

中远实验学校 2022 学年第一学期八年级数学第一次质量调研卷

一、选择题

1. 下列各组二次根式中，属于同类二次根式的是（ ）

- A. $2\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{2}$ ； B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 与 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ； C. $\sqrt{0.5}$ 与 $\sqrt{5}$ ； D. $\sqrt{8x^3}$ 与 $\sqrt{2x}$ 。

【答案】D

【解析】

【分析】把四组式子化成最简二次根式后根据同类二次根式的定义进行判断。

【详解】解：A、 $2\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{2}$ 被开方数不同，不是同类二次根式；

B、 $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 与 $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 被开方数不同，不是同类二次根式；

C、 $\sqrt{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 与 $\sqrt{5}$ 被开方数不同，不是同类二次根式；

D、 $\sqrt{8x^3} = 2x\sqrt{2x}$ 与 $\sqrt{2x}$ ，被开方数相同，是同类二次根式。

故选：D。

【点睛】本题考查同类二次根式的定义：化成最简二次根式后，被开方数相同。

2. $\sqrt{m+n}$ 的一个有理化因式是（ ）

- A. $\sqrt{m+n}$ B. $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ C. $\sqrt{m} - \sqrt{n}$ D. $\sqrt{m-n}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据有理化的定义以及二次根式的乘除法则解决此题。

【详解】解：A. $\because \sqrt{m+n} \cdot \sqrt{m+n} = m+n$ ，

$\therefore \sqrt{m+n}$ 就是 $\sqrt{m+n}$ 的一个有理化因式，故 A 符合题意；

B. $\because \sqrt{m+n}(\sqrt{m} + \sqrt{n}) = \sqrt{m^2 + mn} + \sqrt{mn + n^2}$ ，

$\therefore \sqrt{m} + \sqrt{n}$ 不是 $\sqrt{m+n}$ 的一个有理化因式，故 B 不符合题意；

C. $\because \sqrt{m+n}(\sqrt{m} - \sqrt{n}) = \sqrt{m^2 + mn} - \sqrt{mn + n^2}$ ，

$\therefore \sqrt{m} - \sqrt{n}$ 不是 $\sqrt{m+n}$ 的一个有理化因式，故 C 不符合题意；

$$D. \because \sqrt{m+n} \cdot \sqrt{m-n} = \sqrt{m^2 - n^2},$$

$\therefore \sqrt{m-n}$ 不是 $\sqrt{m+n}$ 的一个有理化因式，故 D 不符合题意；

故选：A.

【点睛】 本题主要考查分母有理化，熟练掌握有理化的定义以及二次根式的乘除法则是解决本题的关键.

3. 下列方程中是一元二次方程的是 ()

A. $2x+1=0$

B. $y^2+x=1$

C. $x^2+1=0$

D. $\frac{1}{x}+x^2=1$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据“只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程”，对照四个选项即可得出结论.

【详解】 解： A. $2x+1=0$ 未知数的最高次数是 1，不是一元二次方程，故此选项不符合题意；

B. $y^2+x=1$ 含有两个未知数，此方程不是一元二次方程，故此选项不符合题意；

C. $x^2+1=0$ 是一元二次方程，故此选项符合题意；

D. $\frac{1}{x}+x^2=1$ 等式左边不是整式，此方程不是一元二次方程，故此选项不符合题意；

故选：C.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的定义，牢记“只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程”是解题的关键.

4. 若关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2+x+a^2+3a-4=0$ 的一个根是 0，则 a 的值是 ()

A. $a=-4$ 或 1

B. $a=-4$

C. $a=1$

D. $a=0$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的解的定义，把 $x=0$ 代入 $(a-1)x^2+x+a^2+3a-4=0$ 得 $a^2+3a-4=0$ ，再解关于 a 的方程，然后利用一元二次方程的定义确定 a 的值.

【详解】 解：把 $x=0$ 代入 $(a-1)x^2+x+a^2+3a-4=0$ ，得 $a^2+3a-4=0$ ，

解得 $a=1$ 或 $a=-4$ ，

而 $a-1 \neq 0$ ，

所以 a 的值为 -4 .

