

2022 学年第一学期初二数学 9 月阶段练习卷

(满分: 100 分, 考试时间: 90 分钟, 本次练习不得使用计算器, 答案写在答题纸上)

一、填空题. (共 19 空, 每空 2 分, 共 38 分)

1. 在 $\sqrt{0.2}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{a}{2}}$, $\sqrt{a^2b}$ 中, 最简二次根式有_____个.

【答案】 1

【解析】

【分析】 根据最简二次根式的定义逐个判断即可.

【详解】 解: $\sqrt{0.2}$ 的被开方数 0.2 是小数, 故 $\sqrt{0.2}$ 不是最简二次根式,

$\sqrt{12}$ 的被开方数 12 可以分解成 $3 \times 4 = 3 \times 2^2$, 则 12 含有开得尽方的因数 4, 故 12 不是最简二次根式,

$\sqrt{5}$ 是最简二次根式,

$\sqrt{\frac{a}{2}}$ 的被开方数 $\frac{a}{2}$ 含有分母, 故 $\sqrt{\frac{a}{2}}$ 不是最简二次根式,

$\sqrt{a^2b}$ 被开方数 a^2b 含有开得尽方的因式 a^2 , 故 $\sqrt{a^2b}$ 不是最简二次根式,

$\therefore$ 最简二次根式有 1 个.

故答案为: 1.

【点睛】 本题考查了最简二次根式的定义, 能熟记最简二次根式的定义是解此题的关键, 具备以下两个条件的二次根式, 叫最简二次根式: ①被开方数中的因数是整数, 因式是整式, ②被开方数中不含有能开得尽方的因数和因式.

2. 在二次根式① $\sqrt{8}$; ② $\frac{1}{3}\sqrt{75a}$; ③ $\frac{2}{3}\sqrt{9a}$; ④ $\sqrt{125}$; ⑤ $\frac{2}{3}\sqrt{3a^3}$ 中, 与 $\sqrt{3a}$ 是同类二次根式的有_____. (填写编号)

【答案】 ②⑤##⑤②

【解析】

【分析】 先将各项化简成最简二次根式, 再利用同类二次根式的性质判断即可作答.

【详解】 ① $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

② $\frac{1}{3}\sqrt{75a} = \frac{5}{3}\sqrt{3a}$;

$$\textcircled{3} \frac{2}{3} \sqrt{9a} = 2\sqrt{a};$$

$$\textcircled{4} \sqrt{125} = 5\sqrt{5};$$

$$\textcircled{5} \frac{2}{3} \sqrt{3a^3} = \frac{2a}{3} \sqrt{3a};$$

与 $\sqrt{3a}$ 的被开方数相同的是②和⑤,

故答案为: ②⑤.

【点睛】此题主要考查了同类二次根式的定义, 正确化简二次根式是解题关键. 同类二次根式的定义: 一般地, 把几个二次根式化为最简二次根式后, 如果它们的被开方数相同, 就把这几个二次根式叫做同类二次根式.

3. 使代数式 $\frac{\sqrt{x+2}}{x+1}$ 有意义的 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq -2$ 且 $x \neq -1$

【解析】

【分析】本题含有二次根式也有分式, 先考虑二次根式被开方数 $x+2 \geq 0$, 再保证分式分母 $\neq 0$, 解出不等式即可.

【详解】解: $\because$ 代数式 $\frac{\sqrt{x+2}}{x+1}$ 有意义,

$$\therefore \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore x \geq -2 \text{ 且 } x \neq -1;$$

故答案为: $x \geq -2$ 且 $x \neq -1$.

【点睛】此题考查了分式, 二次根式有意义的条件, 关键是把握二次根式中被开方数是非负数, 再保证分母 $\neq 0$, 解出不等式即可.

4. 若 x, y 满足 $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{6-2x} + 6$, 则 $x \cdot y$ 的平方根为_____.

【答案】 $\pm 3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】依据二次根式有意义的条件: 被开方数为非负数可求得 $x=3$, 从而求得 $y=6$, 然后进行计算即可.

【详解】解： $\because y = \sqrt{x-3} + \sqrt{6-2x} + 6$,

$$\therefore \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 6-2x \geq 0 \end{cases},$$

解得： $x = 3$,

$$\therefore y = 6,$$

$$\therefore x \cdot y = 18,$$

$$\therefore 18 \text{ 的平方根为 } \pm 3\sqrt{2},$$

$$\therefore x \cdot y \text{ 的平方根为 } \pm 3\sqrt{2},$$

故答案为： $\pm 3\sqrt{2}$.

【点睛】 本题主要考查的是二次根式有意义的条件，由二次根式的被开放数为非负数求得 x 、 y 的值是解题的关键.

5. 将 $x\sqrt{-\frac{6}{x^3}}$ 根号外的因式移到根号内： _____

【答案】 $-\sqrt{-\frac{6}{x}}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质，得 $-\frac{6}{x^3} \geq 0$ ，结合乘方的性质，推导得 $x < 0$ ，再根据二次根式的性质计算，即可得到答案.

【详解】 根据题意，得 $-\frac{6}{x^3} \geq 0$

$$\therefore -6 \neq 0$$

$$\therefore -\frac{6}{x^3} > 0$$

$$\therefore x^3 < 0$$

$$\therefore x < 0$$

$$\therefore x\sqrt{-\frac{6}{x^3}} = -\sqrt{-\frac{6}{x^3} \times x^2} = -\sqrt{-\frac{6}{x}}$$

故答案为： $-\sqrt{-\frac{6}{x}}$.

【点睛】 本题考查了乘方、二次根式的知识；解题的关键是熟练掌握二次根式的性质，从而完成求解.

6. 化简 $\sqrt{9-6x+x^2} + (\sqrt{2x-7})^2 =$ _____.

