

八年级第一学期第三阶段质量调研数学试卷

(时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、单项选择题 (本大题共 6 小题, 每题 2 分, 共 12 分)

1. 已知 $a > 0$, 那么 $\sqrt{-\frac{4a}{b}}$ 可化简为 ()

- A. $2b\sqrt{-ab}$ B. $-\frac{2}{b}\sqrt{ab}$ C. $-\frac{2}{b}\sqrt{-ab}$ D. $\frac{2}{b}\sqrt{-ab}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件得到 $\frac{-4a}{b} \geq 0$, 而 $a > 0$, 则 $b < 0$, 根据二次根式的性质得到原式

$$= \sqrt{\frac{4}{b^2}} \cdot \sqrt{-ab} = -\frac{2\sqrt{-ab}}{b}.$$

【详解】解: $\because \frac{-4a}{b} \geq 0$,

而 $a > 0$,

$\therefore b < 0$,

$$\therefore \text{原式} = \sqrt{\frac{4}{b^2}} \cdot \sqrt{-ab} = -\frac{2\sqrt{-ab}}{b}.$$

故选: C.

【点睛】本题考查了二次根式的性质与化简、二次根式有意义的条件, 解题的关键是掌握 $\sqrt{a^2} = |a|$.

2. 下列方程中, 是一元二次方程有 ()

- A. $4x^2 = 3y$ B. $x(x+1) = 5x^2 - 1$
C. $\sqrt{x} - 3 = 5x^2 - \sqrt{6}$ D. $\frac{1}{x^2} + 3x - 1 = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程, 其基本形式为 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$. 根据一元二次方程的定义逐项分析判断即可.

【详解】解: A. $4x^2 = 3y$, 含有两个未知数, 不是一元二次方程, 不符合题意;

B. $x(x+1) = 5x^2 - 1$, 整理可得 $4x^2 - x - 1 = 0$, 是一元二次方程, 符合题意;

C. $\sqrt{x}-3=5x^2-\sqrt{6}$ ，不是一元二次方程，不符合题意；

D. $\frac{1}{x^2}+3x-1=0$ ，不是整式方程，故不是一元二次方程，不符合题意.

故选：B.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程的知识，理解并掌握一元二次方程的定义是解题关键.

3. 下列问题中，两个变量成反比例的是（ ）

A. 商一定时（不为零），被除数与除数；

B. 等腰三角形周长一定时，它的腰长与它底边的长；

C. 一个因数（不为零）不变时，另一个因数与它们的积；

D. 货物的总价 A 一定时，货物的单价 a 与货物的数量 x .

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数，正确区分正比例函数与反比例函数是解题关键. 判断一个函数是否是反比例函数，首先看看两个变量是否具有反比例关系. 两种相关联的量，一种量变化，另一种量也随着变化，如果这两种量相对应的两个数的比值（也就是商）一定，这两种量就叫做成正比例的量，它们的关系叫做正比例关系，两种相关联的量，一种量变化，另一种量也随着变化，如果这两种量相对应的两个数的积一定，这两种量就叫做成反比例的量，它们的关系叫做反比例关系. 根据定义分析即可.

【详解】 解：A、商一定时（不为零），被除数和除数成正比例关系，故 A 错误；

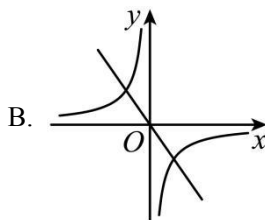
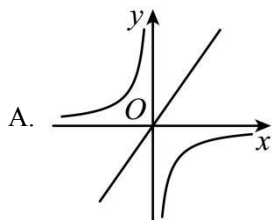
B、等腰三角形周长一定时，它的腰长与它底边的长成一次函数关系；故 B 错误；

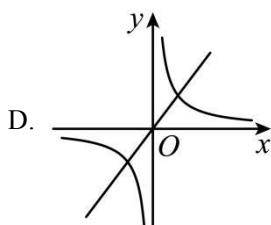
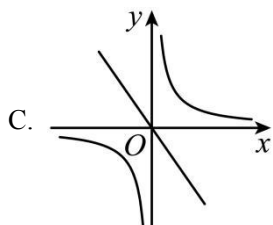
C、一个因数（不为零）不变时，另一个因数与它们的积成正比例关系；故 C 错误；

D、货物的总价 A 一定时，货物的单价 a 与货物的数量 x 成反比例关系；故 D 正确.