故选：B.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解．

5. 下列命题是真命题的是（ ）

- A. 三角形的外角大于它的任何一个内角
- B. 有两边及一角对应相等的两个三角形全等
- C. 等腰三角形一边上的中线也是这边上的高
- D. 等边三角形是轴对称图形

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据三角形的外角的性质，全等三角形的判定，轴对称图形的定义一一判断即可．

【详解】 解：A、三角形的外角大于它的任何一个内角，错误，应该是三角形的外角大于它的任何一个和它不相邻的内角，本选项不符合题意；

B、有两边及一角对应相等的两个三角形全等，错误，应该是有两边及其夹角对应相等的两个三角形全等，本选项不符合题意；

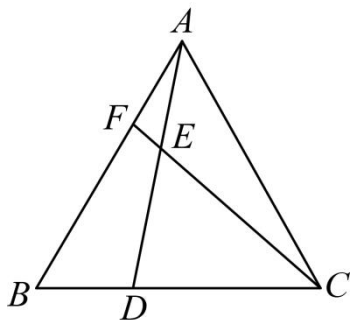
C、等腰三角形一边上的中线也是这边上的高，错误，应该是等腰三角形底边上的中线也是这边上的高，本选项不符合题意；

D、等边三角形是轴对称图形，正确，本选项符合题意；

故选：D．

【点睛】 本题考查命题与定理，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型．

6. 如图，等边 $\triangle ABC$ 中 D 和 F 分别为 BC 、 AB 边上的点，且 $DB = FA$ ， AD 和 CF 交于点 E ，则 $\angle DEC$ 的度数为（ ）



- A. 50° B. 55° C. 60° D. 65°

【答案】 C

【解析】

【分析】 先根据等边三角形的性质得到 $AB = AC$ ， $\angle B = \angle BAC = 60^\circ$ ，再证明 $\triangle ABD \cong \triangle CAF$ 得到

$\angle BAD = \angle ACF$ ，然后利用等量代换得到 $\angle DEC = \angle CAF = 60^\circ$ 。

【详解】解：∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形，

∴ $AB = AC$ ， $\angle B = \angle BAC = 60^\circ$ ，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CAF$ 中，

$$\begin{cases} AB = CA \\ \angle B = \angle CAF, \\ BD = AF \end{cases}$$

∴ $\triangle ABD \cong \triangle CAF (SAS)$ ，

∴ $\angle BAD = \angle ACF$ ，

∴ $\angle DEC = \angle EAC + \angle ACE = \angle EAC + \angle EAF = \angle CAF = 60^\circ$ 。

故选：C。

【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质：全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具。在判定三角形全等时，关键是选择恰当的判定条件。也考查了等边三角形的性质。

二、填空题

7. 当 x _____ 时，二次根式 $\sqrt{1-x}$ 有意义。

【答案】 ≤ 1

【解析】

【分析】根据二次根式的性质，被开方数大于或等于 0，即可求出 x 的范围。

【详解】解：根据题意，得： $1-x \geq 0$ ，

解得： $x \leq 1$ 。

故答案为： ≤ 1 。

【点睛】本题考查二次根式有意义的条件，掌握二次根式中的被开方数必须是非负数是解题的关键。

8. 若 $m < 0$ ，化简： $\sqrt{-m^2n} =$ _____。

【答案】 $-m\sqrt{-n}$

【解析】

【分析】根据二次根式的性质，化简即可。

【详解】解： $\sqrt{-m^2n} = |m|\sqrt{-n}$ ，

∵ $m < 0$ ，

∴ $|m|\sqrt{-n} = -m\sqrt{-n}$ 。

故答案为： $-m\sqrt{-n}$.

【点睛】此题主要考查了二次根式的性质与化简，正确应用二次根式的性质是解题关键.

9. 计算： $(2\sqrt{5}-1)^2 =$ _____.

【答案】 $21-4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】利用完全平方公式，进行计算即可解答.

【详解】解： $(2\sqrt{5}-1)^2 = (2\sqrt{5})^2 - 4\sqrt{5} + 1 = 21 - 4\sqrt{5}$,

故答案为： $21-4\sqrt{5}$.

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算，熟练掌握完全平方公式是解题的关键.

10. 不等式 $\sqrt{3}x > \sqrt{5}x + 1$ 的解集是_____.

【答案】 $x < -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】首先移项，然后合并，最后化系数为1即可求解.

【详解】解： $\sqrt{3}x > \sqrt{5}x + 1$,

移项合并同类项得： $(\sqrt{3}-\sqrt{5})x > 1$,

系数化为1得： $x < -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$,

故答案为： $x < -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$.

【点睛】本题考查了解简单不等式的能力，解答这类题时学生往往在解题时不注意移项要改变符号这一点而出错.

11. 方程 $x(x-1) = 2(x-1)$ 的根为_____.

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = 2$

【解析】

【分析】利用因式分解法解一元二次方程即可得.

