

初二年级数学专项作业练习

一、选择题 (本大题 6 小题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列计算正确的是 ()

- A. $\sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{7}$ B. $\sqrt{(-2)^2} = -2$ C. $2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$ D. $\pm\sqrt{25} = 5$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次根式的运算方法判断选项的正确性.

【详解】解: A、 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{5}$ 不是同类二次根式, 不能合并, 所以 A 选项不符合题意;

B、 $\sqrt{(-2)^2} = 2$, 所以 B 选项不符合题意;

C、 $2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$, 所以 C 选项符合题意;

D、 $\pm\sqrt{25} = \pm 5$, 所以 D 选项不符合题意.

故选: C.

【点睛】本题考查二次根式的计算, 解题的关键是掌握二次根式的运算方法.

2. 二次根式 $\sqrt{x-1}$ 中字母 x 的取值可以是 ()

- A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式中的被开方数是非负数, 可得: $x-1 \geq 0$, 求出 x 的取值范围, 进而判断出二次根式 $\sqrt{x-1}$ 中字母 x 的取值可以是哪个即可.

【详解】解: 根据题意, 得 $x-1 \geq 0$,

$\therefore x \geq 1$,

$\because 3 > 1, 0 < 1, -\frac{1}{2} < 1, -1 < 1$,

$\therefore$ 二次根式 $\sqrt{x-1}$ 中字母 x 的取值可以是 3.

故选: D.

【点睛】本题主要考查了二次根式有意义的条件, 解答此题的关键是要明确: 二次根式中的被开方数是非负数.

3. 下列方程是一元二次方程的是 ()

A. $x-1=1$ B. $\frac{1}{x-1}+3=5$ C. $x(x+3)=x^2$ D.

$x(x+3)=1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程进行解答即可.

【详解】解：A、 $x-1=1$ ，不含二次项，不是一元二次方程，故此选项不符合题意；

B、 $\frac{1}{x-1}+3=5$ 中分母含未知数，不是一元二次方程，故此选项不符合题意；

C、 $x(x+3)=x^2$ 方程左右两边二次项都是 x^2 ，化简后无二次项 ($a=0$)，不是一元二次方程，故此选项不符合题意；

D、 $x(x+3)=1$ 是一元二次方程，故此选项符合题意；

故选：D.

【点睛】此题主要考查了一元二次方程定义，判断一个方程是否是一元二次方程应注意抓住 5 个方面：“化简后”；“一个未知数”；“未知数的最高次数是 2”；“二次项的系数不等于 0”；“整式方程”.

4. 关于 x 的方程 $x^2-2x-m=0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是 ()

A. $m < -1$ B. $m \leq -1$ C. $m > -1$ D. $m > 1$

【答案】C

【解析】

【分析】根据一元二次方程的根的判别式的意义得到 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-m) > 0$ ，然后解不等式即可.

【详解】解：根据题意得：

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-m) > 0,$$

解得 $m > -1$.

故选：C.

【点睛】本题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ：当方程有两个不相等的实数根；则 $\Delta > 0$ ，方程有两个相等的实数根；则 $\Delta = 0$ ，方程没有实数根，则 $\Delta < 0$.

5. 某商场一月份的营业额为 400 万元，第一季度 (包含一月、二月和三月) 的营业额共 1800 万元，设该商场每月营业额的月平均增长率为 x ，则可列方程为 ()

A. $400(1+x)^2 = 1800$

B.

$$400[1 + (1+x) + (1+x)^2] = 1800$$

C. $400 \times 3 + 400x^2 = 1800$

D. $400 + 400 \times 3x = 1800$

【答案】B

【解析】

【分析】先得到二月份的营业额，三月份的营业额，等量关系为：一月份的营业额 + 二月份的营业额 + 三月份的营业额 = 1800，把相关数值代入即可.

