

**2021 - 2022 学年上海市宝山区新华实验学校八年级（上）月
考数学试卷（10 月份）**

一、选择题（每题 4 分，共 24 分）

1. 下列式子中一定是二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{-7}$

B. $\sqrt[3]{2}$

C. $\sqrt{a^2 - 2a + 1}$

D. $\sqrt{\frac{a}{b}}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据二次根式的定义即可求解，形如 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 的代数式是二次根式.

【详解】 解：A、 $\sqrt{-7}$ ， $-7 < 0$ ，不是二次根式，不符合题意；

B、 $\sqrt[3]{2}$ 是三次根式，不符合题意；

C、 $\sqrt{a^2 - 2a + 1} = \sqrt{(a+1)^2}$ 是二次根式，符合题意；

D、 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ，当 $b = 0$ 或 a, b 异号时无意义，不符合题意；

故选 C

【点睛】 本题考查了二次根式的定义，被开方数为非负数，掌握二次根式的定义是解题的关键.

2. 下列二次根式中最简二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{0.7}$

B. $\sqrt{42a}$

C. $\sqrt{\frac{a-b}{a}}$

D.

$\sqrt{2x^2y}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据最简二次根式的条件分别进行判断.

【详解】 解：A、 $\because \sqrt{0.7} = \frac{\sqrt{70}}{10}$ ， $\therefore$ 故此选项不符合题意.

B、 $\because \sqrt{42a}$ 是最简二次根式， $\therefore$ 故此选项符合题意.

C、 $\because \sqrt{\frac{a-b}{a}} = \frac{\sqrt{a^2 - ab}}{|a|}$ ， $\therefore$ 故此选项不符合题意.

D、 $\because \sqrt{2x^2y} = |x|\sqrt{2y}$ ， $\therefore$ 故此选项不符合题意.

故选：B.

【点睛】本题考查了最简二次根式：掌握最简二次根式的条件（被开方数的因数是整数或字母，因式是整式；被开方数中不含有可化为平方数或平方式的因数或因式）是解决此类问题的关键.

3. 下列二次根式中，与 $\sqrt{ab}$ ($a > 0, b > 0$) 是同类二次根式的是 () .

A. $\sqrt{\frac{b}{a}}$

B. $\sqrt{\frac{a^2b^2}{4}}$

C. $\sqrt{a^2b^3}$

D. $\sqrt{\frac{2}{ab}}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据 $a > 0, b > 0$ 将各选项二次根式进行化简后看被开方数是否相同.

【详解】A. $\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$, 与 $\sqrt{ab}$ 被开方数相同，所以它们是同类二次根式；

B. $\sqrt{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{ab}{2}$, 化简之后不是二次根式，所以它们不是同类二次根式；

C. $\sqrt{a^2b^3} = ab\sqrt{b}$, 与 $\sqrt{ab}$ 被开方数不同，所以它们不是同类二次根式；

D. $\sqrt{\frac{2}{ab}} = \frac{\sqrt{2ab}}{ab}$, 与 $\sqrt{ab}$ 被开方数不同，所以它们不是同类二次根式；

故选 A.

【点睛】本题考查同类二次根式，判断同类二次根式时，需要化成最简二次根式之后再看被开方数是否相同，若相同则是同类二次根式，反之则不是.

4. 若 $\sqrt{a^2 - 6a + 9} = 3 - a$ ，则 a 的取值范围是 ()

A. $a \geq 3$

B. $a \leq 3$

C. $a \leq 0$

D. $a < 3$

【答案】B

【解析】

【分析】结合完全平方公式对被开方式子进行变形，然后利用二次根式的性质进行化简，从而结合绝对值的意义作出分析判断.

【详解】解： $\sqrt{a^2 - 6a + 9} = 3 - a$

$$\sqrt{(a-3)^2} = 3 - a$$

$$|a-3| = 3 - a$$

$$\therefore |a-3| \geq 0,$$

$$\therefore 3 - a \geq 0,$$

$$\therefore a \leq 3,$$

故选：B

【点睛】本题考查完全平方公式，二次根式的性质，理解相关公式是解题关键.