【详解】 $x(x-1) = 2(x-1)$,

$$x(x-1)-2(x-1)=0,$$

$$(x-1)(x-2)=0,$$

$$x-1=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

$$x=1 \text{ 或 } x=2,$$

$$\text{即 } x_1=1, x_2=2,$$

故答案为: $x_1=1, x_2=2$.

【点睛】 本题考查了解一元二次方程, 主要解法包括: 直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法、换元法等, 熟练掌握各解法是解题关键.

12. 一元二次方程 $3x^2=2$ 的根的情况是_____.

【答案】 有两个不相等的实数根

【解析】

【分析】 先化成一般式再求根的判别式的值, 然后根据根的判别式的意义判断方程根的情况.

【详解】 解: $3x^2-2=0$

$$\therefore a=3, b=0, c=-2$$

$$\therefore \Delta=0^2-4\times 3\times (-2)=24>0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.

故答案为: 有两个不相等的实数根.

【点睛】 本题考查了根的判别式: 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根与 $\Delta=b^2-4ac$ 有如下关系:

当 $\Delta>0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta=0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta<0$ 时, 方程无实数根.

13. 某型号的手机原来每台售价 800 元, 经过两次降价, 且每次降价的百分率相同, 现在每台售价为 578 元, 则每次降价的百分率是_____.

【答案】 15%

【解析】

【分析】 设每次降价百分率为 x , 根据原来每台售价 800 元, 经过两次降价, 且每次降价的百分率相同, 现在每台售价为 578 元, 列方程即可.

【详解】 解: 设每次降价百分率为 x ,

$$\text{由题意得: } 800(1-x)^2=578,$$

解得: $x_1 = 0.15 = 15\%$, $x_2 = 1.85$ (舍),

$\therefore$ 每次降价的百分率是 15% ,

故答案为: 15% .

【点睛】本题考查理一元二次方程的应用, 是个增长率问题, 根据两次降价前的结果, 和现在的价格, 列出方程是关键.

14. 等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角是 20° , 则等腰三角形的顶角等于_____.

【答案】 110° 或 70°

【解析】

【分析】等腰三角形的高相对于三角形有三种位置关系: 三角形内部; 三角形的外部; 三角形的边上. 根据条件可知第三种高在三角形的边上这种情况不成立, 因而应分两种情况进行讨论.

【详解】当高在三角形内部时 (如图 1), $\angle ABD = 20^\circ$,

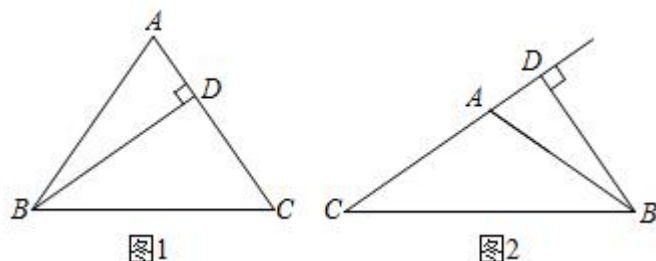
$\therefore \angle A = 90^\circ - \angle ABD = 70^\circ$,

$\therefore$ 顶角是 70° ;

当高在三角形外部时 (如图 2), $\angle ABD = 20^\circ$,

$\therefore \angle CAB = 90^\circ + \angle ABD = 110^\circ$,

$\therefore$ 顶角是 110° .



故答案为: 70° 或 110° .

【点睛】此题主要考查等腰三角形的性质, 熟记三角形的高相对于三角形的三种位置关系是解题的关键, 本题易出现的错误是只是求出 70° 一种情况, 把三角形简单的认为是锐角三角形. 因此此题属于易错题.

15. 把命题“等角的余角相等”改写成“如果……, 那么……”的形式是_____.

【答案】 如果两个角是两个相等的角的余角, 那么这两个角相等

【解析】

【分析】命题有题设和结论两部分组成, 通常写成“如果…那么…”的形式. “如果”后面接题设, “那么”后面接结论.

【详解】解: 根据命题可得: “如果两个角是两个相等的角的余角, 那么这两个角相等.”

故答案为: 如果两个角是两个相等的角的余角, 那么这两个角相等.

【点睛】 本题考查命题的定义，根据命题的定义，命题有题设和结论两部分组成.

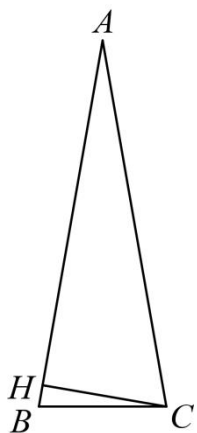
16. 已知：在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， CH 是边 AB 上的高， $\angle ACH = 80^\circ$ ，则 $\angle BAC$ 的度数为 _____.