故选 D

4. 已知函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，那么它和函数 $y = kx (k \neq 0)$ 在同一直角坐标平面内的大致图象是（ ）





【答案】B

【解析】

【分析】先根据反比例函数图象的性质判断出 k 的范围，再确定其所在象限，进而确定正比例函数图象所在象限即可解答.

【详解】解：∵ 函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，

∴ $k < 0$,

∴ 双曲线在第二、四象限，函数 $y = kx$ 的图象经过第二、四象限，

∴ B 选项满足题意

故选：B.

【点睛】本题主要考查了反比例函数图象的性质与正比例函数图象的性质，掌握 k 对正比例函数和反比例函数图象的影响成为解答本题的关键.

5. 下列条件不能判定两个直角三角形全等的是 ()

A. 一个锐角和这个锐角的对应边相等

B. 两直角边对应相等

C. 一直角边和斜边对应相等

D. 一个锐角和一条直角边分别相等

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定；

根据全等三角形的判定定理 AAS，SAS，HL，ASA 逐项判断即可.

【详解】解：A. 一个锐角和这个锐角的对应边相等，可根据 AAS 得出两个直角三角形全等；

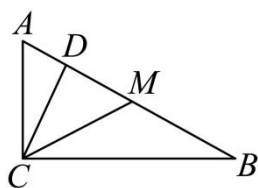
B. 两直角边对应相等，可根据 SAS 得出两个直角三角形全等；

C. 一直角边和斜边对应相等，可根据 HL 得出两个直角三角形全等；

D. 一个锐角和一条直角边分别相等，不能说明锐角和直角边对应相等，不能满足判定三角形全等的条件 AAS 或 ASA，故不能判定两个直角三角形全等；

故选：D.

6. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，如果 CD 、 CM 分别是斜边上的高和中线，那么下列结论中正确的是（ ）



- A. $\angle B = 30^\circ$ B. $AD = DM$ C. $\angle ACD = \angle MCD$ D. $\angle ACD = \angle MCB$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形的高和中线，直角三角形斜边中线的性质，等边对等角；根据同角的余角相等，直角三角形斜边中线的性质证明 $\angle ACD = \angle B = \angle MCB$ 即可得出答案.

【详解】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， CD 、 CM 分别是斜边上的高和中线，
 $\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ$ ， $\angle A + \angle ACD = 90^\circ$ ， $AM = BM = CM$ ，
 $\therefore \angle ACD = \angle B$ ， $\angle MCB = \angle B$ ，
 $\therefore \angle ACD = \angle B = \angle MCB$ ，

无法得出 $\angle B = 30^\circ$ ， $AD = DM$ ， $\angle ACD = \angle MCD$ ，

$\therefore$ A、B、C 错误，D 正确；

故选：D.

二、填空题（本大题共有 12 题，每题 3 分，满分 36 分）

7. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2+3x}}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x > -\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】本题考查函数自变量的取值范围，二次根式有意义的条件和分母不为零；根据二次根式有意义被开方数非负和分母不为零列式求解即可.

【详解】解：由函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2+3x}}$ 可得： $2+3x > 0$ ，

解得： $x > -\frac{2}{3}$ ，

故答案为: $x > -\frac{2}{3}$.

8. 方程 $5x^2 - 4x = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程;

利用因式分解法解一元二次方程即可.

【详解】 解: 对方程 $5x^2 - 4x = 0$ 因式分解得: $x(5x - 4) = 0$,

$\therefore x = 0$ 或 $5x - 4 = 0$,

$\therefore x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{5}$,

故答案为: $x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{5}$.

9. 某件商品原价为 800 元, 经过两次促销降价后的价格为 578 元, 如果连续两次降价的百分率相同, 那么这件商品降价的百分率是_____.

【答案】 15%

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的降低率问题, 熟练掌握解题模型 $a(1-x)^2 = b$ 是解题的关键. 设每次降价的百分率为 x , 用含有 x 的代数式表示两次降价后的售价, 与已知变化后的售价是相等的, 从而列方程求解即可.