5. 若 $x = -2$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + \frac{3}{2}ax - a^2 = 0$ 的一个根，则 a 的值为 ()

A. 1 或 -4

B. -1 或 -4

C. -1 或 4

D. 1 或 4

【答案】A

【解析】

【详解】解： $\because x = -2$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + \frac{3}{2}ax - a^2 = 0$ 的一个根，

$$\therefore (-2)^2 + \frac{3}{2}a \times (-2) - a^2 = 0, \text{ 即 } a^2 + 3a - 4 = 0,$$

整理，得 $(a+4)(a-1) = 0$,

解得 $a_1 = -4$, $a_2 = 1$.

即 a 的值是 1 或 -4.

故选：A.

【点睛】一元二次方程的解的定义：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解. 又因为只含有一个未知数的方程的解也叫做这个方程的根，所以，一元二次方程的解也称为一元二次方程的根.

6. 关于 x 的方程 $x^2 - kx + k - 2 = 0$ ，下列说法中正确的是 ()

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法确定

【答案】A

【解析】

【分析】计算出 $\Delta = (-k)^2 - 4 \times 1 \times (k-2) = (k-2)^2 + 4 > 0$ 即可得出结论.

【详解】解： $\Delta = (-k)^2 - 4 \times 1 \times (k-2) = (k-2)^2 + 4 > 0$,

所以方程有两个不相等的实数根.

故选：A.

【点睛】本题主要考查根的判别式，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：

①当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

②当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；

③当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

二、填空题 (每题 4 分, 共 48 分)

7. 当 x _____ 时, $\sqrt{4-x}$ 在实数范围内有意义.

【答案】 ≤ 4

【解析】

【分析】 根据二次根式在实数范围内有意义可得: $4-x \geq 0$ 解得即可得出答案.

【详解】 解: 因为 $\sqrt{4-x}$ 在实数范围内有意义,

所以 $4-x \geq 0$, 解得: $x \leq 4$;

故答案为: ≤ 4 .

【点睛】 本题考查二次根式有意义的条件, 熟练掌握二次根号下大于等于 0 是本题解题关键.

8. 若 $\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$ 成立, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x > 2$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件即可求出答案.

【详解】 解: 由题意可知: $x-1 \geq 0$ 且 $x-2 > 0$,

$\therefore x > 2$,

故答案是: $x > 2$.

【点睛】 本题考查二次根式有意义的条件以及分式有意义的条件, 解题的关键是正确理解二次根式有意义的条件, 本题属于基础题题型.

9. 化简二次根式: $\sqrt{\frac{8x^2}{y^3}} = \text{_____} (x \geq 0)$.

【答案】 $\frac{2x\sqrt{2y}}{y^2}$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件判断得出 $y > 0$, 然后利用二次根式的性质化简即可得出答案.

【详解】 解: $\because \frac{8x^2}{y^3} \geq 0$, $x \geq 0$,

$\therefore y > 0$,

$\therefore \text{原式} = \sqrt{\frac{8x^2y}{y^3 \cdot y}} = \frac{2x\sqrt{2y}}{y^2}$;

故答案为: $\frac{2x\sqrt{2y}}{y^2}$.

【点睛】本题考查二次根式的性质以及化简,理解二次根式有意义的条件和二次根式的性质是解题关键.

10. 在实数范围内因式分解: $x^2 - 12 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x + 2\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3})$

【解析】

【分析】将 12 化成 $(2\sqrt{3})^2$, 利用平方差公式分解即可.

【详解】解: $x^2 - 12 = x^2 - (2\sqrt{3})^2$
 $= (x + 2\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3})$,
故答案为: $(x + 2\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3})$.

【点睛】本题考查用公式法分解因式,熟练掌握平方差公式是解题的关键.

11. 在实数范围内因式分解: $2x^2 + 5x - 12 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 4)$

【解析】

【分析】解 $2x^2 + 5x - 12 = 0$ 可得, $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -4$, 根据求根公式的分解方法和特点可知:

$$2x^2 + 5x - 12 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 4).$$

【详解】解: $\because 2x^2 + 5x - 12 = 0$ 时, $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -4$,

$$\therefore 2x^2 + 5x - 12 = (2x - 3)(x + 4) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 4);$$

故答案为: $2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 4)$.

【点睛】本题考查了在实数范围内分解因式,解一元二次方程,解题的关键是熟练掌握一元二次方程的性质,从而完成求解.

12. 已知 $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x} - 3$, 则 $x^y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{8}$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件列出不等式，求出 x ，得到 y 的值，根据有理数的乘方法则计算即可.

【详解】解：由题意得， $x-2 \geq 0$ ， $2-x \geq 0$ ，

解得， $x=2$ ，

$\therefore y=-3$ ，

则 $x^y=2^{-3}=\frac{1}{8}$ ，

故答案为： $\frac{1}{8}$.