【答案】 10° 或 170°

【解析】

【分析】 分两种情况讨论：当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，再结合三角形的内角和定理与三角形的外角的性质可得答案.

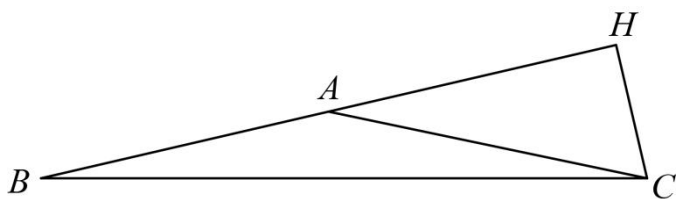
【详解】 解：如图，当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，



$\therefore CH$ 是边 AB 上的高， $\angle ACH = 80^\circ$ ，

$\therefore \angle AHC = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$ ，

如图，当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，



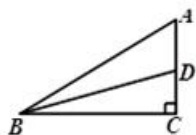
$\therefore CH$ 是边 AB 上的高， $\angle ACH = 80^\circ$ ，

$\therefore \angle AHC = 90^\circ$ ， $\angle BAC = \angle AHC + \angle ACH = 90^\circ + 80^\circ = 170^\circ$ ，

故答案为： 10° 或 170°

【点睛】 本题考查的是三角形高的含义，三角形的内角和定理与三角形外角的性质，清晰的分类讨论是解本题的关键.

17. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于 D ，若 $CD = 2$ ， $AB = 6$ ，则 $\triangle ABD$ 的面积是 _____.

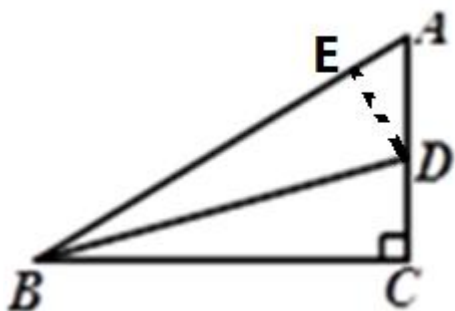


【答案】 6

【解析】

【分析】过点 D 作 $DE \perp AB$ ，垂足为 E ，利用角平分线的性质，即可得到 DE 的长，再利用三角形面积公式即可求得答案.

【详解】如图过点 D 作 $DE \perp AB$ ，垂足为 E ，



$\because \angle C = 90^\circ$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，

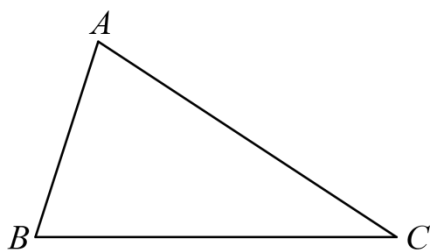
$\therefore ED = CD = 2$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot ED = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$$

故填：6.

【点睛】本题考查角平分线的性质，能根据角平分线上的点到角两边距离相等得出 $ED = CD$ 是解决此题的关键.

18. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 逆时针旋转，使点 B 恰好落在 BC 边上，得 $\triangle AB'C'$ ，如果 $\angle BAB' = 36^\circ$ ，那么 $\angle ABC =$ _____.

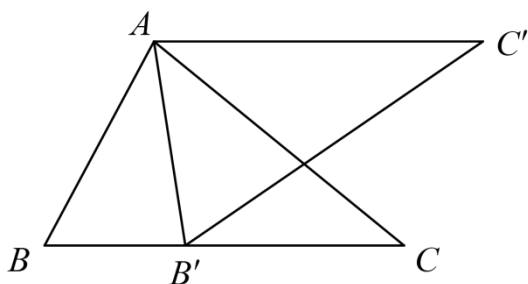


【答案】 72° ## 72 度

【解析】

【分析】根据旋转性质可得 $AB = AB'$ ，可得 $\angle ABC = \angle AB'B$ ，即可求出答案.

【详解】解：



由旋转性质可得： $AB = AB'$,

$$\therefore \angle BAB' = 36^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle AB'B = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ ,$$

故答案为： 72° .

【点睛】 本题考查了旋转的性质： 对应点到旋转中心的距离相等； 对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角； 旋转前、后的图形全等.