【详解】 解: 设商品每次降价的百分率为 x ,

根据题意, 得 $800(1-x)^2 = 578$,

解得 $x_1 = 0.15 = 15\%$, $x_2 = 1.85$ (不合题意, 舍去).

答: 这件商品每次降价的百分率是 15%.

故答案为: 15%

10. 在实数范围内分解因式: $2x^2 + 4x - 3 =$ _____.

【答案】 $2\left(x + \frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right)\left(x + \frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)$

【解析】

【分析】令 $2x^2 + 4x - 3 = 0$, 先利用公式法求解一元二次方程的根, 再分解因式即可.

【详解】解: 令 $2x^2 + 4x - 3 = 0$,

$$\therefore a = 2, b = 4, c = -3,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 2 \times (-3) = 40 > 0,$$

$$\therefore x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{10}}{4} = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}, x_2 = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore 2x^2 + 4x - 3 = 2\left(x - \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}\right)\left(x - \frac{-2 - \sqrt{10}}{2}\right)$$

$$= 2\left(x + \frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right)\left(x + \frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)$$

$$\text{故答案为: } 2\left(x + \frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right)\left(x + \frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)$$

【点睛】本题考查的是在实数范围内分解因式, 利用公式法解一元二次方程, 掌握“利用公式法求解一元二次方程的根, 再把代数式分解因式”是解本题的关键.

11. 已知函数 $f(x) = \frac{2-x}{1-x}$, 则 $f(\sqrt{2}) =$ _____.

【答案】 $-\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】将 $\sqrt{2}$ 代入解析式中即可求出 $f(\sqrt{2})$ 的值.

【详解】解: $f(\sqrt{2}) = \frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{1-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

故答案为: $-\sqrt{2}$.

【点睛】此题考查的是已知自变量的值求函数值, 解决此题的关键将自变量的值代入解析式中即可.

12. 已知关于 x 的方程 $(m+1)x^2 + 2x = 1$, 方程有两个不相等的实数根, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > -2$ 且 $m \neq -1$

【解析】

【分析】根据一元二次方程根的判别式和根的概念列出不等式进行求解即可.

【详解】解：原方程变形为 $(m+1)x^2 + 2x - 1 = 0$,

根据题意, 得 $2^2 - 4 \times (-1) \times (m+1) > 0$ 且 $m+1 \neq 0$,

解得 $m > -2$ 且 $m \neq -1$.

故答案为: $m > -2$ 且 $m \neq -1$.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的概念和根的判别式, 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系: 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根, 反之也成立.

13. 正比例函数 $y = \left(1 - \frac{a}{4}\right)x$ 的图像经过第一、三象限, 那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < 4$

【解析】

【分析】本题考查了正比例函数的图像与系数的关系;

根据正比例函数 $y = kx$ 的图像经过第一、三象限时 $k > 0$ 列式解答即可.

【详解】解: $\because$ 正比例函数 $y = \left(1 - \frac{a}{4}\right)x$ 的图像经过第一、三象限,

$$\therefore 1 - \frac{a}{4} > 0,$$

解得: $a < 4$,

故答案为: $a < 4$.

14. 经过点 A 且半径为 1 厘米的圆的圆心的轨迹是_____.

【答案】 以 A 为圆心, 1 厘米为半径的圆

【解析】

【分析】圆的定义即可解决问题.

【详解】解: 经过点 A 且半径为 1 厘米的圆的圆心的轨迹是以 A 为圆心, 1 厘米为半径的圆.

故答案为以 A 为圆心, 1 厘米为半径的圆

【点睛】考查轨迹, 圆的定义等知识, 解题的关键是理解题意, 灵活运用所学知识解决问题.

15. 命题“等腰三角形的两个底角相等”的逆命题是_____.