【点睛】本题考查的是二次根式有意义的条件，掌握二次根式的被开方数是非负数是解题的关键.

13. 计算： $(\sqrt{3}+2)^{2017} \times (\sqrt{3}-2)^{2018} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】由平方差公式、以及积的乘方性质进行化简，即可求出答案.

【详解】解： $(\sqrt{3}+2)^{2017} \times (\sqrt{3}-2)^{2018}$
 $= (\sqrt{3}+2)^{2017} \times (\sqrt{3}-2)^{2017} \times (\sqrt{3}-2)$
 $= [(\sqrt{3}+2) \times (\sqrt{3}-2)]^{2017} \times (\sqrt{3}-2)$
 $= (-1)^{2017} \times (\sqrt{3}-2)$
 $= 2-\sqrt{3}$

故答案为： $2-\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了整式乘法的运算法则，解题的关键是掌握平方差公式、以及积的乘方进行化简.

14. 若方程 $3x^2-5x-2=0$ 有一个根是 a ，则 $6a^2-10a$ 的值为_____

【答案】 4

【解析】

【分析】根据一元二次方程的解的定义，将 $x=a$ 代入方程 $3x^2-5x-2=0$ ，列出关于 a 的一元二次方程，通过变形求得 $3a^2-5a$ 的值后，将其整体代入所求的代数式并求值即可.

【详解】解： $\because$ 方程 $3x^2-5x-2=0$ 的一个根是 a ，

$\therefore 3a^2-5a-2=0$ ，

$$\therefore 3a^2 - 5a = 2,$$

$$\therefore 6a^2 - 10a = 2 (3a^2 - 5a) = 2 \times 2 = 4.$$

故答案是：4.

【点睛】此题主要考查了方程解的定义. 此类题型的特点是，利用方程解的定义找到相等关系，再把所求的代数式化简后整理出所找到的相等关系的形式，再把此相等关系整体代入所求代数式，即可求出代数式的值.

15. 等腰三角形的底和腰是方程 $x^2 - 7x + 10 = 0$ 的两根，则这个三角形的周长是_____.

【答案】12

【解析】

【分析】用因式分解法求出方程的两个根分别是 5 和 2，根据两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，得出相应的值，再根据三角形的周长公式进行计算即可.

【详解】解： $\because x^2 - 7x + 10 = 0$,

$$\therefore (x-5)(x-2) = 0,$$

$$\therefore x_1 = 5, x_2 = 2,$$

$\therefore$ 等腰三角形的底和腰是方程的两根，

$\therefore$ 当腰为 2 时，则底为 5， $\because 2+2 < 5$ ，此三角形不存在， $\therefore$ 不合题意舍去，

$\therefore$ 当腰为 5 时，则底为 2，

$\therefore$ 这个三角形的周长是 $5+5+2=12$;

故答案为：12.

【点睛】本题考查的是用因式分解法解一元二次方程，解题的关键是根据两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，得出相应的边的值，再根据周长公式进行计算.

16. 方程 $x^2 = -x$ 的解是_____.

【答案】0 或 -1

【解析】

【分析】提公因式 x ，解答即可.

【详解】解： $x^2 + x = 0$ ， $x(x+1) = 0$ ， $\therefore x=0$ 或 $x=-1$. 故答案为 0 或 -1.

【点睛】本题考查用提公因式法解方程. 熟练掌握提公因式法是解此题的关键.

17. 已知最简二次根式 $a^{b-1}\sqrt{2a+1}$ 和 $\sqrt{a+3}$ 是同类二次根式，则 $a^b =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】根据同类二次根式定义：两个被开方数相同的最简二次根式是同类二次根，列出方

程组 $\begin{cases} a-b-1=2 \\ 2a+1=a+3 \end{cases}$ 求解，得出 a 、 b 值，再代入计算即可.

【详解】银，根据题意，得

$$\begin{cases} a-b-1=2 \\ 2a+1=a+3 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases},$$

$$\therefore a^b=2^{-1}=\frac{1}{2},$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查同类二次根式概念，代数式求值，负整理指数幂的运算，解二元一次方程组，熟练掌握同类二次根式概念是解题的关键.