【详解】解：∵一月份的营业额为 400 万元，平均每月增长率为 x ,

∴二月份的营业额为 $400 \times (1+x)$,

∴三月份的营业额为 $400 \times (1+x) \times (1+x) = 400 \times (1+x)^2$,

∴可列方程为 $400 + 400 \times (1+x) + 400 \times (1+x)^2 = 1800$,

$$\text{即 } 400[1 + (1+x) + (1+x)^2] = 1800$$

故选：B.

【点睛】考查求平均变化率的方法. 若设变化前的量为 a ，变化后的量为 b ，平均变化率为 x ，则经过两次变化后的数量关系为 $a(1 \pm x)^2 = b$. 得到第一季度的营业额的等量关系是解决本题的关键.

6. 下列命题中，是真命题的是 ()

A. 从直线外一点向直线引垂线，这条垂线段就是这个点到这条直线的距离

B. 过一点，有且只有一条直线与已知直线平行

C. 两条直线被第三条直线所截，同旁内角互补

D. 两点之间，线段最短

【答案】D

【解析】

【分析】根据点到直线的距离；过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行；两条平行的直线被第三条直线所截，同旁内角互补；两点之间，线段最短；分析选项即可.

【详解】解：由题意可知：

A. 从直线外一点向直线引垂线，这条垂线段就是这个点到这条直线的距离，从直线外一点向直线引垂线，这条垂线段的长度就是这个点到这条直线的距离，故原命题错误，不符合题意；

B. 过一点，有且只有一条直线与已知直线平行，过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行，故原命题错误，不符合题意；

C. 两条直线被第三条直线所截，同旁内角互补，当两条平行的直线被第三条直线所截，同

旁内角互补，故原命题错误，不符合题意；

D. 两点之间，线段最短，命题正确，故符合题意.

故选：D

【点睛】本题考查真假命题的判断，解题的关键是掌握：点到直线的距离；过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行；两条平行的直线被第三条直线所截，同旁内角互补；两点之间，线段最短.

二、填空题 (本大题 12 小题，每题 2 分，共 24 分)

7. 若式子 $\sqrt{2x+4}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq -2$

【解析】

【分析】根据二次根式的被开方数是非负数求解即可.

【详解】解： $\because$ 式子 $\sqrt{2x+4}$ 在实数范围内有意义，

$$\therefore 2x+4 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq -2,$$

故答案为： $x \geq -2$.

【点睛】本题考查二次根式有意义的条件、解一元一次不等式，熟知二次根式的被开方数是非负数是解答的关键.

8. 若 $\sqrt{5}$ 和最简二次根式 $3\sqrt{2m-1}$ 是同类二次根式，则 $m =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】根据同类二次根式的定义得到 $2m-1=5$ ，然后解方程即可.

【详解】解： $\because \sqrt{5}$ 和最简二次根式 $3\sqrt{2m-1}$ 是同类二次根式，

$$\therefore 2m-1=5,$$

解得 $m=3$,

故答案为： 3.

【点睛】本题考查了同类二次根式，几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，这几个二次根式叫做同类二次根式.

9. 化简： $\sqrt{4a^2b^3} =$ _____ . (其中 $a < 0$, $b > 0$)

【答案】 $-2ab\sqrt{b}$

【解析】

【分析】运用二次根式的性质 $\sqrt{a^2} = a(a \geq 0)$, $\sqrt{a^2} = -a(a < 0)$ 化简即可.

【详解】解： $\because a < 0$, $b > 0$

$$\therefore |a| = -a, \quad |b| = b$$

$$\sqrt{4a^2b^3}$$

$$= \sqrt{2^2 \times a^2 \times b^2 \times b}$$

$$= 2|a||b|\sqrt{b}$$

$$= -2ab\sqrt{b},$$

故答案为: $-2ab\sqrt{b}$.

【点睛】本题考查了二次根式的性质 $\sqrt{a^2} = a (a \geq 0)$, $\sqrt{a^2} = -a (a < 0)$ 的应用, 熟练掌握性质是解题的关键.