三、简答题

19. 计算： $\sqrt{50} - \frac{2}{3}\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{\frac{1}{8}}$

【答案】 $\frac{19\sqrt{2}}{4} + 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 先把各二次根式化为最简二次根式， 再进行计算；

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } & \sqrt{50} - \frac{2}{3}\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{\frac{1}{8}} \\ &= 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{19\sqrt{2}}{4} + 2\sqrt{3} . \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查的是二次根式的加减混合运算， 在进行此类运算时一般先把二次根式化为最简二次根式的形式后再运算.

20. 计算： $\frac{2}{b}\sqrt{ab^3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^2b}\right) \div 3\sqrt{\frac{b}{a}}$

【答案】 $-a^2\sqrt{b}$

【解析】

【分析】先确定结果的符号，再把除法化为乘法，最后进行化简.

$$\begin{aligned} \text{【详解】} & \frac{2}{b}\sqrt{ab^3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^2b}\right) \div 3\sqrt{\frac{b}{a}} \\ &= -\frac{2}{b} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{ab^3 \cdot a^2b \cdot \frac{a}{b}} \\ &= -\frac{1}{b} \sqrt{a^4b^3} \\ &= -\frac{1}{b} \cdot a^2b\sqrt{b} \\ &= -a^2\sqrt{b}. \end{aligned}$$

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算，掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

21. 解不等式: $2(x+1) < \sqrt{6}(x-1)$

【答案】 $x > 5 + 2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】按照去括号，移项，合并同类项，系数化为1的步骤解不等式即可.

【详解】解: $2(x+1) < \sqrt{6}(x-1)$

去括号得: $2x+2 < \sqrt{6}x - \sqrt{6}$,

移项得: $2x - \sqrt{6}x < -\sqrt{6} - 2$,

合并同类项得: $(2 - \sqrt{6})x < -\sqrt{6} - 2$,

系数化为1得: $x > \frac{-\sqrt{6}-2}{2-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2} = \frac{(\sqrt{6}+2)^2}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} = \frac{10+4\sqrt{6}}{2} = 5+2\sqrt{6}$.

【点睛】本题主要考查了解一元一次不等式，分母有理化，熟知解一元一次不等式的步骤是解题的关键.

22. 在实数范围内分解因式: $-2x^2 + 3xy + 4y^2$

【答案】 $-2(x - \frac{3+\sqrt{41}}{4}y)(x - \frac{3-\sqrt{41}}{4}y)$

【解析】

【分析】令 $-2x^2 + 3xy + 4y^2 = 0$ ，将 y 看作常数解得 x 的值，继而求得答案.

【详解】解: 令 $-2x^2 + 3xy + 4y^2 = 0$ ，将 y 看作常数，

则 $a = -2$, $b = 3y$, $c = 4y^2$,

那么 $\Delta = (3y)^2 - 4 \times (-2) \times 4y^2 = 41y^2 \geq 0$,

$$\text{则 } x = \frac{-3y \pm \sqrt{41y^2}}{2 \times (-2)} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}y,$$

$$\text{那么原式} = -2\left(x - \frac{3 + \sqrt{41}}{4}y\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{41}}{4}y\right).$$

【点睛】本题主要考查了多项式的因式分解，一元二次方程的解法，令 $-2x^2 + 3xy + 4y^2 = 0$ ，将 y 看作常数解得 x 的值，是解题的关键。

23. 解方程: $2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 3$

【答案】 $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】

【分析】方程整理后，利用平方根定义开方即可求出解；

【详解】解: $2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 3$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore x + \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

【点睛】此题考查利用平方根解方程，熟练掌握平方根的定义是解本题的关键。

24. 用配方法解方程: $3x^2 + 6x - 1 = 0$

【答案】 $x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$

【解析】

【分析】先将二次项系数化为 1，然后根据配方法，可即答案。

【详解】解: $x^2 + 2x - \frac{1}{3} = 0$

$$x^2 + 2x + 1 = 1 + \frac{1}{3}$$

$$(x+1)^2 = \frac{4}{3}$$

$$x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$$

$$\text{故答案为 } x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$$

【点睛】 本题考查了配方法解一元二次方程，解题时要注意解题步骤的准确应用．选择用配方法解一元二次方程时，最好使方程的二次项的系数为 1，一次项的系数是 2 的倍数．

25. 化简求值：已知 $a = \frac{1}{\sqrt{2}-1}, b = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ，求 $\left[\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - (\sqrt{b}-\sqrt{a}) \right] \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})$ 的值．

