倍．

21. 用配方法解方程： $2x^2 + 4x + 1 = 0$.

$$\text{【答案】 } x_1 = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$$

【解析】

【分析】本题考查解一元二次方程—配方法，将常数项移到方程的右边，将二次项系数化为 1，两边都加上一次项系数一半的平方配成完全平方式后，再开方即可得解.

$$\text{【详解】解: } 2x^2 + 4x + 1 = 0,$$

$$\text{原方程化为 } x^2 + 2x = -\frac{1}{2},$$

$$\text{配方得 } x^2 + 2x + 1 = 1 - \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } (x+1)^2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{开方得 } x+1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}.$$

22. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 方程的其中的一个根为 -1 , 求方程的另一个根.

【答案】(1) $k < \frac{5}{4}$

(2) 方程的另一个根为 0

【解析】

【分析】(1) 依题意, 因为 $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 即 $\Delta > 0$, 即可列式作答;

(2) 把 $x = -1$ 代入 $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$, 求得 k 的值, 再把 k 的值代入 $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$ 中, 即可解出方程的另一个根.

【小问 1 详解】

解: 依题意, 因为 $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (2k-1)^2 - 4 \times 1 \times (k^2 - 1) = 4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 4 = -4k + 5 > 0,$$

$$\text{解得 } k < \frac{5}{4},$$

【小问 2 详解】

解: 依题意, 把 $x = -1$ 代入 $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$,

$$\text{解得 } (-1)^2 + (2k-1) \times (-1) + k^2 - 1 = 1 - 2k + 1 + k^2 - 1 = (k-1)^2 = 0,$$

$$\text{解得 } k = 1,$$

$$\text{把 } k = 1 \text{ 代入 } x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0,$$

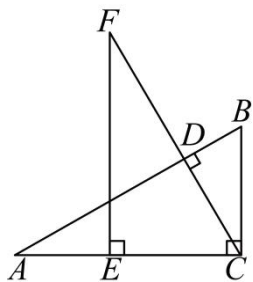
$$\text{得 } x^2 + x = x(x+1) = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 0, \quad x_2 = -1,$$

所以方程的另一个根为 0 .

【点睛】本题考查了一元二次方程的根与系数的关系, 涉及到根据一元二次方程根的情况求参数, 正确掌握当方程有两个不相等的实数根时, 即 $\Delta > 0$ 是解题的关键.

23. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于点 D , 点 E 在 AC 上. $CE = BC$, 过点 E 作 AC 的垂线, 交 CD 的延长线于点 F , 求证 $AB = FC$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】由已知说明 $\angle A = \angle F$ ， $\angle FEC = \angle ACB$ ，再结合 $EC = BC$ 证明 $\triangle FEC \cong \triangle ACB$ ，利用全等三角形的性质即可证明。

【详解】证明： $\because EF \perp AC$ ，

$$\therefore \angle FEC = 90^\circ = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle F + \angle FCE = 90^\circ.$$

$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle FCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle F = \angle A.$$

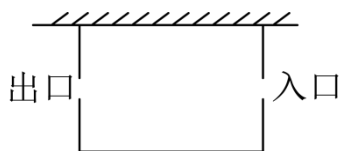
在 $\triangle FEC$ 和 $\triangle ACB$ 中

$$\begin{cases} \angle FEC = \angle ACB \\ \angle F = \angle A \\ CE = BC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle FEC \cong \triangle ACB \text{ (AAS)},$$

$$\therefore FC = AB.$$

24. 某单位组织员工前往南京保利大剧院欣赏表演. 表演前, 主办方工作人员准备利用 26 米长的墙为一边, 用 48 米隔栏绳为另三边, 设立一个面积为 300 平方米的长方形等候区, 如图, 为了方便群众进出, 在两边空出两个各为 1 米的出入口 (出入口不用隔栏绳). 那么围成的这个长方形的边长是多少米呢?



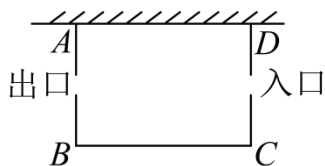
【答案】长方形等候区的边 AB 为 15 米, BC 为 20 米

【解析】

【分析】如图: 设长方形等候区的边 AB 为 x 米, 则 $BC = (48 - 2x + 2)$ 米, 然后再根据“设立一个面积为

300 平方米的长方形等候区”列一元二次方程即可解答.