10. 符号“*”表示一种新的运算, 规定 $a*b = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, 则 $6*2$ 的值为 ____.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据新运算将 $6*2$ 变换成 $\sqrt{6} \times \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$, 然后再计算即可.

【详解】解: 由题意得: $6*2 = \sqrt{6} \times \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

故答案为: $\sqrt{3}$.

【点睛】本题主要考查了二次根式的混合运算、新定义的运算等知识点, 将新定义运算转换成二次根式的混合运算是解答本题的关键.

11. 方程 $(2x+1)(x+2) = 3$ 化为一般形式是_____.

【答案】 $2x^2 + 5x - 1 = 0$

【解析】

【分析】根据一元二次方程的一般形式 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 为常数且 $a \neq 0$), 进行计算即可解答.

【详解】解: $(2x+1)(x+2) = 3$,

$$2x^2 + 4x + x + 2 = 3,$$

$$2x^2 + 5x - 1 = 0,$$

故答案为: $2x^2 + 5x - 1 = 0$.

【点睛】本题考查了一元二次方程的一般形式, 熟练掌握一元二次方程的一般形式是解题的关键.

12. 已知关于 x 的方程 $(m-1)x^{m^2+1} + 2x - 3 = 0$ 是一元二次方程, 则 m 的值为_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】根据一元二次方程的定义：①是整式方程，②只含有一个未知数，③所含未知数的项的最高次数是2，且二次项系数不为0. 得出 $m-1 \neq 0$ ， $m^2+1=2$ ，求出 m 的值即可.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2x-3=0$ 是一元二次方程，

$\therefore m^2+1=2$ 且 $m-1 \neq 0$,

解得： $m=-1$.

故答案为：-1.

【点睛】本题考查了对一元二次方程的定义的理解和运用，牢固掌握一元二次方程的定义是做出本题的关键.

13. 方程 $x^2-3x+2=0$ 两个根的和为 _____，积为 _____.

【答案】 ①. 3 ②. 2

【解析】

【分析】根据一元二次方程根与系数的关系： $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ ， $x_1x_2=\frac{c}{a}$ 解题.

【详解】解：方程 $x^2-3x+2=0$

$a=1, b=-3, c=2$

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=3, x_1x_2=\frac{c}{a}=2$

故答案为：3，2.

【点睛】本题考查一元二次方程根与系数的关系—韦达定理，是重要考点，难度较易，掌握相关知识是解题关键.

14. 如果 a 是方程 $x^2-2x-2=0$ 的一个实数根，则 $2a^2-4a+2019$ 的值为_____.

【答案】 2023

【解析】

【分析】首先由已知可得 $a^2-2a-2=0$ ，即 $a^2-2a=2$. 然后化简代数式，注意整体代入，从而求得代数式的值.

【详解】解：把 $x=a$ 代入得到 $a^2-2a-2=0$ ，

则 $a^2-2a=2$.

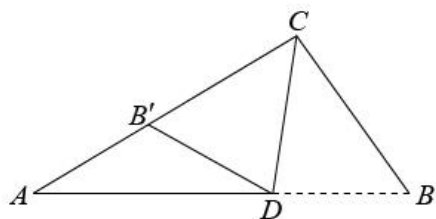
又 $\because 2a^2-4a=2(a^2-2a)$ ，

把 $a^2-2a=2$ 代入得 $2a^2-4a+2019=2(a^2-2a)+2019=2 \times 2+2019=2023$ ，

故答案为：2023.

【点睛】本题考查了一元二次方程的解的定义. 注意解题中的整体代入思想的应用.

15. 如图 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 在 AB 上, 将 $\triangle ABC$ 沿 CD 折叠, 点 B 落在 AC 边上的点 B' 处, 若 $\angle ADB' = 30^\circ$, 则 $\angle A =$ _____ $^\circ$.