【答案】 $2a + 2\sqrt{ab}$ ； $2\sqrt{2} + 4$

【解析】

【分析】 先根据二次根式的运算法则化简，再代入 a,b 即可求解．

$$\begin{aligned} \text{【详解】} & \left[\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - (\sqrt{b}-\sqrt{a}) \right] \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b}) \\ &= \left[\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - (\sqrt{b}-\sqrt{a}) \right] \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b}) \\ &= \left[(\sqrt{a}+\sqrt{b}) - (\sqrt{b}-\sqrt{a}) \right] \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b}) \\ &= 2\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b}) \\ &= 2a + 2\sqrt{ab} \\ \because a &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1, b = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \\ \therefore \text{原式} &= 2(\sqrt{2}+1) + 2\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} \\ &= 2\sqrt{2} + 2 + 2 \\ &= 2\sqrt{2} + 4. \end{aligned}$$

【点睛】 此题主要考查二次根式的运算，解题的关键是熟知其运算法则．

四、解答题

26. 已知关于 x 的方程 $\frac{m}{4}x^2 - mx = x - m$.

- (1) 有两个不相等的实数根, 求 m 的取值范围;
- (2) 有两个相等的实数根, 求 m 的值, 并求出此时方程的根;
- (3) 有实根, 求 m 的最小整数值.

【答案】(1) $m > -\frac{1}{2}$ 且 $m \neq 0$

(2) $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = x_2 = -2$

(3) 0

【解析】

【分析】(1) 分两种情况讨论: 当 $m = 0$ 时, $\frac{m}{4}x^2 - mx = x - m$ 变成 $x = 0$; 当 $m \neq 0$ 时, $\frac{m}{4}x^2 - mx = x - m$ 是一元二次方程, 根据方程根的情况可得 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 求解即可;

(2) 当 $m = 0$ 时, $\frac{m}{4}x^2 - mx = x - m$ 变成 $x = 0$; 当 $m \neq 0$ 时, $\frac{m}{4}x^2 - mx = x - m$ 是一元二次方程, 根据方程根的情况可得 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 求解即可;

(3) 当 $m = 0$ 时, $\frac{m}{4}x^2 - mx = x - m$ 变成 $x = 0$; 当 $m \neq 0$ 时, $\frac{m}{4}x^2 - mx = x - m$ 是一元二次方程, 根据方程根的情况可得 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, 求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\frac{m}{4}x^2 - mx = x - m$,

移项合并同类项得: $\frac{m}{4}x^2 - (m+1)x + m = 0$,

当 $m \neq 0$ 时, $\frac{m}{4}x^2 - mx = x - m$ 是一元二次方程,

由题意得: $\Delta = b^2 - 4ac = [-(m+1)]^2 - 4 \times \frac{m}{4} \times m > 0$,

解得: $m > -\frac{1}{2}$;

当 $m = 0$ 时, $\frac{m}{4}x^2 - mx = x - m$ 变成 $x = 0$, 只有一个实数根, 不符合题意;

$\therefore m$ 的取值范围是 $m > -\frac{1}{2}$ 且 $m \neq 0$;

【小问 2 详解】

解：当 $m=0$ 时， $\frac{m}{4}x^2 - mx = x - m$ 变成 $x=0$ ，只有一个实数根，不符合题意；

当 $m \neq 0$ 时， $\frac{m}{4}x^2 - mx = x - m$ 是一元二次方程，

由题意得： $\Delta = b^2 - 4ac = [-(m+1)]^2 - 4 \times \frac{m}{4} \times m = 0$ ，

解得： $m = -\frac{1}{2}$ ，

把 $m = -\frac{1}{2}$ 代入 $\frac{m}{4}x^2 - mx = x - m$ 得： $-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ ，

整理得： $x^2 + 4x + 4 = 0$ ，

解得： $x_1 = x_2 = -2$ ；

【小问 3 详解】

解：当 $m=0$ 时， $\frac{m}{4}x^2 - mx = x - m$ 变成 $x=0$ ，有一个实数根，符合题意，

当 $m \neq 0$ 时， $\frac{m}{4}x^2 - mx = x - m$ 是一元二次方程，

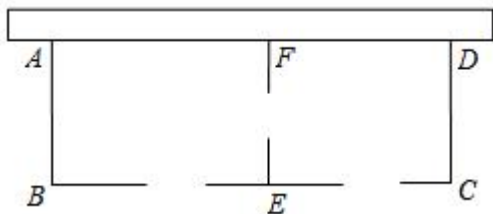
由题意得： $\Delta = b^2 - 4ac = [-(m+1)]^2 - 4 \times \frac{m}{4} \times m \geq 0$ ，