【详解】解：如图：设长方形等候区的边 AB 为 x 米，则 $BC = (48 - 2x + 2)$ 米，



由题意得： $x(48 - 2x + 2) = 300$,

整理，得 $x^2 - 25x + 150 = 0$,

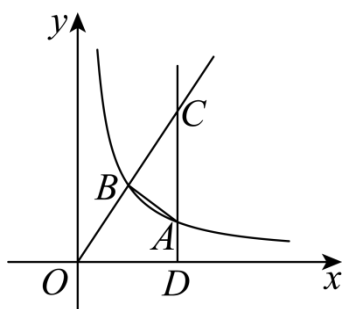
解得 $x_1 = 10$, $x_2 = 15$,

当 $x = 10$ 时， $BC = 30 > 26$, 不合题意，应舍去；当 $x = 15$ 时， $BC = 20 < 26$, 符合题意.

答：长方形等候区的边 AB 为 15 米， BC 为 20 米.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程的应用，正确理解题意、正确表示出长方形的长和宽、列出一元二次方程是解答本题的关键.

25. 如图，已知正比例函数 $y = kx$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{6}{x} (x > 0)$ 的图象经过点 $B(a, 3)$ ，点 D 为 x 轴正半轴上一点，过点 D 作 $CD \perp x$ 轴，交反比例函数的图象于点 A ，交正比例函数的图象于点 C ， $CD = 6$.



(1) 求 a 、 k 的值

(2) 连接 AB ，求 $\triangle ABC$ 的面积

(3) P 为射线 OC 上一点，若 $\triangle PAC$ 的面积为 9，求点 P 的坐标

【答案】 (1) $a = 2, k = 1.5$

(2) $\frac{9}{2}$

(3) $(0, 0)$ 或 $(8, 12)$

【解析】

【分析】 本题考查正比例函数和反比例函数的图形性质，解题的关键是利用函数的解析式求出点坐标.

(1) 先根据反比例函数的图象求出 a ，在根据点 B 的坐标求出 k 的值即可；

(2) 过点 B 作 $BE \perp CD$ ，垂足为 E ，先根据正比例函数的图象求出点 C 的坐标，再根据点 C 和点 A 的横坐标相等和点 A 在反比例函数的图象上求出点 A 的坐标，即可求出 AC 和 BE 的长度，即可求出三角形的面积；

(3) 过点 P 作 $PF \perp AC$ ，垂足为 F ，根据三角形的面积求出 PF 的值，根据两种情况展开讨论，结合正比例函数的图象就可求出点 P 的坐标.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 点 $B(a, 3)$ 在反比例函数 $y = \frac{6}{x} (x > 0)$ 的图象上，

$$\therefore 3 = \frac{6}{a},$$

$$\therefore a = 2,$$

$$\therefore B(2, 3),$$

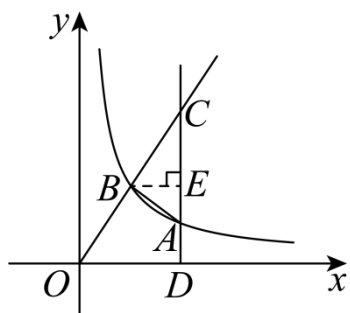
$\because$ 点 B 在正比例函数 $y = kx$ 的图象上，

$$\therefore 3 = 2k,$$

$$\therefore k = 1.5;$$

【小问 2 详解】

解： 过点 B 作 $BE \perp CD$ ，垂足为 E ，



设点 $C(m, 6)$ ， $A(m, n)$ ，

$\because$ 正比例函数为 $y = \frac{3}{2}x$ ，

$$\therefore 6 = \frac{3}{2}m,$$

$$\therefore m = 4,$$

$$\therefore A(4, n),$$

$$\therefore n = \frac{6}{4} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore A\left(4, \frac{3}{2}\right), E(4, 3),$$

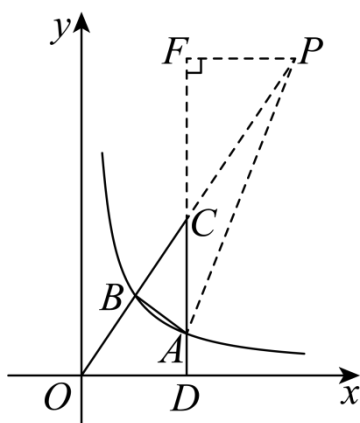
$$\therefore AC = CD - AD = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}, \quad BE = 4 - 2 = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot 2 = \frac{9}{2};$$

【小问3详解】

解：如下图所示，过点 P 作 $PF \perp AC$ ，垂足为 F ，设 $P(m, n)$ ，

$$\therefore S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2} AC \cdot PF = 9,$$



$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot PF = 9,$$

$$\therefore PF = 4,$$

当 P 在 C 点上方时，

$$\therefore P \text{ 的横坐标为 } m = OD + PF = 4 + 4 = 8,$$

$$\therefore n = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12,$$

$$\therefore P(8, 12),$$

当 P 在 C 点下方时，

$$\therefore P \text{ 的横坐标为 } m = OD - PF = 4 - 4 = 0,$$

$$\therefore n = \frac{3}{2} \cdot 0 = 0,$$

$$\therefore P(0, 0),$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (0, 0) \text{ 或 } (8, 12).$$