【答案】 30

【解析】

【分析】由折叠的性质及已知, 可分别求得 $\angle BDC$ 及 $\angle BCD$ 的度数, 由三角形内角和定理可求得 $\angle B$, 进而求得 $\angle A$ 的度数.

【详解】由折叠的性质得: $\angle BDC = \angle B'DC$, $\angle BCD = \angle B'CD$.

$$\because \angle ADB' = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ADB') = 75^\circ.$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = \frac{1}{2}\angle ACB = 45^\circ.$$

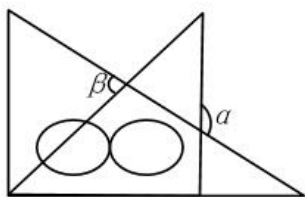
$$\therefore \angle B = 180^\circ - (\angle BDC + \angle BCD) = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

故答案为: 30.

【点睛】本题考查了折叠的性质, 三角形内角和定理, 直角三角形两内角互余等知识, 折叠性质的应用是解题的关键.

16. 我们将一副三角尺按如图所示的位置摆放, 则 $\angle \alpha - \angle \beta =$ _____ $^\circ$.



【答案】 45

【解析】

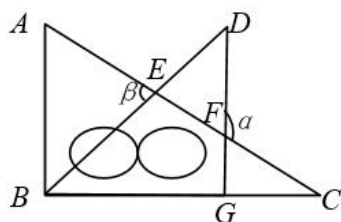
【分析】利用三角形的外角性质分别求得 $\angle \alpha$ 和 $\angle \beta$ 的值, 代入求解即可.

【详解】解: 根据题意, $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $\angle D = \angle DBG = 45^\circ$, $\angle ABC = \angle DGB = \angle DGC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle \beta = \angle DBG + \angle C = 75^\circ, \quad \angle \alpha = \angle DGC + \angle C = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle \alpha - \angle \beta = 120^\circ - 75^\circ = 45^\circ,$$

故答案为：45.



【点睛】本题考查了三角形的外角性质，解答本题的关键是明确题意，找到三角板中隐含的角的度数，利用数形结合的思想解答.

17. 在实数范围内因式分解： $x^2 - 3x + 1 =$ _____.

【答案】 $(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2})(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2})$

【解析】

【分析】根据一元二次方程的解法在实数范围内分解因式即可.

【详解】解：解一元二次方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore x^2 - 3x + 1 = (x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2})(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2})$$

故答案为： $(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2})(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2})$

【点睛】此题主要考查了一元二次方程的解法以及实数范围内分解因式，根据题意得出方程的根是解决问题的关键.

18. 在《代数学》中记载了求方程 $x^2 + 8x = 33$ 正数解的几何方法：如图 1，先构造一个面积为 x^2 的正方形，再以正方形的边为一边向外构造四个面积为 $2x$ 的矩形，得到大正方形的面积为 $33 + 16 = 49$ ，则该方程的正数解为 $7 - 4 = 3$. 小明尝试用此方法解关于 x 的方程 $x^2 + 10x = c$ 时，构造出如图 2 所示正方形，已知图 2 中阴影部分的面积和为 39. 该方程的正数解为_____.

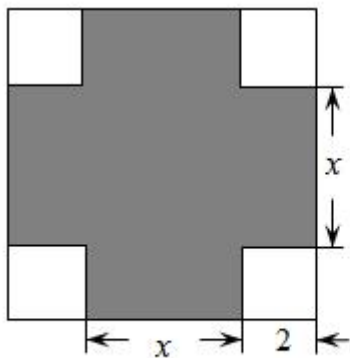


图 1

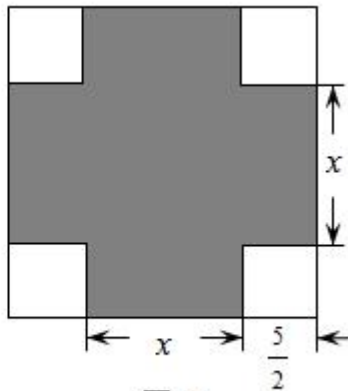


图 2

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据已知的数学模型，同理可得空白小正方形的边长为 $\frac{5}{2}$ ，先计算出大正方形的面积等于阴影部分的面积加四个小正方形的面积，从而可求得大正方形的边长，再用其减去两个空白正方形的边长即可求解