【答案】 $3x-10$

【解析】

【分析】 先根据 $\sqrt{2x-7}$ 有意义，得到 $x \geq \frac{7}{2}$ ，再根据 $\sqrt{9-6x+x^2} + (\sqrt{2x-7})^2 = \sqrt{(x-3)^2} + 2x-7$ 求解即可.

【详解】 解： $\because \sqrt{2x-7}$ 有意义，

$$\therefore 2x-7 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq \frac{7}{2},$$

$$\therefore \sqrt{9-6x+x^2} + (\sqrt{2x-7})^2 = \sqrt{(x-3)^2} + 2x-7 = x-3+2x-7 = 3x-10,$$

故答案为： $3x-10$.

【点睛】 本题主要考查了二次根式有意义的条件，二次根式的化简，完全平方公式，解题的关键在于能够熟练掌握相关知识进行求解.

7. 不等式 $2\sqrt{3}x-6 < 3\sqrt{2}x$ 的解集是 ____.

【答案】 $x > -3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 先移项化为 $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})x > -6$ ，再把未知数的系数化“1”，可得答案.

【详解】 解： $2\sqrt{3}x-6 < 3\sqrt{2}x$

移项得： $3\sqrt{2}x-2\sqrt{3}x > -6$

即 $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})x > -6$,

而 $3\sqrt{2}-2\sqrt{3} > 0$,

$$\therefore x > \frac{-6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \frac{-6(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})} = -3\sqrt{2}-2\sqrt{3},$$

即 $x > -3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

故答案为： $x > -3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

【点睛】 本题考查的是一元一次不等式的解法，二次根式的除法运算，易错点是不等式的两边都除以一个

数时，不注意这个数是正数还是负数.

8. 化简: $-9\sqrt{\frac{3m^2-3n^2}{2a^2}} \div \frac{3}{2}\sqrt{\frac{m+n}{a^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{m-n}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-3\sqrt{6}|a|$

【解析】

【分析】 根据二次根式的混合运算法则化简求解即可.

【详解】 解: $-9\sqrt{\frac{3m^2-3n^2}{2a^2}} \div \frac{3}{2}\sqrt{\frac{m+n}{a^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{m-n}}$

$$= -9\sqrt{\frac{3m^2-3n^2}{2a^2}} \times \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a^2}{m+n}} \times \sqrt{\frac{a^2}{m-n}}$$
$$= -6\sqrt{\frac{3(m-n)}{2}} \times \sqrt{\frac{a^2}{m-n}}$$
$$= -6\sqrt{\frac{3a^2}{2}}$$
$$= -3\sqrt{6}|a|.$$

故答案: $-3\sqrt{6}|a|$

【点睛】 此题考查了二次根式的乘除运算，解题的关键是熟练掌握二次根式的乘除运算法则.

9. 比较大小 $\sqrt{m}-\sqrt{n}$ $\underline{\hspace{2cm}}$ $\sqrt{m+2013}-\sqrt{n+2013}$ ($m>n\geq 0$)

【答案】 $>$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质及 $m>n\geq 0$ 倒退回去即可求解.

【详解】 $\because$ 依题意有 $m>n\geq 0$,

$$\therefore \sqrt{m}>\sqrt{n}, \quad mn\geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{2013m}>\sqrt{2013n},$$

$$\text{则 } \sqrt{mn+2013m}>\sqrt{mn+2013n}, \text{ 即 } 2\sqrt{m(n+2013)}>2\sqrt{n(m+2013)},$$

$$\text{故 } m+n+2013+2\sqrt{m(n+2013)}>m+n+2013+2\sqrt{n(m+2013)},$$

$$\text{即 } \left(\sqrt{m}+\sqrt{n+2013}\right)^2 > \left(\sqrt{n}+\sqrt{m+2013}\right)^2 > 0,$$

$$\therefore m>n\geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{m} + \sqrt{n+2013} > 0, \quad \sqrt{n} + \sqrt{m+2013} > 0,$$

$$\therefore \sqrt{m} + \sqrt{n+2013} > \sqrt{n} + \sqrt{m+2013},$$

$$\text{故 } \sqrt{m} - \sqrt{n} > \sqrt{m+2013} - \sqrt{n+2013},$$

故答案为: $>$.

【点睛】此题主要考查二次根式的大小比较, 解题的关键是熟知二次根式及不等式的性质.

10. 已知 $\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 3\sqrt{b}(\sqrt{a} + 5\sqrt{b})$, 则 $\frac{2a+4b-\sqrt{ab}}{a-5b+\sqrt{2ab}}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{14}{5} - \frac{7}{10}\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先将 $\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 3\sqrt{b}(\sqrt{a} + 5\sqrt{b})$ 变形为 $a - 2\sqrt{ab} - 15b = 0$, 然后将左边因式分解得到

$$(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})(\sqrt{a} - 5\sqrt{b}) = 0, \text{ 从而得出 } \sqrt{a} = -3\sqrt{b} \text{ 或 } \sqrt{a} = 5\sqrt{b}, \text{ 再选择符合题意的等式代入 } \frac{2a+4b-\sqrt{ab}}{a-5b+\sqrt{2ab}}$$

求解即可.

【详解】解: 根据题意, 得 $a \geq 0, b \geq 0, ab \neq 0$,

$$\therefore \sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 3\sqrt{b}(\sqrt{a} + 5\sqrt{b}),$$

$$\therefore a - 2\sqrt{ab} - 15b = 0, \quad (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} - 15(\sqrt{b})^2 = 0,$$

$$\therefore (\sqrt{a} + 3\sqrt{b})(\sqrt{a} - 5\sqrt{b}) = 0,$$

$$\therefore \sqrt{a} = -3\sqrt{b} \text{ (不符合题意, 舍去) 或 } \sqrt{a} = 5\sqrt{b},$$