【答案】 “两个角相等的三角形是等腰三角形”

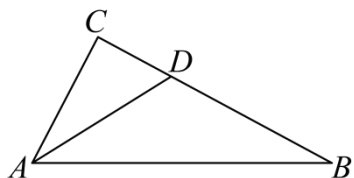
【解析】

【分析】逆命题就是原命题的题设和结论互换，找到原命题的题设为等腰三角形，结论为两个角相等，互换即可。

【详解】解：命题“等腰三角形的两个底角相等”的逆命题是“两个角相等的三角形是等腰三角形”，故答案为：“两个角相等的三角形是等腰三角形”。

【点睛】本题考查逆命题的概念，解决本题的关键是熟练掌握逆命题的概念，知道题设和结论互换。

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle CAB$ 的平分线 AD 交 BC 于点 D ， $\angle B = 30^\circ$ ， $BD = 5$ ，那么点 D 到 AB 的距离等于_____。



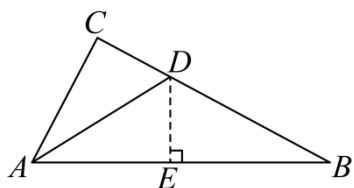
【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了含 30° 直角三角形的性质；

过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ，根据 30° 所对的直角边等于斜边的一半可得答案。

【详解】解：过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ，



$$\because \angle B = 30^\circ, \quad BD = 5,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BD = \frac{5}{2},$$

即点 D 到 AB 的距离等于 $\frac{5}{2}$ ，

故答案为： $\frac{5}{2}$ 。

17. 如果点 A 的坐标为 $(-1, 4)$ ，点 B 的坐标为 $(-4, -2)$ ，那么线段 AB 的长等于_____。

【答案】 $3\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查了勾股定理的应用；

根据两点间距离公式直接代入计算即可。

【详解】解： $\because$ 点 A 的坐标为 $(-1, 4)$ ，点 B 的坐标为 $(-4, -2)$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{(-1+4)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5},$$

故答案为: $3\sqrt{5}$.

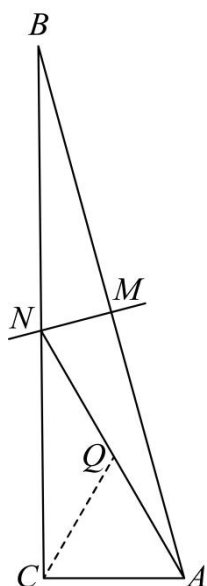
18. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 将这个三角形折叠, 使点 B 与点 A 重合, 折痕交边 AB 于点 M , 交直线 BC 于点 N , 如果 $BN = 2AC$, 那么 $\angle B =$ _____ 度.

【答案】 15

【解析】

【分析】 本题考查了折叠的性质: 折叠前后两图形全等, 即得到对应角相等, 对应线段相等. 也考查了含 30° 度的直角三角形三边的关系. 根据折叠的性质得到 $\angle BAN = \angle B$, $NA = NB$, 求出 $\angle ANC = 60^\circ$, 再利用三角形的外角定理得 $\angle ANC = 2\angle B$, 从而可得到结论.

【详解】 解: 如图,



$\therefore$ 将这个三角形折叠, 使点 B 与点 A 重合, 折痕交 AB 于点 M , 交 BC 于点 N ,

$\therefore \angle BAN = \angle B$, $NA = NB$,

$\therefore BN = 2AC$,

$\therefore AN = 2AC$,

取 AN 的中点 Q ,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore CQ = NQ = AQ = \frac{1}{2}AN$

$\therefore AQ = CQ = AC$,

$\therefore \angle NAC = 60^\circ$,

$$\therefore \angle ANC = 30^\circ,$$

$$\because \angle B + \angle BAN = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 15^\circ.$$

故答案为：15.

三、简答题（本大题共有 4 题，每小题 6 分，满分 24 分）

19. 计算： $\sqrt{12} - \left(3\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{0.5} \right) - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}.$

【答案】 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算；

先利用二次根式的性质化简，进行化简以及分母有理化，再根据二次根式的加减运算法则进行计算.

【详解】 解：原式 $= 2\sqrt{3} - \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$

$$= 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

20. 用配方法解方程： $3x^2 + 6x - 1 = 0$

【答案】 $x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$

【解析】

【分析】 先将二次项系数化为 1，然后根据配方法，可即答案.