【详解】 如图 2 所示：

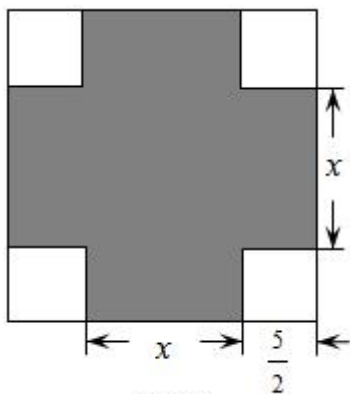


图 2

先构造一个面积为 x^2 的正方形，再以正方形的边为一边向外构造四个面积为 $\frac{5}{2}x$ 的矩形，

得到大正方形的面积为 $39 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 4 = 64$ ，则该方程的正数解为 $\sqrt{64} - \frac{5}{2} \times 2 = 3$ 。

故答案为： 3

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用，读懂题意并数形结合是解决问题的关键

三、简答题（本大题 6 小题，每题 5 分，共 30 分）

19. 计算： $\sqrt{8} - \sqrt{27} - |1 - \sqrt{2}| + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

【答案】 $1-2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 先化为最简二次根式，去绝对值，分母有理化，再合并即可.

$$\begin{aligned}\text{【详解】 原式} &= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - (\sqrt{2} - 1) + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\ &= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ &= 1 - 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

【点睛】 本题考查二次根式的混合运算. 涉及化为最简二次根式，去绝对值，分母有理化. 掌握其运算法则是解题关键.

20. 计算: $x\sqrt{xy^2} \div \left(-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{y}}\right) \times \frac{1}{2}\sqrt{x^4y}$

【答案】 $-\frac{3}{4}x^3y^2$

【解析】

【分析】 根据二次根式的运算法则，化简即可.

$$\begin{aligned}\text{【详解】 解: } &x\sqrt{xy^2} \div \left(-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{y}}\right) \times \frac{1}{2}\sqrt{x^4y} \\ &= -\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} x\sqrt{xy^2} \div \sqrt{\frac{x}{y}} \times \sqrt{x^4y} \\ &= -\frac{3}{4} x \sqrt{xy^2 \cdot \frac{y}{x} \cdot x^4y} \\ &= -\frac{3}{4} x \sqrt{x^4y^4} \\ &= -\frac{3}{4} x \cdot x^2y^2 \\ &= -\frac{3}{4} x^3y^2\end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了二次根式的化简，解题的关键是熟练掌握二次根式的运算法则.

21. 解方程: $(2x+1)^2 = -6x-3$.

【答案】 $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -2$

【解析】

【分析】 用因式分解法解一元二次方程即可.

【详解】解： $\because (2x+1)^2 = -6x-3$,

$$\therefore (2x+1)^2 + 3(2x+1) = 0,$$

$$\therefore (2x+1)(x+2) = 0,$$

$$\therefore 2x+1=0 \text{ 或 } x+2=0,$$

$$\therefore x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = -2$$

【点睛】本题主要考查了用因式分解法解一元二次方程，熟练掌握解一元二次方程的几种常用方法是解题的关键

22. 解方程： $x^2 + 4x + 2 = 0$ (用公式法).

【答案】 $x_1 = -2 - \sqrt{2}$, $x_2 = -2 + \sqrt{2}$

【解析】

【分析】首先确定 a 、 b 、 c 的值，求出根的判别式，判断方程是否有解，若有解，代入求根公式即可求解.