当 $\sqrt{a} = 5\sqrt{b}$ 时,

$$\frac{2a+4b-\sqrt{ab}}{a-5b+\sqrt{2ab}} = \frac{2(\sqrt{a})^2 + 4(\sqrt{b})^2 - \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - 5(\sqrt{b})^2 + \sqrt{2}\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}$$

$$= \frac{2(5\sqrt{b})^2 + 4(\sqrt{b})^2 - (5\sqrt{b}) \cdot \sqrt{b}}{(5\sqrt{b})^2 - 5(\sqrt{b})^2 + \sqrt{2}(5\sqrt{b}) \cdot \sqrt{b}}$$

$$= \frac{50b+4b-5b}{25b-5b+5\sqrt{2}b}$$

$$= \frac{49}{20+5\sqrt{2}}$$

$$= \frac{49(20-5\sqrt{2})}{(20-5\sqrt{2})(20+5\sqrt{2})}$$

$$= \frac{14}{5} - \frac{7}{10}\sqrt{2},$$

故答案为: $\frac{14}{5} - \frac{7}{10}\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算，解题的关键是求出 $\sqrt{a} = 5\sqrt{b}$.

11. 已知 $a^2b = 2400, ab^2 = 5760$, 求 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 的值=_____.

【答案】 26

【解析】

【分析】 先把两等式相乘和相加可得 $ab = 240$, $ab(a+b) = 8160$, 则可计算出 $a+b = 34$, 再根据完全平方公式变形得到 $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a+b)^2 - 2ab}$, 然后利用整体代入的方法计算.

【详解】 解: $\because a^2b = 2400, ab^2 = 5760$,

$$\therefore a^3b^3 = 2400 \times 57600 = 240^3, a^2b + ab^2 = 2400 + 5760,$$

$$\therefore ab = 240, ab(a+b) = 8160,$$

$$\therefore a+b = \frac{8160}{240} = 34,$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a+b)^2 - 2ab} = \sqrt{34^2 - 2 \times 240} = \sqrt{676} = 26$$

故填: 26.

【点睛】 本题考查了代数式求值，解题的关键是熟知完全平方公式的变形及整式的运算法则.

12. $\sqrt{14-4\sqrt{10}}$ 的整数部分为 a , 小数部分为 b , 则 $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{3}\sqrt{10} + 1$

【解析】

【分析】 先把 $\sqrt{14-4\sqrt{10}}$ 化简为 $\sqrt{10}-2$, 然后根据夹逼法求出 a, b 的值, 最后代入计算即可.

【详解】 解: $\sqrt{14-4\sqrt{10}} = \sqrt{10-4\sqrt{10}+4} = \sqrt{(\sqrt{10}-2)^2} = \sqrt{10}-2$,

$$\therefore 9 < 10 < 16,$$

$$\therefore 3 < \sqrt{10} < 4,$$

$$\therefore 1 < \sqrt{10}-2 < 2,$$

$\therefore \sqrt{10}-2$ 的整数部分为 1, 小数部分为 $\sqrt{10}-2-1=\sqrt{10}-3$,

即 $\sqrt{14-4\sqrt{10}}$ 整数部分为 1, 小数部分为 $\sqrt{10}-3$,

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} &= \frac{1}{1+\sqrt{10}-3} + \frac{1}{1-\sqrt{10}+3} \\&= \frac{1}{\sqrt{10}-2} + \frac{1}{4-\sqrt{10}} \\&= \frac{\sqrt{10}+2}{(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+2)} + \frac{4+\sqrt{10}}{(4-\sqrt{10})(4+\sqrt{10})} \\&= \frac{\sqrt{10}+2}{6} + \frac{4+\sqrt{10}}{6} \\&= \frac{1}{3}\sqrt{10}+1.\end{aligned}$$

故答案为: $\frac{1}{3}\sqrt{10}+1$

【点睛】 本题考查了无理数的估算, 二次根式的混合运算, 把 $\sqrt{14-4\sqrt{10}}$ 化简为 $\sqrt{10}-2$, 然后根据夹逼法求出 a, b 的值是解题的关键.

13. 化简: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} (1 < x < 2) =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 利用完全平方公式将二次根式化简, 然后根据不等式的性质判断 $\sqrt{x-1}-1$ 及 $\sqrt{x-1}+1$ 的符号, 去绝对值化简即可.

$$\begin{aligned}\text{【详解】 解: } &\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \\&= \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 + 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 - 2\sqrt{x-1} + 1} \\&= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \\&= |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| \\&\because 1 < x < 2, \\&\therefore 0 < x-1 < 1, \\&\therefore 0 < \sqrt{x-1} < 1,\end{aligned}$$

$$\therefore -1 < \sqrt{x-1} - 1 < 0, \quad \sqrt{x-1} + 1 > 0,$$

$$\therefore \text{原式} = \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} + 1$$

$$= 2,$$

故答案为: 2.

【点睛】题目主要考查二次根式的化简及完全平方公式，化简绝对值，熟练掌握二次根式的化简方法是解题关键.

14. 计算: $\frac{\sqrt{14} + \sqrt{26} - \sqrt{21} - \sqrt{39}}{\sqrt{14} + \sqrt{26} + \sqrt{21} + \sqrt{39}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2\sqrt{6} - 5$

【解析】

【分析】原式的分子与分母利用分组分解法分解因式，可约去公因式 $(\sqrt{7} + \sqrt{13})$ ，所得结果再分母有理化即可求出答案.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: 原式} &= \frac{\sqrt{14} - \sqrt{21} + \sqrt{26} - \sqrt{39}}{\sqrt{14} + \sqrt{21} + \sqrt{26} + \sqrt{39}} \\ &= \frac{\sqrt{7}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{13}(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{\sqrt{7}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{13}(\sqrt{2} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{13})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{13})} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{6} - 5. \end{aligned}$$

故答案为: $2\sqrt{6} - 5$.

【点睛】本题考查了二次根式的分母有理化及因式分解，原式的分子与分母利用分组分解法分解因式，从而约去公因式是解答的关键.