【详解】 解： $x^2 + 2x - \frac{1}{3} = 0$

$$x^2 + 2x + 1 = 1 + \frac{1}{3}$$

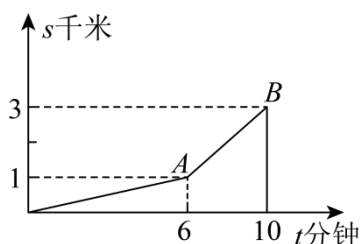
$$(x+1)^2 = \frac{4}{3}$$

$$x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$$

故答案为 $x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$

【点睛】本题考查了配方法解一元二次方程，解题时要注意解题步骤的准确应用．选择用配方法解一元二次方程时，最好使方程的二次项的系数为1，一次项的系数是2的倍数．

21. 小强骑车从家到学校要经过一段先上坡后下坡的路，在这段路上小强骑车的距离 s (千米)与骑车的时间 t (分钟)之间的函数关系如图所示，请根据图中信息回答下列问题：



- (1) 小强去学校时下坡路长____千米；
- (2) 小强下坡的速度为____千米/分钟；
- (3) 若小强回家时按原路返回，且上坡的速度不变，下坡的速度也不变，那么回家骑车走这段路的时间是____分钟．

【答案】(1) 2 (2) 0.5 (3) 14

【解析】

【分析】(1) 根据题意和函数图象可以得到下坡路的长度；

(2) 根据函数图象中的数据可以求的小强下坡的速度；

(3) 根据题意可以求得小强上坡的速度，进而求得小强返回时需要的时间．

【详解】(1) 由题意和图象可得：小强去学校时下坡路为： $3 - 1 = 2$ (千米)．

故答案为 2；

(2) 小强下坡的速度为： $2 \div (10 - 6) = 0.5$ 千米/分钟．

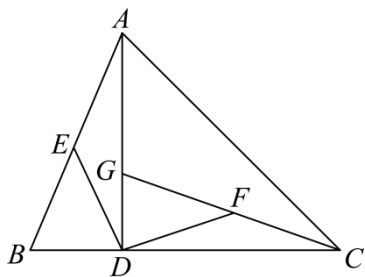
故答案为 0.5；

(3) 小强上坡时的速度为： $1 \div 6 = \frac{1}{6}$ 千米/分钟，故小强回家骑车走这段路的时间是： $\frac{2}{\frac{1}{6}} + \frac{1}{0.5} = 14$ (分钟)．

故答案为 14．

【点睛】本题考查了函数图象，解题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件．

22. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 45^\circ$ ， AD 是边 BC 上的高， G 是 AD 上一点，连接 CG ，点 E 、 F 分别是 AB 、 CG 的中点，且 $DE = DF$ ．求证： $\triangle ABD \cong \triangle CGD$ ．



【答案】见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的判定方法，证明时注意：在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半，即直角三角形的外心位于斜边的中点．先根据直角三角形的性质，得到 $AB = GC$ ，再根据等腰直角三角形的性质，得到 $AD = CD$ ，最后判定 $\text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle CGD$ 即可．

【详解】证明： $\because AD$ 是边 BC 上的高，点 E 、 F 分别是 AB 、 CG 的中点，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AB, \quad DF = \frac{1}{2}GC,$$

$$\because DE = DF,$$

$$\therefore AB = GC,$$

$\because \angle ACB = 45^\circ$ ， AD 是边 BC 上的高，

$$\therefore \angle CAD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ACD,$$

$$\therefore AD = CD,$$

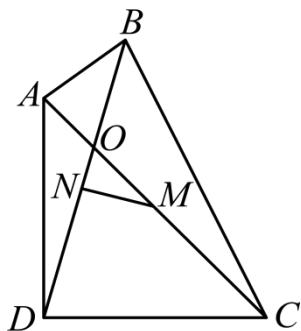
在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle CGD$ 中，

$$\begin{cases} AD = CD \\ AB = CG \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle CGD (\text{HL}).$$

四、解答题 (本大题共 3 小题，第 23、24 题每小题 8 分，第 25 题 12 分，满分 28 分)

23. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， M 、 N 分别是边 AC 、 BD 的中点．



(1) 求证: $MN \perp BD$;

(2) 当 $\angle BCA = 15^\circ$, $AC = 10\text{cm}$, $OB = OM$ 时, 求 MN 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 2.5cm

【解析】

【分析】(1) 连接 BM 、 DM . 由直角三角形斜边上中线的性质可得 $BM = DM = \frac{1}{2}AC$, 由线段垂直平分线的判定即可证明结果;

(2) 由 $\angle BCA = 15^\circ$ 及 $BM = CM = \frac{1}{2}AC$ 可得 $\angle BMA = 30^\circ$, 再由 $OB = OM$ 得 $\angle OBM = \angle BMA = 30^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle BMN$ 中由含 30° 度角直角三角形的性质即可求得 MN 的长.