26. 如图1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 120^\circ$ ， $\angle C = 20^\circ$ ， BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D 。

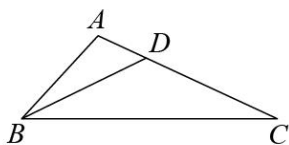


图1

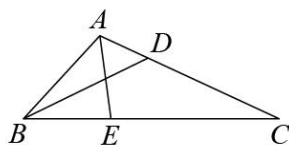


图2

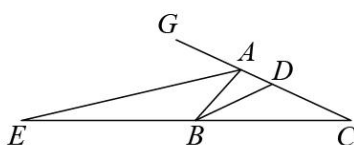


图3

(1) 求证: $BD=CD$.

(2) 如图 2, 若 $\angle BAC$ 的角平分线 AE 交 BC 于点 E , 求证: $AB+BE=AC$.

(3) 如图 3, 若 $\angle BAC$ 的外角平分线 AE 交 CB 的延长线于点 E , 则 (2) 中的结论是否成立? 若成立, 给出证明, 若不成立, 写出正确的结论.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 不成立, 正确的结论是 $BE-AB=AC$, 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据三角形内角和可得 $\angle ABC = 40^\circ$, 利用角平分线得出 $\angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 20^\circ$, 由等角对等边即可证明;

(2) 过点 E 作 $EF \parallel BD$ 交 AC 于点 F , 根据平行线的性质可得 $\angle FEC = \angle DBC = 20^\circ$, 由等量代换、外角的性质及等角对等边可得 $\angle AFE = 40^\circ$, $FE = FC$, 依据全等三角形的判定和性质可得 $\triangle ABE \cong \triangle AFE$, $BE = EF$, $AB = AF$, 结合图形, 由线段间的数量关系进行等量代换即可证明;

(3) (2) 中的结论不成立, 正确的结论是 $BE - AB = AC$. 过点 A 作 $AF \parallel BD$ 交 BE 于点 F , 由平行线的性质及等量代换可得 $\angle AFC = \angle C = 20^\circ$, 根据等角对等边得出 $AF = AC$, 由角平分线可得 $\angle EAB = 30^\circ$, 结合图形根据各角之间的数量关系得出 $\angle E = \angle FAE = 10^\circ$, 由等角对等边可得 $FE = AF$, 结合图形进行线段间的等量代换即可得出结果.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle A = 120^\circ$, $\angle C = 20^\circ$,

$\therefore \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ - 20^\circ = 40^\circ$,

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

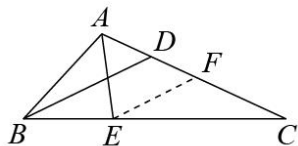
$\therefore \angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 20^\circ$,

$\therefore \angle DBC = \angle C = 20^\circ$,

$\therefore BD = CD$;

【小问 2 详解】

证明: 如图: 过点 E 作 $EF \parallel BD$ 交 AC 于点 F ,



$$\therefore \angle FEC = \angle DBC = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle FEC = \angle C = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = 40^\circ, \quad FE = FC,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle ABC,$$

$\therefore AE$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$$\therefore \angle BAE = \angle FAE,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle AFE$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle FAE \\ \angle ABE = \angle AFE, \\ AE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AFE,$$

$$\therefore BE = EF, \quad AB = AF,$$

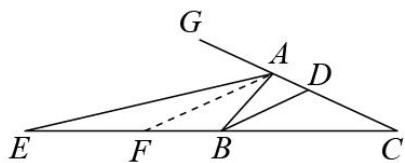
$$\therefore BE = EF = FC,$$

$$\therefore AB + BE = AF + FC = AC;$$

【小问 3 详解】

解: (2) 中的结论不成立, 正确的结论是 $BE - AB = AC$. 理由如下:

如图, 过点 A 作 $AF \parallel BD$ 交 BE 于点 F ,



$$\therefore \angle AFC = \angle DBC = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle AFC = \angle C = 20^\circ,$$

$$\therefore AF = AC,$$

$\therefore AE$ 是 $\angle BAC$ 的外角平分线,

$$\therefore \angle EAB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle E = \angle ABC - \angle EAB = 10^\circ,$$

$$\therefore \angle E = \angle FAE = 10^\circ,$$

$$\therefore FE = AF,$$

$$\therefore FE = AF = AC,$$

$$\therefore BE - AB = BE - BF = EF = AC.$$

【点睛】 题目主要考查等腰三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，利用角平分线进行角度的计算，平行线的性质，三角形内角和定理等，理解题意，作出相应辅助线，综合运用这些知识点是解题关键.