15. 计算: $\sqrt{11 + 2(1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{7})} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $1 + \sqrt{5} + \sqrt{7}$

【解析】

【分析】设 $\sqrt{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} (x > y > z > 0)$ ，两边平方并比较系数得 $x + y + z = 13$ ①， $xy = 5$ ②， $xz = 7$ ③， $yz = 35$ ④，消去 x, z ，求得 $y = 5$ ，据此求解即可。

【详解】解：设 $\sqrt{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} (x > y > z > 0)$ ，

两边平方得： $13 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{35} = x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}$

比较系数得： $x + y + z = 13$ ①， $xy = 5$ ②， $xz = 7$ ③， $yz = 35$ ④，

由②得 $x = \frac{5}{y}$ ，代入③得 $\frac{5z}{y} = 7$ ，即 $z = \frac{7y}{5}$ ，

代入④得 $y^2 = 5^2$ ，

$\therefore y = 5$ ，

$\therefore x = 1, z = 7$ ，

$\therefore$ 原式 $= 1 + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ ，

故答案为： $1 + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ 。

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算，完全平方公式，利用等式的性质是解题的关键。

16. 设 $x = \frac{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}$ ， $y = \frac{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}$ ，当 t 为_____时，代数式 $20x^2 + 62xy + 20y^2 = 2022$ 。

【答案】2

【解析】

【分析】根据 x, y 的表达式，可以观察出 $xy = 1$ ， $x + y = 2t + 2$ ，再将 $20x^2 + 62xy + 20y^2$ 改写为含有 $x + y$ 与 xy 的形式，代入解出 t 即可。

【详解】 $\because x = \frac{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}$ ， $y = \frac{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}$

$$\therefore x + y = \frac{(\sqrt{t+1}+\sqrt{t})^2 + (\sqrt{t+1}-\sqrt{t})^2}{(\sqrt{t+1}+\sqrt{t})(\sqrt{t+1}-\sqrt{t})} = \frac{2(t+1+t)}{t+1-t} = 4t + 2,$$

$$xy = \frac{(\sqrt{t+1}-\sqrt{t})(\sqrt{t+1}+\sqrt{t})}{(\sqrt{t+1}+\sqrt{t})(\sqrt{t+1}-\sqrt{t})} = 1$$

$$\therefore 20x^2 + 62xy + 20y^2 = 20x^2 + 40xy + 20y^2 + 22xy = 20(x+y)^2 + 22xy = 2022$$

$$\therefore 20(4t+2)^2 + 22 = 2022, \text{ 解得 } t_1 = -3 \text{ (舍去)}, t_2 = 2.$$

故答案为: 2

【点睛】本题考查乘法公式的运用, 熟练掌握乘法公式并能将二次三项式改写为含有 $x+y$ 与 xy 的形式, 是本题的解题关键.

17. 已知 $x = \frac{1}{\sqrt{2022} - \sqrt{2021}}$, 则 $x^6 - 2\sqrt{2021}x^5 - x^4 + x^3 - 2\sqrt{2022}x^2 + 2x - \sqrt{2022}$ 的值为

_____.

【答案】 $\sqrt{2021}$

【解析】

【分析】先对已知条件进行化简, 再依次代入所求的式子进行运算即可.

【详解】解: $\because x = \frac{1}{\sqrt{2022} - \sqrt{2021}},$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{2022} + \sqrt{2021}}{(\sqrt{2022} - \sqrt{2021})(\sqrt{2022} + \sqrt{2021})} = \sqrt{2022} + \sqrt{2021},$$

$$\therefore x^6 - 2\sqrt{2021}x^5 - x^4 + x^3 - 2\sqrt{2022}x^2 + 2x - \sqrt{2022}$$

$$= (\sqrt{2022} - \sqrt{2021})x^5 - x^4 + x^3 - 2\sqrt{2022}x^2 + 2x - \sqrt{2022}$$

$$= (\sqrt{2022} - \sqrt{2021})(\sqrt{2022} + \sqrt{2021})x^4 - x^4 + x^3 - \sqrt{\quad}x^2 + 2x - \sqrt{\quad}$$

$$= x^4 - x^4 + x^3 - 2\sqrt{2022}x^2 + 2x - \sqrt{2022}$$

$$= x^3 - 2\sqrt{2022}x^2 + 2x - \sqrt{2022}$$

$$= x^2(x - 2\sqrt{2022}) + 2x - \sqrt{2022}$$

$$= x^2(\sqrt{2021} - \sqrt{2022}) + 2x - \sqrt{2022}$$

$$= x(\sqrt{2021} + \sqrt{2022})(\sqrt{2021} - \sqrt{2022}) + 2x - \sqrt{2022}$$

$$= -x + 2x - \sqrt{2022}$$

$$= x - \sqrt{2022}$$

$$= \sqrt{2021}$$

故答案为: $\sqrt{2021}$

【点睛】 本题考查了二次根式的化简求值, 解题的关键是逐步把 $x = \sqrt{2022} - \sqrt{2021}$ 代入所求式子进行化简求值.

18. 小明在解方程 $\sqrt{24-x} - \sqrt{8-x} = 2$ 时采用了下面的方法: 由

$$(\sqrt{24-x} - \sqrt{8-x})(\sqrt{24-x} + \sqrt{8-x}) = (\sqrt{24-x})^2 - (\sqrt{8-x})^2 = (24-x) - (8-x) = 16,$$

$$\text{又有 } \sqrt{24-x} - \sqrt{8-x} = 2, \text{ 可得 } \sqrt{24-x} + \sqrt{8-x} = 8, \text{ 将这两式相加可得 } \begin{cases} \sqrt{24-x} = 5 \\ \sqrt{8-x} = 3 \end{cases},$$

将 $\sqrt{24-x} = 5$ 两边平方可解得 $x = -1$, 经检验 $x = -1$ 是原方程的解.

请你学习小明的方法, 解决下列问题:

(1) 已知 $\sqrt{22-a^2} - \sqrt{10-a^2} = 3\sqrt{2}$, 则 $\sqrt{22-a^2} + \sqrt{10-a^2}$ 的值为_____.