【小问 1 详解】

证明: 如图, 连接 BM 、 DM .

$\because \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, 点 M 、点 N 分别是边 AC 、 BD 的中点,

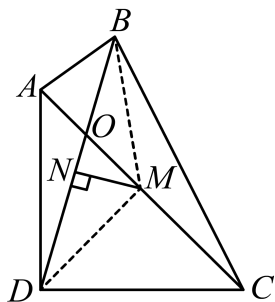
$$\therefore BM = \frac{1}{2}AC, \quad DM = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore BM = DM = \frac{1}{2}AC,$$

$\because N$ 是 BD 的中点,

$\therefore MN$ 是 BD 的垂直平分线,

$\therefore MN \perp BD$.



【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because \angle BCA = 15^\circ, \quad BM = CM = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore \angle BCA = \angle CBM = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle BMA = 30^\circ,$$

$$\because OB = OM,$$

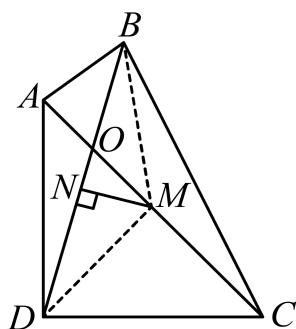
$$\therefore \angle OBM = \angle BMA = 30^\circ,$$

$$\because AC = 10\text{cm}, BM = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore BM = 5\text{cm},$$

在 $\text{Rt}\triangle BMN$ 中, $\angle BNM = 90^\circ$, $\angle NBM = 30^\circ$,

$$\therefore MN = \frac{1}{2}BM = 2.5\text{cm},$$



答: MN 的长是 2.5cm .

【点睛】本题考查了直角三角形斜边上中线的性质, 线段垂直平分线的判定, 等腰三角形的性质, 含 30° 度角直角三角形的性质等知识, 其中连接 BM 、 DM 是解题的关键.

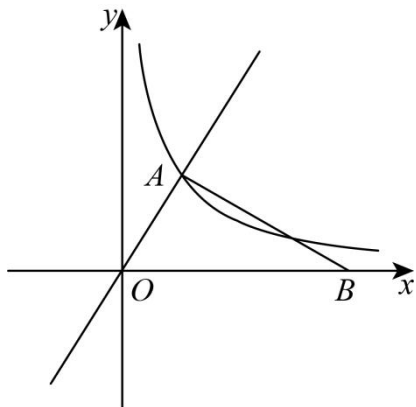
24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $y = \sqrt{3}x$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象交于点 A , 且

点 A 的横坐标为 1, 点 B 是 x 轴正半轴上一点, 且 $AB \perp OA$.

(1) 求反比例函数的解析式;

(2) 求点 B 的坐标;

(3) 先在 $\angle AOB$ 的内部求作点 P , 使点 P 到 $\angle AOB$ 的两边 OA 、 OB 的距离相等, 且 $PA=PB$; 再写出点 P 的坐标. (不写作法, 保留作图痕迹, 在图上标注清楚点 P)



【答案】(1) $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$; (2) (4, 0); (3) 作图见解析, $P(3, \sqrt{3})$.

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法先求出点 A 纵坐标, 再求出反比例系数 k 即可.

(2) 过点 A 作 $AC \perp OB$, 垂足为点 C . 在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中先求出 OA , 再在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中求出 OB 即可解决问题.

(3) 画出 $\angle AOB$ 的平分线 OM , 线段 AB 的垂直平分线 EF , OM 与 EF 的交点就是所求的点 P , 设点 $P(m, \frac{\sqrt{3}}{3}m)$, 根据 $PA^2 = PB^2$, 列出方程即可解决问题.