解得： $m \geq -\frac{1}{2}$ ，

$\therefore m$ 的最小整数值是 0；

【点睛】本题考查一元二次方程根的判别式，掌握 $\Delta = b^2 - 4ac$ 与一元二次方程根的情况是解题的关键。

27. 如图利用长 25 米的一段围墙，用篱笆围一个长方形的场地做鸡场，中间用篱笆分割出 2 个小长方形，与墙平行的一边上和中间用篱笆的隔离各开一扇宽为 1 米的门，总共用去篱笆的长度为 51 米，为了使这个长方形 $ABCD$ 的面积为 216 平方米，求 AB, BC 边各为多少米？



【答案】 AB 边为 12 米， BC 边为 18 米

【解析】

【分析】设 AB 的长为 x 米，根据题意列出一元二次方程，求解并找到符合题意的解即可。

【详解】设 AB 的长为 x 米，根据题意得

$$x(51+3-3x)=216,$$

解得 $x_1=6, x_2=12$,

当 $x=6$ 时, $BC=51+3-3\times 6=36>25$, 不符合题意, 故舍去;

当 $x=12$ 时, $BC=51+3-3\times 12=18<25$, 符合题意,

$\therefore AB=12, BC=18$,

$\therefore AB$ 边为 12 米, BC 边为 18 米.

【点睛】本题主要考查一元二次方程的应用, 根据题意列出方程并找到合适的解是关键.

28. 如图, 已知, $\triangle ABC$ 是等边三角形, CE 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACM$ 的平分线, 点 D 为射线 BC 上一点, 且 $\angle ADE = \angle ABC$, DE 与 CE 相交于点 E .

(1) 如图 1, 如果点 D 在边 BC 上, 求证: $AD = DE$;

(2) 如图 2, 如果点 D 在边 BC 的延长线上, 那么 (1) 中的结论 “ $AD = DE$ ” 还成立吗? 请说明理由;

(3) 如果 $\triangle ABC$ 的边长为 4, 且 $\angle DAC = 30^\circ$, 请直接写出线段 BD 的长度. (无需写出解题过程)

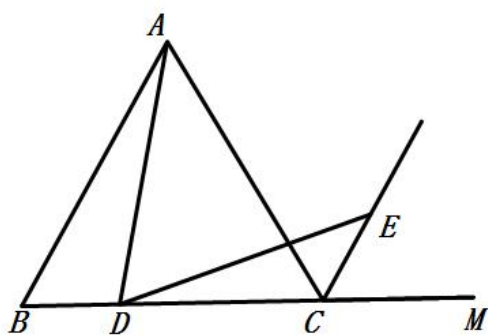


图 1

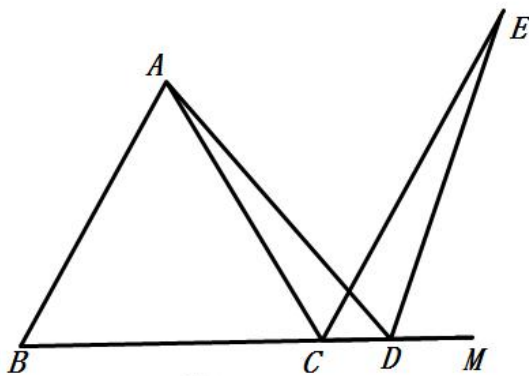


图 2

【答案】(1) 证明见解析; (2) 成立, 理由见解析; (3) 2 或 8.

【解析】

【分析】(1) 如图 1 (见解析), 先根据等边三角形的判定与性质可得 $AF = DC$, $\angle BFD = 60^\circ$, 再根据角平分线的定义、角的和差可得 $\angle DCE = \angle AFD = 120^\circ$, 然后根据三角形的外角性质、等量代换可得 $\angle DAF = \angle EDC$, 最后根据三角形全等的判定定理与性质即可得证;

(2) 如图 2 (见解析), 先根据等边三角形的判定与性质可得 $AF = DC$, $\angle F = 60^\circ$, 再根据角平分线的定义、角的和差可得 $\angle DCE = \angle F = 60^\circ$, 然后根据三角形的外角性质、等量代换可得 $\angle DAF = \angle EDC$, 最后根据三角形全等的判定定理与性质即可得证;

(3) 如图 3-1 和 3-2 (见解析), 分点 D 在边 BC 上和点 D 在边 BC 的延长线上两种情况, 再分别利用等边三角形的性质、等腰三角形的性质即可得.