【详解】解： $\because x^2 + 4x + 2 = 0$,

$$\therefore a=1, \quad b=4, \quad c=2,$$

$$\because \Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times 2 = 8 > 0$$

$$\therefore x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2 \times 1} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$\therefore x_1 = -2 - \sqrt{2}, \quad x_2 = -2 + \sqrt{2}.$$

【点睛】本题考查了一元二次方程的解法：公式法，解此题的关键是熟练应用求根公式，要注意将方程化为一般形式，确定 a 、 b 、 c 的值.

23. 解方程： $2x^2 + 4x - 1 = 0$ (用配方法).

【答案】 $x_1 = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$, $x_2 = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$.

【解析】

【分析】将常数项移到右边后把二次项系数化为 1，再两边配上一次项系数一半的平方求解可得.

【详解】 $2x^2 + 4x - 1 = 0$,

移项得： $2x^2 + 4x = 1$,

把二次项系数化为 1 得： $x^2 + 2x = \frac{1}{2}$,

配方得: $x^2 + 2x + 1 = \frac{1}{2} + 1$, 即 $(x+1)^2 = \frac{3}{2}$,

直接开平方得: $x+1 = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$,

解得: $x_1 = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$, $x_2 = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$.

【点睛】 本题考查了解一元二次方程-配方法: 将一元二次方程配成 $(x+m)^2 = n$ 的形式, 再利用直接开平方求解, 这种解一元二次方程的方法叫配方法.

24. 在实数范围内因式分解: $-2x^2 + xy + 2y^2$

【答案】 $-2\left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{4}y\right)$

【解析】

【分析】 列出关于 x 的一元二次方程, 求得方程的根, 再根据方程的根写出因式分解的结果即可

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程为: $-2x^2 + xy + 2y^2 = 0$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = y^2 - 4 \times (-2) \times 2y^2 = 17y^2 \geq 0,$$

$$\therefore x = \frac{-y \pm \sqrt{17}y}{-4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}y,$$

$$\therefore x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}y, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}y,$$

$$\therefore -2x^2 + xy + 2y^2 = -2\left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{4}y\right)$$

【点睛】 本题考查了实数范围内因式分解, 掌握“若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数根为 x_1, x_2 , 则 $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ ”是解决问题的关键

四、解答题 (本大题 4 小题, 第 25、26 题, 每题 6 分, 第 27、28 题, 每题 8 分, 共 28 分)

25. 已知关于 x 的一元二次方程 $(k+1)x^2 - 2kx + k - 2 = 0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求实数 k 的取值范围;

(2) 写出满足条件的 k 的最小整数值, 并求此时方程的根.

【答案】 (1) $k > -2$ 且 $k \neq -1$; (2) $k = 0$; $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】(1) 根据一元二次方程的定义及根的判别式 $\Delta > 0$ ，即可得出关于 k 的一元一次不等式组，解之即可得出 k 的取值范围；

(2) 根据题意得出 k 值，进而可得出原方程，解之即可得出结论.

【详解】(1) 由题意得：
$$\begin{cases} k+1 \neq 0 \\ 4k^2 - 4(k+1)(k-2) > 0 \end{cases}$$

解得： $k > -2$ 且 $k \neq -1$ ；

(2) $\because k$ 取整数，

$\therefore k = 0$ ，

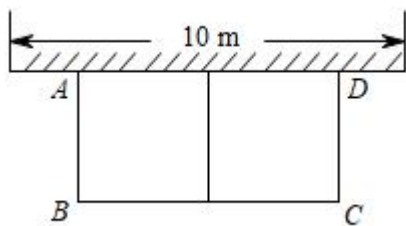
$\therefore$ 原方程为 $x^2 - 2 = 0$ ，

解得： $x_1 = \sqrt{2}$ ， $x_2 = -\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了根的判别式、一元二次方程的定义以及解一元二次方程，解题的关键是：

(1) 根据一元二次方程的定义及根的判别式 $\Delta > 0$ ，找出关于 k 的一元一次不等式组；(2) 根据题意，确定 k 的值.