(2) 解方程 $\sqrt{4x^2+6x-5} + \sqrt{4x^2-2x-5} = 4x$, 得方程的解为_____.

【答案】 ①. $2\sqrt{2}$ ②. $x = 3$

【解析】

【分析】 (1) 根据题目所给方法, 可求 $(\sqrt{22-a^2} - \sqrt{10-a^2})(\sqrt{22-a^2} + \sqrt{10-a^2})$ 的值, 然后结合 $\sqrt{22-a^2} - \sqrt{10-a^2} = 3\sqrt{2}$, 即可求出 $\sqrt{22-a^2} + \sqrt{10-a^2}$ 的值;

(2) 根据题目所给方法, 可求 $\sqrt{4x^2+6x-5} = 2x+1$, 再解方程即可.

【详解】 解: (1)

$$(\sqrt{22-a^2} - \sqrt{10-a^2})(\sqrt{22-a^2} + \sqrt{10-a^2}) = (\sqrt{22-a^2})^2 - (\sqrt{10-a^2})^2 = (22-a^2) - (10-a^2) = 12,$$

$$\text{又 } \sqrt{22-a^2} - \sqrt{10-a^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore 3\sqrt{2}(\sqrt{22-a^2} + \sqrt{10-a^2}) = 12$$

$$\therefore \sqrt{22-a^2} + \sqrt{10-a^2} = 2\sqrt{2};$$

$$(2) (\sqrt{4x^2+6x-5} + \sqrt{4x^2-2x-5})(\sqrt{4x^2+6x-5} - \sqrt{4x^2-2x-5})$$

$$= (\sqrt{4x^2+6x-5})^2 - (\sqrt{4x^2-2x-5})^2$$

$$= (4x^2+6x-5) - (4x^2-2x-5)$$

$$= 8x,$$

$$\text{又 } \sqrt{4x^2 + 6x - 5} + \sqrt{4x^2 - 2x - 5} = 4x,$$

$$\therefore \sqrt{4x^2 + 6x - 5} - \sqrt{4x^2 - 2x - 5} = 2,$$

$$\text{两式相加, 得 } \sqrt{4x^2 + 6x - 5} = 2x + 1,$$

$$\text{两边同时平方, 得 } 4x^2 + 6x - 5 = (2x + 1)^2,$$

$$\text{解得 } x = 3,$$

经检验, $x = 3$ 是原方程的解.

故答案为: $2\sqrt{2}$; $x = 3$.

【点睛】本题考查了解无理方程, 熟练掌握无理方程的解法, 准确计算是解题的关键.

二、选择题. (共 4 题, 每题 3 分, 共 12 分)

19. 下列各式中, 从左到右的变形正确的是 ()

$$\text{A. } 5\sqrt{\frac{a}{5}} = \sqrt{5 \times \frac{a}{5}} = \sqrt{a}$$

$$\text{B. } a\sqrt{ab} = \sqrt{a^3b}$$

$$\text{C. } (a+b)\sqrt{a+b} = \sqrt{(a+b)^3}$$

$$\text{D. } (a-2)\sqrt{\frac{1}{2-a}} = \sqrt{\frac{(a-2)^2}{2-a}} = \sqrt{2-a}$$

【答案】C

【解析】

【分析】利用二次根式的性质进行化简进而得出答案.

【详解】解: A. $5\sqrt{\frac{a}{5}} = \sqrt{5^2 \times \frac{a}{5}} = \sqrt{5a}$, 不符合题意;

B. $a\sqrt{ab}$, a 的符号不确定, 需分情况, 不符合题意;

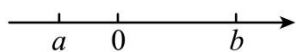
C. $(a+b)\sqrt{a+b} = \sqrt{(a+b)^3}$, 符合题意;

D. $(a-2)\sqrt{\frac{1}{2-a}} = -\sqrt{\frac{(a-2)^2}{2-a}} = -\sqrt{2-a}$, 不符合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查二次根式的性质与化简, 掌握二次根式的性质是解决问题的关键.

20. 设实数 a, b 在数轴上对应的位置如图所示, 化简 $\sqrt{a^2} + |a+b|$ 的结果是 ()



$$\text{A. } -2a+b$$

$$\text{B. } 2a+b$$

$$\text{C. } -b$$

$$\text{D. } b$$

【答案】D

【解析】

【详解】根据数轴可得： $a < 0$ ， $a+b > 0$ ，

则原式 $=-a+a+b=b$ ，

故选D.

21. 如果 $\sqrt{(2-3|x|)^2} = 2+3x$ ，则 x 取值范围为（ ）

- A. $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{3} \leq x \leq 0$ C. $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ D. $x \leq -\frac{2}{3}$ 或 $x \geq \frac{2}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据算术平方根的非负性可得 $2+3x \geq 0$ ，根据 $\sqrt{(2-3|x|)^2} = 2+3x$ 可得 $|x| = -x$ ，据此即可作答.

【详解】 $\because$ 算术平方根非负， $\sqrt{(2-3|x|)^2} = 2+3x$ ，

$$\therefore 2+3x \geq 0,$$

$$\therefore x \geq -\frac{2}{3},$$

$$\because \sqrt{(2-3|x|)^2} = 2+3x,$$

$$\therefore (2-3|x|)^2 = (2+3x)^2,$$

$$\therefore 9x^2 - 12|x| + 4 = 9x^2 + 12x + 4,$$

$$\therefore |x| = -x,$$

$$\therefore x \leq 0,$$

$$\therefore x \text{ 取值范围: } -\frac{2}{3} \leq x \leq 0,$$

故选：B.

【点睛】本题主要考查了算术平方根的非负性，二次根式的化简以及绝对值的知识，掌握二次根式的化简以及算术平方根的非负性是解答本题的关键.