【详解】(1) 由题意, 设点 A 的坐标为 $(1, m)$.

$\because$ 点 A 在正比例函数 $y = \sqrt{3}x$ 的图象上, $\therefore m = \sqrt{3}$. $\therefore$ 点 A 的坐标 $(1, \sqrt{3})$.

$\because$ 点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上, $\therefore \sqrt{3} = \frac{k}{1}$, 解得: $k = \sqrt{3}$, $\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$.

(2) 过点 A 作 $AC \perp OB$ 于 C , 可得: $OC = 1$, $AC = \sqrt{3}$.

$\because AC \perp OB$, $\therefore \angle ACO = 90^\circ$.

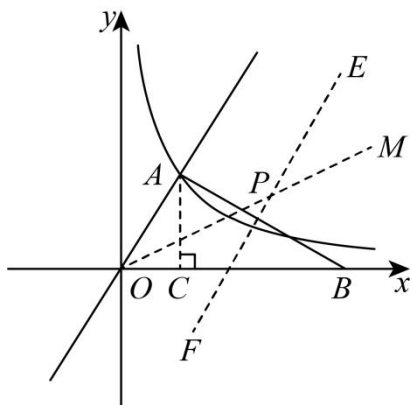
由勾股定理, 得: $AO = 2$, $\therefore OC = \frac{1}{2}AO$, $\therefore \angle OAC = 30^\circ$, $\therefore \angle AOC = 60^\circ$.

$\because AB \perp OA$, $\therefore \angle OAB = 90^\circ$, $\therefore \angle ABO = 30^\circ$, $\therefore OB = 2OA$, $\therefore OB = 4$, $\therefore$ 点 B 的坐标是 $(4, 0)$.

(3) 如图, 作 $\angle AOB$ 的平分线 OM , AB 的垂直平分线 EF , OM 与 EF 的交点就是所求的点 P .

$\because \angle POB = 30^\circ$, $\therefore$ 可以设点 P 坐标 $(m, \frac{\sqrt{3}}{3}m)$.

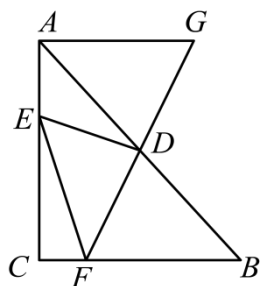
$\because PA^2 = PB^2$, $\therefore (m-1)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3}m - \sqrt{3})^2 = (m-4)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3}m)^2$, 解得: $m = 3$, $\therefore$ 点 P 的坐标是 $(3, \sqrt{3})$.



【点睛】本题考查了反比例函数与一次函数图象的交点问题, 直角三角形中 30° 度角所对的直角边等于斜边

的一半，勾股定理等知识，解题的关键是灵活应用待定系数法确定函数解析式，学会利用两点间距离公式列方程解决问题，属于中考常考题型.

25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 的中点， E 是边 AC 上一动点，连接 DE ，过点 D 作 $DF \perp DE$ 交边 BC 于点 F (点 F 与点 B 、 C 不重合)，延长 FD 到点 G ，使 $DG = DF$ ，连接 EF 、 AG ，已知 $AB = 10$ ， $BC = 6$ ， $AC = 8$.



- (1) 求证: $AC \perp AG$;
- (2) 设 $AE = x$ ， $CF = y$ ，求 y 与 x 的函数解析式，并写出自变量 x 的取值范围;
- (3) 当 $\triangle BDF$ 是以 BF 为腰的等腰三角形时，求 AE 的长.

【答案】(1) 见解析;

(2) $y = \frac{4x-7}{3}$ ，自变量 x 的取值范围: $\frac{7}{4} < x < \frac{25}{4}$;

(3) $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{25}{8}$.