26. 如图，有长为 30m 的篱笆，一面利用墙（墙的最大可用长度为 10m），围成中间隔有一道篱笆（平行于 AB ）的矩形花圃，设花圃一边 AB 的长为 x m，如要围成面积为 63m^2 的花圃，那么 AB 的长是多少？



【答案】 7m

【解析】

【分析】设 AB 的长为 x m，则平行于墙的一边长为： $(30 - 3x)$ m，该花圃的面积为： $(30 - 3x)x$ ，令该面积等于 63，求出符合题意的 x 的值，即是所求 AB 的长.

【详解】解：设该花圃的一边 AB 的长为 x m，则与 AB 相邻的边的长为 $(30 - 3x)$ m，由题意得： $(30 - 3x)x = 63$ ，

即： $x^2 - 10x + 21 = 0$ ，

解得： $x_1 = 3$ ， $x_2 = 7$

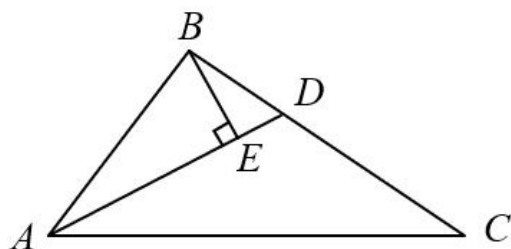
当 $x = 3$ m 时，平行于墙的一边长为： $30 - 3x = 21$ m > 10 m，不合题意舍去；

当 $x = 7$ m 时，平行于墙的一边长为： $30 - 3x = 9$ m < 10 m，符合题意，

所以， AB 的长是 7m.

【点睛】本题主要考查一元二次方程的应用，关键在于理解清楚题意，找出等量关系列出方程求解.

27. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 3\angle C$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ， $BE \perp AD$ 于 E ，



(1) 若 $\angle BAC = 60^\circ$ ，求 $\angle ADB$ 的度数；

(2) 求证： $BE = \frac{1}{2}(AC - AB)$.

【答案】(1) 60° ；

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 先利用三角形内角和定理求出 $\angle ABC + \angle C = 120^\circ$ ，然后根据 $\angle ABC = 3\angle C$ 可求出 $\angle C$ 的度数，进而得到 $\angle ABC$ ，再根据角平分线定义及三角形内角和定理求出 $\angle ADB$ 即可；

(2) 延长 BE 交 AC 于点 F ，证明 $\triangle ABE \cong \triangle AFE$ ，根据全等三角形的判定与性质，可得 $\angle ABF = \angle AFB$ ， $AB = AF$ ， $BE = EF$ ，根据三角形外角的性质，可得 $\angle C + \angle CBF = \angle AFB = \angle ABF$ ，根据角的和差、等量代换，可得 $\angle CBF = \angle C$ ，根据等腰三角形的判定可得 $BF = CF$ ，根据线段的和差、等式的性质，可得答案.

【小问1详解】

解： $\because \angle BAC = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC + \angle C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$$\because \angle ABC = 3\angle C,$$

$$\therefore 4\angle C = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 3\angle C = 90^\circ,$$

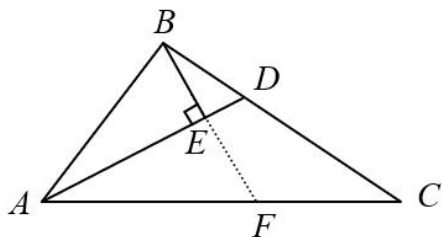
$$\because AD \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAD = 60^\circ;$$