22. 设等式 $\sqrt{a(x-a)} + \sqrt{a(y-a)} = \sqrt{x-a} - \sqrt{a-y}$ 在实数范围内成立，其中 a 、 x 、 y 是两两不同的实数，

则 $\frac{3x^2 + xy - y^2}{x^2 - xy + y^2}$ 的值是()

A. 3

B. $\frac{1}{3}$

C. 2

D. $\frac{5}{3}$ **【答案】** B**【解析】**

【分析】 根据根号下的数要是非负数，得到 $a(x-a) \geq 0$ ， $a(y-a) \geq 0$ ， $x-a \geq 0$ ， $a-y \geq 0$ ，推出 $a \geq 0$ ， $a \leq 0$ ，得到 $a=0$ ，代入即可求出 $y=-x$ ，把 $y=-x$ 代入原式即可求出答案.

【详解】 由于根号下的数要是非负数，

$$\therefore a(x-a) \geq 0, a(y-a) \geq 0, x-a \geq 0, a-y \geq 0,$$

$a(x-a) \geq 0$ 和 $x-a \geq 0$ 可以得到 $a \geq 0$,

$a(y-a) \geq 0$ 和 $a-y \geq 0$ 可以得到 $a \leq 0$,

所以 a 只能等于 0，代入等式得

$$\sqrt{x} - \sqrt{-y} = 0,$$

所以有 $x=-y$,

即: $y=-x$,

由于 x, y, a 是两两不同的实数,

$$\therefore x > 0, y < 0.$$

将 $x=-y$ 代入原式得:

$$\text{原式} = \frac{3x^2 + x(-x) - (-x)^2}{x^2 - x(-x) + (-x)^2} = \frac{1}{3}.$$

故选 B.

【点睛】 本题主要考查对二次根式的化简，算术平方根的非负性，分式的加减、乘除等知识点的理解和掌握，根据算术平方根的非负性求出 a, x, y 的值和代入求分式的值是解此题的关键.

三、计算化简题 (共 6 题, 每题 4 分, 共 24 分)

23. 解方程: $\sqrt{2}x + 2\sqrt{6} = \sqrt{3}x + \sqrt{5}x$.

【答案】 $x = \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 按照移项、合并同类项、把系数化为 1 进行求解即可.

【详解】 解: $\sqrt{2}x + 2\sqrt{6} = \sqrt{3}x + \sqrt{5}x$,

$$\therefore \sqrt{3}x + \sqrt{5}x - \sqrt{2}x = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore (\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2})x = 2\sqrt{6},$$

$$\begin{aligned}\therefore x &= \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}} \\&= \frac{2\sqrt{6}[\sqrt{5} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})]}{[\sqrt{5} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})][\sqrt{5} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})]} \\&= \frac{2\sqrt{6}[\sqrt{5} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})]}{5 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} \\&= \frac{2\sqrt{6}[\sqrt{5} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})]}{5 - (3 - 2\sqrt{6} + 2)} \\&= \frac{2\sqrt{6}[\sqrt{5} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})]}{2\sqrt{6}} \\&= \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2},\end{aligned}$$

$$\therefore \text{方程的解为 } x = \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查了解方程，涉及二次根式的混合运算，掌握分母有理化的方法是解题的关键.

$$24. \text{ 计算: } 2\left(\sqrt{0.5} - 2\sqrt{1\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{2}(4\sqrt{0.125} - \sqrt{12}).$$

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{3}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 先进行二次根式的化简，然后合并即可.

$$\begin{aligned}\text{【详解】 解: 原式} &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{3}\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \\&= \sqrt{2} - \frac{8}{3}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} \\&= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{8}{3}\sqrt{3} + \sqrt{3} \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{3}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算，掌握运算法则是解题的关键.

$$25. \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3} - 2 - \sqrt{7}} - \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} - \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right) \div \sqrt{8}.$$

【答案】 $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{14}}{2}$

【解析】

【分析】根据二次根式混合运算的法则计算即可.

【详解】解:
$$\begin{aligned}& \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-2-\sqrt{7}} - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} - \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right) \div \sqrt{8} \\&= \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3}-2+\sqrt{7})}{(\sqrt{3}-2-\sqrt{7})(\sqrt{3}-2+\sqrt{7})} - \left(\frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} - \frac{(1-\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} \right) \div 2\sqrt{2} \\&= \frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{6}+2\sqrt{42}}{(\sqrt{3}-2)^2-(\sqrt{7})^2} - \left(\frac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3} - \frac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3} \right) \div 2\sqrt{2} \\&= \frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{6}+2\sqrt{42}}{-4\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} \div 2\sqrt{2} \\&= -\frac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{14}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \\&= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{14}}{2}.\end{aligned}$$

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算, 掌握相关运算法则是解题的关键.

26.
$$\frac{4\sqrt{5}-6\sqrt{7}+2\sqrt{11}}{\sqrt{77}-\sqrt{55}+\sqrt{35}-7}.$$

【答案】 $\sqrt{5}-\sqrt{11}$

【解析】

【分析】将分子、分母拆分, 化为两个分数, 再分母有理化求解即可.

【详解】解: 原式
$$\begin{aligned}&= \frac{4\sqrt{5}-4\sqrt{7}-2\sqrt{7}+2\sqrt{11}}{\sqrt{7}\times 11-\sqrt{5}\times 11+\sqrt{5}\times 7-(\sqrt{7})^2} \\&= \frac{2(\sqrt{11}-\sqrt{7})-4(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{11}-\sqrt{7})} \\&= \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} \\&= \frac{7-5}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \frac{11-7}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} \\&= (\sqrt{7}+\sqrt{5}) - (\sqrt{11}+\sqrt{7}) \\&= \sqrt{5}-\sqrt{11}.\end{aligned}$$

【点睛】本题考查二次根的混合运算, 熟练掌握计算法则是解题关键.

27. 化简: $\frac{1}{3}\sqrt{-\frac{x^2}{y}} \cdot \left(-4\sqrt{-\frac{y^2}{x}}\right) \div \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{x^3y}}$.