【解析】

【分析】(1) 根据勾股定理的逆定理得到 $\triangle ABC$ 是直角三角形，由 D 是 AB 的中点，得到 $AD = BD$ ，根据全等三角形的性质得到 $\angle GAB = \angle B$ ，推出 $\angle CAG = 90^\circ$ ，于是得到结论;

(2) 连接 EG ，根据勾股定理得到 $EF^2 = (8-x)^2 + y^2$ ，根据全等三角形的性质得到 $AG = BF$ ，由勾股定理得到 $EG^2 = x^2 + (6-y)^2$ ，于是得到方程 $(8-x)^2 + y^2 = x^2 + (6-y)^2$ ，即可得到结论

(3) ①当 $BF = DB$ 时， $6-y = 5$ ，列方程得到 $AE = \frac{5}{2}$; ②当 $DF = FB$ 时，连接 DC ，过点 D 作 $DH \perp FB$ ，垂足为点 H ，可得 $DF = FB = 6-y$ ，根据勾股定理得方程 $(6-y)^2 = 4^2 + (3-y)^2$ ，求得 $y = \frac{11}{6}$ ，于是求得 $AE = \frac{25}{8}$.

【小问 1 详解】

证明: $\because BC = 6$ ， $AC = 8$ ， $AB = 10$ ，

$$\therefore BC^2 + AC^2 = AB^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$\because D$ 是 AB 的中点,

【小问 2 详解】

$$\therefore AD = BD,$$

在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle BDF$ 中,

$$\begin{cases} AD = BD \\ \angle ADG = \angle BDF \\ DG = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADG \cong \triangle BDF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle GAB = \angle B,$$

$$\therefore AG \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CAG = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ, \text{ 即 } AC \perp AG;$$

连接 EG ,

$$\because AE = x, AC = 8,$$

$$\therefore EC = 8 - x,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{由勾股定理, 得 } EF^2 = (8 - x)^2 + y^2,$$

$$\because \triangle ADG \cong \triangle BDF,$$

$$\therefore AG = BF,$$

$$\because CF = y, BC = 6,$$

$$\therefore AG = BF = 6 - y,$$

$$\because \angle EAG = 90^\circ,$$

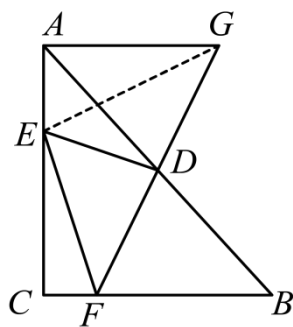
$$\therefore \text{由勾股定理, 得 } EG^2 = x^2 + (6 - y)^2,$$

$$\because DG = DF, DF \perp DE,$$

$$\therefore EF = EG,$$

$$\therefore (8 - x)^2 + y^2 = x^2 + (6 - y)^2,$$

$$\therefore y = \frac{4x - 7}{3}, \text{ 自变量 } x \text{ 的取值范围: } \frac{7}{4} < x < \frac{25}{4};$$



【小问 3 详解】

解：①当 $BF = DB$ 时， $6 - y = 5$ ，

$$\therefore y = 1,$$

$$\therefore 1 = \frac{4x - 7}{3},$$

$$\therefore x = \frac{5}{2}, \text{ 即 } AE = \frac{5}{2};$$

②当 $DF = FB$ 时，连接 DC ，过点 D 作 $DH \perp FB$ ，垂足为点 H ，

$$\therefore DF = FB = 6 - y,$$

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ， D 是 AB 的中点，

$$\therefore DC = DB = 5,$$

$\because DH \perp FB$ ， $BC = 6$ ，

$$\therefore CH = HB = 3,$$

$$\therefore FH = 3 - y,$$

$\because DH \perp FB$ ，

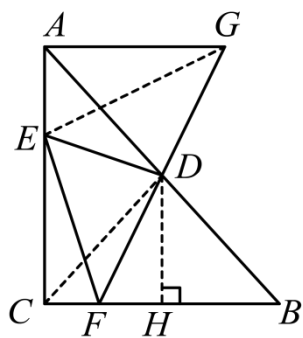
$\therefore$ 由勾股定理，得 $DH = 4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DHF$ 中，由勾股定理可得 $(6 - y)^2 = 4^2 + (3 - y)^2$ ，

$$\text{解得： } y = \frac{11}{6},$$

$$\therefore x = \frac{25}{8}, \text{ 即 } AE = \frac{25}{8},$$

综上所述， AE 的长度是 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{25}{8}$ 。



【点评】本题考查了全等三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，勾股定理，勾股定理的逆定理，正确的作出辅助线构造直角三角形是解题的关键.