18. 已知 k 是方程 $x^2 - 2018x + 1 = 0$ 的一个根，那么 $k + \frac{1}{k} =$ _____;

$$k^2 - 2017k + \frac{2018}{k^2 + 1} \text{_____}.$$

【答案】 ①. 2018 ②. 2017

【解析】

【分析】利用 k 是方程 $x^2 - 2018x + 1 = 0$ 的一个根得到 $k^2 - 2018k + 1 = 0$ ，两边除以 k 可得 $k + \frac{1}{k} = 2018$;

再把 $k^2 = 2018k - 1$ 代入 $k^2 - 2017k + \frac{2018}{k^2 + 1}$ 中得到原式 $= k - 1 + \frac{1}{k}$ ，然后利用整体代入的方法计算即可.

【详解】解: $\because k$ 是方程 $x^2 - 2018x + 1 = 0$ 的一个根,

$$\therefore k^2 - 2018k + 1 = 0,$$

$$\therefore k - 2018 + \frac{1}{k} = 0,$$

$$\therefore k + \frac{1}{k} = 2018;$$

$$\therefore k^2 = 2018k - 1,$$

$$\therefore k^2 - 2017k + \frac{2018}{k^2 + 1}$$

$$= 2018k - 1 - 2017k + \frac{2018}{2018k - 1 + 1}$$

$$= k - 1 + \frac{1}{k}$$

$$= 2018 - 1$$

$$= 2017.$$

故答案为: 2018; 2017.

【点睛】本题考查了一元二次方程的解: 能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一

元二次方程的解.

三、简答题 (每题 6 分, 共 36 分)

19. 计算: $\sqrt{27} - \frac{2}{\sqrt{3}-1} + (1-\sqrt{3})^0$.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据化简二次根式、实数的混合运算法则计算即可得出答案.

【详解】 解: 原式 $= 3\sqrt{3} - \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + 1$
 $= 3\sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 + 1$
 $= 2\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查二次根式的化简以及实数的混合运算, 熟练掌握二次根式的化简是本题解题关键.

20. 计算: $3\sqrt{18} \times \frac{1}{6}\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$.

【答案】 $\frac{7\sqrt{6}}{2}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的运算法则计算即可.

【详解】 解: 原式 $= 3 \times 3\sqrt{2} \times \frac{1}{6}\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$
 $= \frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{6}$
 $= \frac{7\sqrt{6}}{2}$.

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算, 熟练掌握相应的运算法则是解题关键, 尤其注意最后的结果必须是最简二次根式.

21. 化简 $\frac{x-9y}{\sqrt{x}-3\sqrt{y}} + \frac{x+2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

【答案】 $2\sqrt{x}+4\sqrt{y}$.

【解析】

【分析】 先利用平方差公式和完全平方公式把分子因式分解, 然后约分后合并即可.

【详解】解：原式 = $\frac{(\sqrt{x}+3\sqrt{y})(\sqrt{x}-3\sqrt{y})}{\sqrt{x}-3\sqrt{y}} + \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$$= \sqrt{x} + 3\sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$= 2\sqrt{x} + 4\sqrt{y}.$$

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算：先把二次根式化为最简二次根式，然后进行二次根式的乘除运算，再合并即可．在二次根式的混合运算中，如能结合题目特点，灵活运用二次根式的性质，选择恰当的解题途径，往往能事半功倍．

22. 解不等式： $\sqrt{2}(x-\sqrt{3}) \geq \sqrt{6}(x+1)$

【答案】 $x \leq -\sqrt{3}-3$

【解析】

【分析】按照移项、合并同类项、系数化为1的步骤求解，结果化为最简二次根式即可．

【详解】解： $\sqrt{2}x - \sqrt{6} \geq \sqrt{6}x + \sqrt{6}$

移项得： $\sqrt{2}x - \sqrt{6}x \geq \sqrt{6} + \sqrt{6}$ ，

合并同类项得： $(\sqrt{2} - \sqrt{6})x \geq 2\sqrt{6}$ ，

系数化1得： $x \leq \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}$ ，

$\therefore x \leq \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{-4}$ ，

$\therefore x \leq -\sqrt{3}-3$ ，

$\therefore$ 原不等式解集为 $x \leq -\sqrt{3}-3$ ．

【点睛】本题考查了一元一次不等式的解法，以及二次根式的化简，熟练掌握一元一次不等式的解法以及二次根式的运算法则是解答本题的关键．

23. 用配方法解方程： $3x^2 + 6x - 1 = 0$

【答案】 $x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3}-1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$