【答案】 $8x^2y$

【解析】

【分析】 先对各二次根式进行化简，然后按照二次根式乘除混合运算法则化简即可.

【详解】 解：根据题意知： $x < 0$ ， $y < 0$ ，

$$\begin{aligned} \therefore \text{原式} &= \frac{1}{3}\sqrt{-\frac{x^2y}{y^2}} \cdot \left(-4\sqrt{-\frac{xy^2}{x^2}}\right) \div \frac{1}{6}\sqrt{\frac{xy}{x^4y^2}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left|\frac{x}{y}\right| \sqrt{-y} \cdot \left(-4 \cdot \left|\frac{y}{x}\right| \sqrt{-x}\right) \div \left(\frac{1}{6} \cdot \left|\frac{1}{x^2y}\right| \sqrt{xy}\right) \\ &= \frac{x}{3y} \sqrt{-y} \cdot \left(-\frac{4y}{x} \sqrt{-x}\right) \div \left(-\frac{\sqrt{xy}}{6x^2y}\right) \\ &= \frac{x}{3y} \sqrt{-y} \cdot \left(-\frac{4y}{x} \sqrt{-x}\right) \cdot \left(-\frac{6x^2y}{\sqrt{xy}}\right) \\ &= 8x^2y. \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了二次根式的化简与乘除混合运算，掌握相关运算法则是解题的关键.

28. 化简: $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3 + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{xy} - 3y}{x-y}$.

【答案】 3

【解析】

【分析】 利用二次根式的性质和因式分解化简即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解：} & \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3 + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{xy} - 3y}{x-y} \\ &= \frac{x\sqrt{x} - 3x\sqrt{y} + 3\sqrt{x}y - y\sqrt{y} + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3} + \frac{3\sqrt{x}\sqrt{y} - 3(\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2} \\ &= \frac{3x\sqrt{x} - 3x\sqrt{y} + 3\sqrt{x}y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)} + \frac{3\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3\sqrt{x}(x-\sqrt{xy}+y)}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)} + \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
&= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
&= \frac{3(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
&= 3
\end{aligned}$$

【点睛】 本题主要考查了二次根式的化简，正确应用因式分解是解题的关键.

四、解答题：(第 32 题 6 分，其余每题 5 分)

29. 已知 x, y 都是有理数，并且满足 $x^2 + 2y + \sqrt{2}y = 17 - 4\sqrt{2}$ ，求 $\sqrt{x-2y}$ 的值.

【答案】 $\sqrt{13}$ 或 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据题意，得 $(x^2 + 2y - 17) + \sqrt{2}(y + 4) = 0$ ，然后根据 x, y 都是有理数，判断出 $x^2 + 2y - 17$ 与

$y + 4$ 也是有理数，据此推出 $\begin{cases} x^2 + 2y = 17 \\ y = -4 \end{cases}$ ，求出 x, y 的值，再代入 $\sqrt{x-2y}$ 计算即可.

【详解】 解： $\because x^2 + 2y + \sqrt{2}y = 17 - 4\sqrt{2}$ ，

$$\therefore (x^2 + 2y - 17) + \sqrt{2}(y + 4) = 0,$$

$\because x, y$ 都是有理数，

$\therefore x^2 + 2y - 17$ 与 $y + 4$ 也是有理数，且都为 0，

$$\therefore \begin{cases} x^2 + 2y - 17 = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x^2 + 2y = 17 \\ y = -4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -5 \\ y = -4 \end{cases},$$

$$\therefore \sqrt{x-2y} = \sqrt{5-2 \times (-4)} = \sqrt{13} \text{ 或 } \sqrt{x-2y} = \sqrt{-5-2 \times (-4)} = \sqrt{3}.$$

$\therefore \sqrt{x-2y}$ 的值为 $\sqrt{13}$ 或 $\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了实数的计算，以及有理数的含义与应用，解题的关键是判断出 $x^2 + 2y - 17$ 与 $y + 4$ 都是有理数.

30. 已知 $a + b = -7$, $ab = 5$, 求 $a\sqrt{\frac{a}{b}} + b\sqrt{\frac{b}{a}}$ 的值.

【答案】 $-\frac{39}{5}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 根据已知的等式可知 a 、 b 为负数，再根据分式的运算得到

$a\sqrt{\frac{a}{b}} + b\sqrt{\frac{b}{a}} = -a\frac{\sqrt{ab}}{b} - b\frac{\sqrt{ab}}{a} = -\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \times \sqrt{ab}$ ，再根据完全平方公式的变形即可求解.

【详解】 $\because a + b = -7$, $ab = 5$,

$\therefore a$ 、 b 为负数,

$$\begin{aligned} & \therefore a\sqrt{\frac{a}{b}} + b\sqrt{\frac{b}{a}} \\ &= a\sqrt{\frac{ab}{b^2}} + b\sqrt{\frac{ab}{a^2}} \\ &= a\frac{\sqrt{ab}}{|b|} + b\frac{\sqrt{ab}}{|a|} \\ &= -a\frac{\sqrt{ab}}{b} - b\frac{\sqrt{ab}}{a} \\ &= -\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \times \sqrt{ab} \\ &= -\left(\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab}\right) \times \sqrt{ab} \\ &= -\frac{a^2 + b^2}{ab} \times \sqrt{ab} \\ &= -\frac{a^2 + b^2 + 2ab - 2ab}{ab} \times \sqrt{ab} \\ &= -\frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} \times \sqrt{ab}, \end{aligned}$$

$$\because a+b=-7, \quad ab=5,$$

$$\therefore \text{原式} = -\frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} \times \sqrt{ab} = -\frac{(-7)^2 - 2 \times 5}{5} \times \sqrt{5} = -\frac{39}{5} \sqrt{5}$$

【点睛】此题主要考查实数的运算，解题的关键是熟知分式的运算及乘方公式的运用.