【小问2详解】

如图：延长 BE 交 AC 于点 F ，



$$\because BE \perp AD,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AEF,$$

$$\because AD \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle FAE,$$

$$\text{在 } \triangle ABE \text{ 和 } \triangle AFE \text{ 中, } \begin{cases} \angle AEB = \angle AEF \\ AE = AE \\ \angle BAE = \angle FAE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AFE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore \angle ABF = \angle AFB, AB = AF, BE = EF,$$

$$\because \angle C + \angle CBF = \angle AFB = \angle ABF, \angle ABF + \angle CBF = \angle ABC = 3\angle C,$$

$$\therefore \angle C + 2\angle CBF = 3\angle C,$$

$$\therefore \angle CBF = \angle C,$$

$$\therefore BF = CF,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2} BF = \frac{1}{2} CF,$$

$$\because CF = AC - AF = AC - AB,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2} (AC - AB).$$

【点睛】本题考查了等腰三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，三角形外角的性质，三角形内角和定理，作出合适的辅助线，构造出全等三角形是解题的关键。

28. 配方法是数学中重要的一种思想方法，这种方法是根据完全平方公式的特征进行代数式的变形，并结合非负数的意义来解决一些问题。我们规定：一个整数能表示成 $a^2 + b^2$ (a, b 是整数) 的形式，则称这个数为“完美数”。例如，10 是“完美数”，理由：因为 $10 = 3^2 + 1^2$ ，所以 10 是“完美数”。

解决问题：

(1) 下列各数中，“完美数”有_____ (填序号)；

①29 ②48 ③13 ④28

(2) 若 $a^2 - 6a + 18$ 可配方成 $(a - m)^2 + n^2$ (m, n 为常数)，则 mn 的值_____；

(3) 已知 $S = a^2 + 4ab + 5b^2 - 12b + k$ (a, b 是整数， k 是常数)，要使 S 为“完美数”，试

求出符合条件的一个 k 值, 并说明理由.

拓展应用:

(4) 已知实数 a, b 满足 $-a^2 + 5a + b - 3 = 0$, 求 $a + b$ 的最小值.

【答案】(1) ①③ (2) ± 9

(3) 当 $k = 36$ 时, S 是完美数, 理由见解析

(4) $a + b$ 的最小值为 -1

【解析】

【分析】(1) 根据“完美数”的定义依次进行判断即可;

(2) 利用配方法进行转化, 然后求得对应系数的值, 进而得出结果;

(3) 利用完全平方式把原式变形, 根据“完美数”的定义, 即可证明结论;

(4) 利用配方法和非负数的性质, 即可求得 $a + b$ 的最小值.

【小问 1 详解】

解: $\because 29 = 25 + 4 = 5^2 + 2^2$, $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$, 48 和 28 不能表示成两个数的平方和,

$\therefore$ “完美数”有 29 和 13,

故答案为: ①③;

【小问 2 详解】

解: $\because a^2 - 6a + 18 = (a - 3)^2 + 9 = (a - m)^2 + n^2$,

$\therefore m = 3$, $n^2 = 9$,

$\therefore n = \pm 3$,

$\therefore mn = \pm 9$.

故答案为: ± 9 ;

【小问 3 详解】

解: (答案不唯一, 合理即可)

当 $k = 36$ 时, S 是完美数;

理由如下: $S = a^2 + 4ab + 5b^2 - 12b + 36$

$= a^2 + 4ab + 4b^2 + b^2 - 12b + 36$

$= (a + 2b)^2 + (b - 6)^2$

$\because a, b$ 是整数,

$\therefore a + 2b$ 和 $b - 6$ 也是整数,

$\therefore$ 当 $k = 36$ 时, S 是完美数;

【小问 4 详解】

解: $\because -a^2 + 5a + b - 3 = 0$,

$\therefore a + b = a^2 - 4a + 3$,

$$\therefore a+b=a^2-4a+4-1,$$

$$\therefore a+b=(a-2)^2-1,$$

$$\because (a-2)^2 \geq 0,$$

$$\therefore (a-2)^2-1 \geq -1,$$

$$\therefore a+b \text{ 的最小值为 } -1.$$

【点睛】 本题考查了配方法的应用，理解“完美数”的定义并能够灵活配方是解决问题的关键.