【解析】

【分析】先将二次项系数化为1，然后根据配方法，可即答案．

【详解】解： $x^2 + 2x - \frac{1}{3} = 0$

$$x^2 + 2x + 1 = 1 + \frac{1}{3}$$

$$(x+1)^2 = \frac{4}{3}$$

$$x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$$

$$\text{故答案为 } x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$$

【点睛】本题考查了配方法解一元二次方程，解题时要注意解题步骤的准确应用．选择用配方法解一元二次方程时，最好使方程的二次项的系数为1，一次项的系数是2的倍数．

$$24. \text{ 解方程: } \frac{x^2-1}{3} + \frac{x}{2} = x$$

$$\text{【答案】 } x_1=2, x_2=-0.5.$$

【解析】

【分析】先整理为一般式，再利用因式分解法求解可得．

【详解】解：将方程整理为一般式为 $2x^2-3x-2=0$ ，

$$\therefore (x-2)(2x+1)=0,$$

$$\therefore x-2=0 \text{ 或 } 2x+1=0,$$

$$\text{解得 } x_1=2, x_2=-0.5.$$

【点睛】本题主要考查解一元二次方程的能力，熟练掌握解一元二次方程的几种常用方法：直接开平方法、因式分解法、公式法、配方法，结合方程的特点选择合适、简便的方法是解题的关键．

四．解答题（25、26 题每题 7 分，27、28 题每题 8 分，共 28 分）

25. 已知关于 x 的方程 $(m-1)x^{m^2+1} + 2x - 3 = 0$ 是一元二次方程．

(1) 求 m 的值；

(2) 解该一元二次方程．

$$\text{【答案】 (1) } m = -1$$

(2) 无解

【解析】

【分析】(1) 根据一元二次方程的定义：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2次的方程叫一元二次方程，求解即可；

(2) 根据(1)求得的 m 值，代入方程，利用根的判别式判定方程无解即可．

【小问1详解】

解：∵关于 x 的方程 $(m-1)x^{m^2+1} + 2x - 3 = 0$ 是一元二次方程，

$$\therefore \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ m^2+1=2 \end{cases},$$

解得 $m = -1$;

【小问 2 详解】

解：方程为 $-2x^2 + 2x - 3 = 0$,

即 $2x^2 - 2x + 3 = 0$,

$\therefore a = 2, b = -2, c = 3$,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 4 - 24 = -20 < 0$,

故原方程无解.

【点睛】本题考查一元二次方程的定义，解一元二次方程，熟练掌握用根的判别式判定一元二次方程根的情况：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根，当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根，当 $\Delta < 0$ 时，方程没有实数根是解题的关键.

26. 先化简，再求值： $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab} - b} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \div \frac{\sqrt{b}}{a - b}$ ，其中 $a = \frac{4}{3 + \sqrt{5}}$,

$b = 3 + \sqrt{5}$.

【答案】 $2\sqrt{ab}$, 4

【解析】

【分析】根据分式以及二次根式的运算法则，先将原式进行化简，再将 $a = \frac{4}{3 + \sqrt{5}}$,

$b = 3 + \sqrt{5}$ 代入即可得出答案.

【详解】解：原式

$$= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \left[\frac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} - \frac{\sqrt{ab} - b}{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \right] \cdot \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{b}}$$

$$= \sqrt{ab} \cdot \frac{2b}{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \cdot \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{b}}$$

$$= 2\sqrt{ab},$$

$$\text{当 } a = \frac{4}{3 + \sqrt{5}} = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{9 - 5} = 3 - \sqrt{5}, \quad b = 3 + \sqrt{5} \text{ 时,}$$

$$\text{原式} = 2\sqrt{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}$$

$$= 2 \times \sqrt{9 - 5}$$

$$= 2 \times \sqrt{4}$$

$$= 2 \times 2$$

$$= 4.$$

【点睛】本题考查分式的化简求值以及二次根式的化简，熟练掌握二次根式的化简是本题解题关键.

$$27. \text{ 关于 } x \text{ 的一元二次方程 } kx^2 + (k+1)x + \frac{k}{4} = 0.$$

(1) 若该方程有两个不相等的实数根，求 k 的取值范围；

(2) 若该方程有两个相等的实数根，求该方程的解.