31. 已知 $a = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ ，求 $\frac{a^5 - 7a^4 + 6a^3 - 7a^2 + 11a + 13}{a^2 - 6a + 4}$ 的值.

【答案】 $\frac{11}{5}$

【解析】

【分析】先根据 $a = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ 求出 $a = 3 + \sqrt{10}$ ，可求 $(a-3)^2 = a^2 - 6a + 9 = 10$ ，进而求出 $a^2 = 6a + 1$ ，

然后把 $a^2 = 6a + 1$ 整体代入计算即可.

【详解】解： $\because a = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ ，

$$\therefore a = \frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = 3 + \sqrt{10},$$

$$\therefore (a-3)^2 = a^2 - 6a + 9 = 10,$$

$$\therefore a^2 = 6a + 1,$$

$$\therefore \frac{a^5 - 7a^4 + 6a^3 - 7a^2 + 11a + 13}{a^2 - 6a + 4} = \frac{a^3(6a+1) - 7a^4 + 6a^3 - 7a^2 + 11a + 13}{6a+1-6a+4}$$

$$= \frac{6a^4 + a^3 - 7a^4 + 6a^3 - 7a^2 + 11a + 13}{5}$$

$$= \frac{-a^4 + 7a^3 - 7a^2 + 11a + 13}{5}$$

$$= \frac{-a^2(6a+1) + 7a^3 - 7a^2 + 11a + 13}{5}$$

$$= \frac{-6a^3 - a^2 + 7a^3 - 7a^2 + 11a + 13}{5}$$

$$= \frac{a^3 - 8a^2 + 11a + 13}{5}$$

$$= \frac{a(6a+1) - 8a^2 + 11a + 13}{5}$$

$$= \frac{6a^2 + a - 8a^2 + 11a + 13}{5}$$

$$= \frac{-2a^2 + 12a + 13}{5}$$

$$= \frac{-2(6a+1) + 12a + 13}{5}$$

$$= \frac{-12a - 2 + 12a + 13}{5}$$

$$= \frac{11}{5}.$$

【点睛】 本题考查了二次根式的分母有理化以及分式的化简求值，根据题意求出 $a^2 = 6a + 1$ 是解题的关键.

32. 已知 $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}$ ，求 $\frac{x^2 - x - 6}{x} \div \frac{x-3}{x^2 + 2x} - \frac{x+2 + \sqrt{4x+x^2}}{x+2 - \sqrt{4x+x^2}}$ 的值（用含 a 的式子来表示）.

【答案】 $a^2 + 2$

【解析】

【分析】 由 $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}$ ，两边同时平方得出 $x = a + \frac{1}{a} - 2$ ，然后进一步化简代数式并代入即可求出答案.

【详解】 解： $\because \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}$ ，

$$\therefore x = a + \frac{1}{a} - 2, \quad x + 2 = a + \frac{1}{a}$$

$$\therefore \frac{x^2 - x - 6}{x} \div \frac{x-3}{x^2 + 2x} - \frac{x+2 + \sqrt{4x+x^2}}{x+2 - \sqrt{4x+x^2}}$$

$$= \frac{(x-3)(x+2)}{x} \cdot \frac{x(x+2)}{x-3} - \frac{(x+2 + \sqrt{4x+x^2})^2}{(x+2 - \sqrt{4x+x^2})(x+2 + \sqrt{4x+x^2})}$$

$$= (x+2)^2 - \frac{(x+2 + \sqrt{(x+2)^2 - 4})^2}{(x+2)^2 - (4x+x^2)}$$

$$\begin{aligned}
&= (x+2)^2 - \frac{\left(x+2+\sqrt{(x+2)^2-4}\right)^2}{4} \\
&= \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - \frac{\left(a+\frac{1}{a}+\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}\right)^2}{4} \\
&= \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - \frac{\left(a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-a\right)^2}{4} \\
&= a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 - \frac{1}{a^2} \\
&= a^2 + 2.
\end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了分式和二次根式的化简求值，利用完全平方公式和因式分解进行变形是解题的关键.

33. 观察下列各式：

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=1+\frac{1}{1\times 2} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=1+\frac{1}{2\times 3} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=1+\frac{1}{3\times 4} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

请利用你所发现的规律，解决下列问题：

(1) 发现规律 $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (n 为正整数)；

(2) 计算 $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2022^2}+\frac{1}{2023^2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(3) 如果 $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}} = n - \frac{1}{5}$ ，那么

$n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 (1) $\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$

(2) $2022\frac{2022}{2023}$

(3) $n=5$

【解析】

【分析】(1) 观察前三个式子特点，找出规律即可解答；

(2) 利用 (1) 的规律解答即可；

(3) 利用 (1) 的规律解答即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \because \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=1+\frac{1}{1\times 2},$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=1+\frac{1}{2\times 3},$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=1+\frac{1}{3\times 4}, \dots\dots$$

$$\therefore \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{n^2+n+1}{n(n+1)};$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: 原式}&=1+\frac{1}{1\times 2}+1+\frac{1}{2\times 3}+1+\frac{1}{3\times 4}+\dots+1+\frac{1}{2022\times 2023} \\&=2022+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023} \\&=2022+\frac{2022}{2023} \\&=2022\frac{2022}{2023}.\end{aligned}$$

$$\text{故答案为: } 2022\frac{2022}{2023};$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: 根据题意, 得 } 1+\frac{1}{1\times 2}+1+\frac{1}{2\times 3}+1+\frac{1}{3\times 4}+\dots+1+\frac{1}{(n-1)n}=n-\frac{1}{5},$$

$$\therefore (n-1)+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=n-\frac{1}{5},$$

$$\therefore n-\frac{1}{n}=n-\frac{1}{5},$$

$$\therefore n=5,$$

经检验得 $n = 5$ 是原方程的解.

故答案为: $n = 5$.

【点睛】 本题考查了二次根式的运算和化简, 读懂题意, 找出规律是解题的关键.