【详解】(1) 如图 1, 在 AB 上取一点 F, 使 $BF = BD$, 连接 DF,

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore AB = BC, \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\therefore AB - BF = BC - BD, \text{ 即 } AF = DC,$$

$\because BF = BD, \angle ABC = 60^\circ,$

$\therefore \triangle BDF$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle BFD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AFD = 180^\circ - \angle BFD = 120^\circ,$$

$\because \angle ACB = 60^\circ,$

$$\therefore \angle ACM = 180^\circ - \angle ACB = 120^\circ,$$

$\because CE$ 平分 $\angle ACM,$

$$\therefore \angle ACE = \frac{1}{2} \angle ACM = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle ACB + \angle ACE = 120^\circ = \angle AFD,$$

$\because \angle ADE = \angle ABC,$

$$\therefore \angle ADC = \angle ADE + \angle EDC = \angle ABC + \angle EDC,$$

又 $\because \angle ADC = \angle ABC + \angle DAF,$

$$\therefore \angle DAF = \angle EDC,$$

$$\text{在 } \triangle ADF \text{ 和 } \triangle DEC \text{ 中, } \begin{cases} \angle AFD = \angle DCE \\ AF = DC \\ \angle DAF = \angle EDC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle DEC (ASA),$$

$$\therefore AD = DE;$$

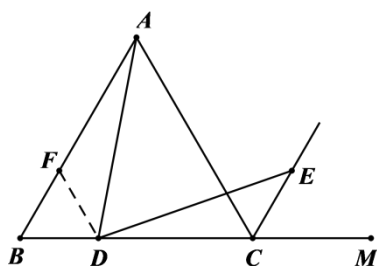


图1

(2) 成立, 理由如下:

如图 2, 延长 BA, 使 $BF = BD$, 连接 DF,

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore AB = BC, \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\therefore BF - AB = BD - BC, \text{ 即 } AF = DC,$$

$$\because BF = BD, \angle ABC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle BDF$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle F = 60^\circ,$$

$\because CE$ 平分 $\angle ACM$,

$$\therefore \angle DCE = \frac{1}{2} \angle ACM = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle F = \angle DCE,$$

$$\therefore \begin{cases} \angle DAF = \angle ABC + \angle BAD = \angle ADE + \angle BAD \\ \angle EDC = \angle ADE + \angle BAD \end{cases},$$

$$\therefore \angle DAF = \angle EDC,$$

$$\text{在 } \triangle ADF \text{ 和 } \triangle DEC \text{ 中, } \begin{cases} \angle F = \angle DCE \\ AF = DC \\ \angle DAF = \angle EDC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle DEC (ASA),$$

$$\therefore AD = DE;$$

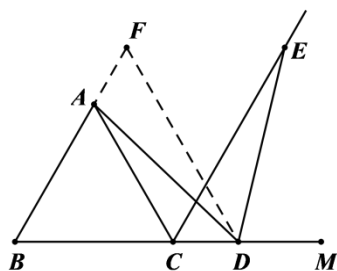


图2

(3) $\because \triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形,

$$\therefore AC = BC = 4, \angle BAC = \angle ACB = 60^\circ,$$

由题意, 分以下两种情况:

①如图 3-1, 当点 D 在边 BC 上时,

$$\because \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC, \text{ 即 } AD \text{ 是 } \angle BAC \text{ 的角平分线,}$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 4 = 2;$$

②如图 3-2, 当点 D 在边 BC 的延长线上时,

$$\because \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ACB - \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle DAC,$$

$$\therefore CD = AC = 4,$$

$$\therefore BD = BC + CD = 4 + 4 = 8;$$

综上, 线段 BD 的长为 2 或 8.

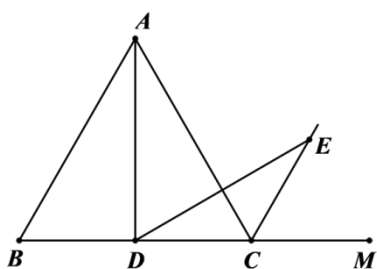


图3-1

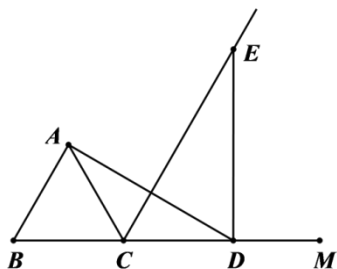


图3-2

【点睛】 本题考查了等边三角形的判定与性质、三角形全等的判定定理与性质、角平分线的定义、三角形的外角性质等知识点, 通过作辅助线, 构造等边三角形和全等三角形是解题关键.