【答案】(1) $k > -\frac{1}{2}$ 且 $k \neq 0$

(2) $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据方程有两个不相等的实数根，令 $\Delta > 0$ 且 $k \neq 0$ 解不等式即可得出答案；

(2) 根据方程有两个相等的实数根，令 $\Delta = 0$ ，求出 k 的值，代入原方程，解方程即可得出答案.

【小问 1 详解】

解：∵ 方程有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta > 0 \text{ 且 } k \neq 0, \text{ 即 } \Delta = (k+1)^2 - 4k \times \frac{k}{4} > 0 \text{ 且 } k \neq 0,$$

$$\text{解得 } k > -\frac{1}{2} \text{ 且 } k \neq 0,$$

$$\therefore k \text{ 的取值范围为 } k > -\frac{1}{2} \text{ 且 } k \neq 0;$$

【小问 2 详解】

解：∵ 方程有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (k+1)^2 - 4k \times \frac{k}{4} = 0,$$

$$\therefore k = -\frac{1}{2},$$

$$\text{代入方程得, } -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = x_2 = \frac{1}{2}.$$

【点睛】本题考查一元二次方程根的判别式，掌握根的判别式与一元二次方程根的情况关系

是解题的关键.

28. 阅读理解: 法国数学家韦达在研究一元二次方程时有一项重大发现: 如果一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根分别是 x_1 和 x_2 , 那么 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

例如: 方程 $2x^2 + 3x - 5 = 0$ 的两根分别是 x_1 和 x_2 , 则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{2}$.

请同学们阅读后利用上述结论完成下列问题:

(1) 已知方程 $3x^2 - 7 = 11x$ 的两根分别是 x_1 和 x_2 , 则 $x_1 + x_2 =$ _____, $x_1x_2 =$ _____.

(2) 已知方程 $x^2 + 5x - 3 = 0$ 的两根分别是 x_1 和 x_2 , 求 $x_1^2 + x_2^2$ 的值.

(3) 已知 a 和 β 是方程 $2x^2 + 3x - 1 = 0$ 的两根, 请构造一个一元二次方程, 使它的两根分别是 $a + \frac{1}{\beta}$ 和 $\beta + \frac{1}{a}$.

【答案】(1) $\frac{11}{3}$, $-\frac{7}{3}$

(2) 31 (3) $2x^2 - 3x - 1 = 0$

【解析】

【分析】(1) 根据题中所给条件, 直接求 $x_1 + x_2$ 和 x_1x_2 的值即可.

(2) 根据题中所给条件, 先求 $x_1 + x_2$ 和 x_1x_2 的值, 再通过公式转化, 求 $x_1^2 + x_2^2$ 的值.

(3) 根据题意, 可先得到 $a + \beta = -\frac{3}{2}$, $a\beta = -\frac{1}{2}$, 进而得到

$$\left(a + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{a}\right) = a + \beta + \frac{a + \beta}{a\beta} = \frac{3}{2}, \quad \left(a + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{a}\right) = a\beta + \frac{1}{a\beta} + 2 = -\frac{1}{2}, \quad \text{即}$$

可得到结果

【小问 1 详解】

(1) $\because$ 方程 $3x^2 - 7 = 11x$ 的两根分别是 x_1, x_2 ,

$\therefore$ 方程 $3x^2 - 11x - 7 = 0$ 的两根分别是 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{-11}{3} = \frac{11}{3}, \quad x_1x_2 = -\frac{7}{3},$$

故答案为: $\frac{11}{3}$, $-\frac{7}{3}$;

【小问 2 详解】

(2) $\because$ 方程 $x^2 + 5x - 3 = 0$ 的两根分别是 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -5, \quad x_1x_2 = -3,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 = 25,$$

$$\therefore x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 25,$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = 25 - 2x_1x_2 = 25 - 2 \times (-3) = 31;$$

【小问3 详解】

(3) $\because a$ 和 β 是方程 $2x^2 + 3x - 1 = 0$ 的两根,

$$\therefore a + \beta = -\frac{3}{2}, \quad a\beta = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{a}\right) = a + \beta + \frac{a + \beta}{a\beta} = \frac{3}{2}, \quad \left(a + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{a}\right) = a\beta + \frac{1}{a\beta} + 2 = -\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 构造一元二次方程 $2x^2 - 3x - 1 = 0$, 它的两根分别是 $a + \frac{1}{\beta}$ 和 $\beta + \frac{1}{a}$.

【点睛】本题考查了一元二次方程根与系数的关系以及一元二次方程的解, 根的判别式等知识, 熟练掌握相关知识点是解题关键