

中科院上海实验学校八年级上学期数学适应性练习 2022.9

一、选择题（本大题共有 6 个小题，每题 3 分，满分 18 分）

1. 下列各式一定是二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{-7}$ B. $\sqrt[3]{2m}$ C. $\sqrt{a^2+1}$ D. $\sqrt{\frac{a}{b}}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次根式的概念和性质，逐一判断.

【详解】解：A、二次根式无意义，故 A 错误；

B、是三次根式，故 B 错误；

C、被开方数是正数，故 C 正确；

D、当 $b=0$ 或 a 、 b 异号时，根式无意义，故 D 错误.

故选 C.

【点睛】主要考查了二次根式的意义和性质. 概念：式子 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 叫二次根式. 性质：二次根式中的被开方数必须是非负数，否则二次根式无意义. 当二次根式在分母上时还要考虑分母不等于零，此时被开方数大于 0.

2. 下列二次根式中，与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{\frac{1}{27}}$ B. $\sqrt{0.3}$ C. $\sqrt{\frac{3}{16}}$ D. $\sqrt{12}$

【答案】B

【解析】

【分析】把四个选项中的二次根式化简，再根据同类二次根式的定义进行判断即可.

【详解】解：A. $\sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ ，与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式，不符合题意；

B. $\sqrt{0.3} = \frac{\sqrt{30}}{10}$ ，与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式，符合题意；

C. $\sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式，不符合题意；

D. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式，不符合题意.

故选：B.

【点睛】本题主要考查了二次根式化简以及同类二次根式的知识，掌握同类二次根式的定义是解题的关键.

3. 下列说法正确的是（ ）

A. 若 $\sqrt{a^2} = a$ ，则 a 可取一切实数

B. 当 $a \geq \frac{3}{4}$ 时， $\sqrt{3-4a}$ 才有意义

C. 若 $a < 0, b > 0$ ，则 $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$

D. 5 的平方根是 $\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】先分析每一选项的条件和结论，发现 A、B、C 中都有错误，只有 C 正确.

【详解】解：选项 A 中等式成立的条件是 a 为非负数，故 A 错误；

选项 B 中根式有意义的条件是被开方数为非负数，因此应当有 $a \leq \frac{3}{4}$ ，故 B 错误；

选项 C 中 $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$ ，因为 $a < 0, b > 0$ ，有 $|a|\sqrt{b} = -a\sqrt{b}$ ，故 C 正确；

选项 D 中，5 的平方根是 $\pm\sqrt{5}$ ，故 D 错误；

故选：C.

【点睛】本题主要考查了二次根式的相关概念和性质，学生需明白二次根式的双重非负性以及平方根的定义，能运用 $\sqrt{a^2} = |a|$ 公式进行二次根式的化简，因此牢记相关概念和公式是解决本题的关键.

4. 下列方程中，是一元二次方程有（ ）

A. $4x^2 = 3y$

B. $x(x+1) = 5x^2 - 1$

C. $\sqrt{x} - 3 = 5x^2 - \sqrt{6}$

D. $\frac{1}{x^2} + 3x - 1 = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程，其基本形式为 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$. 根据一元二次方程的定义逐项分析判断即可.

【详解】解：A. $4x^2 = 3y$ ，含有两个未知数，不是一元二次方程，不符合题意；

B. $x(x+1) = 5x^2 - 1$ ，整理可得 $4x^2 - x - 1 = 0$ ，是一元二次方程，符合题意；

C. $\sqrt{x} - 3 = 5x^2 - \sqrt{6}$ ，不是一元二次方程，不符合题意；

D. $\frac{1}{x^2} + 3x - 1 = 0$ ，不是整式方程，故不是一元二次方程，不符合题意.

故选：B.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的知识，理解并掌握一元二次方程的定义是解题关键.

5. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + k = 0$ 有实数根，则（ ）

A. $k < 0$

B. $k > 0$

C. $k \geq 0$

D. $k \leq 0$

【答案】D

【解析】

【详解】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2+k=0$ 有实数根,

$$\therefore \Delta \geq 0$$

$$\text{即 } 0^2 - 4k \geq 0, \text{ 解得 } k \leq 0.$$

故答案选 D,

点睛: 一元二次方程根的判别式与根的关系:

(1) 当 $\Delta > 0$ 时方程有两个不等实根;

(2) 当 $\Delta = 0$ 时方程有两个相等实根;

(3) 当 $\Delta < 0$ 时方程无实根.

6. 规定 $a \otimes b = \frac{a-b}{a+b}$, 则 $\sqrt{5} \otimes 2$ 的值是 ()

A. $5+4\sqrt{5}$

B. $5-4\sqrt{5}$

C. $9-4\sqrt{5}$

D.

$9+4\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据新定义 $a \otimes b = \frac{a-b}{a+b}$, 直接将 $a = \sqrt{5}, b = 2$ 代入后, 分母有理化即可得到答案.

【详解】解: $\because a \otimes b = \frac{a-b}{a+b}$,

$$\therefore \sqrt{5} \otimes 2 = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$$

$$= \frac{5-4\sqrt{5}+4}{5-4}$$

$$= 9-4\sqrt{5},$$

故选: C.

【点睛】本题考查新定义运算, 涉及代数式求值、分母有理化, 熟练掌握二次根式运算法则是解决问题的关键.

二、填空题 (本大题共有 12 题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. 计算: $\sqrt{(-2)^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 2

【解析】

【分析】 直接利用二次根式的性质化简得出答案.

【详解】 解: $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{2^2} = 2$.

故答案为: 2.

【点睛】 此题主要考查了二次根式的性质与化简, 正确化简二次根式是解题关键.

8. 二次根式 $\sqrt{18} =$ _____

【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 直接利用二次根式的性质化简求出答案.

【详解】 解: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$

故答案为: $3\sqrt{2}$

【点睛】 此题主要考查了二次根式的性质与化简, 正确掌握二次根式的性质是解题关键.

9. 当 x _____ 时, 式子 $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ 有意义

【答案】 $x \geq 0$ 且 $x \neq 3$

【解析】

【分析】 根据被开方数是非负数, 分母不能为 0, 可得答案.

【详解】 解: $\because \sqrt{x} \geq 0$ 且 $\sqrt{x-3} \neq 0$,

$\therefore x \geq 0$ 且 $x \neq 3$.

【点睛】 本题考查了二次根式和分式有意义的条件, (1) 被开方数是非负数, 分母不能为 0;

(2) 被开方数大于或等于 0.

10. 最简二次根式 $\sqrt{4a+3b}$ 与 $\sqrt[b+1]{2a-b+6}$ 是同类二次根式, 则 $a+b =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 根据最简二次根式定义、同类二次根式定义可得 $b+1=2$, 且 $4a+3b=2a-b+6$, 解出 $a=1, b=1$, 代入代数式求值即可得到答案.

【详解】 解: $\because$ 最简二次根式 $\sqrt{4a+3b}$ 与 $\sqrt[b+1]{2a-b+6}$ 是同类二次根式,

$$\therefore \begin{cases} b+1=2 \\ 4a+3b=2a-b+6 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases},$$

$\therefore a+b=2$.

【点睛】 本题考查代数式求值, 涉及最简二次根式定义、同类二次根式定义、解二元一次方

程组等知识，熟记最简二次根式定义、同类二次根式定义，掌握二元一次方程组解法是解决问题的关键.

11. 比较大小: $2\sqrt{5}$ _____ $3\sqrt{3}$

【答案】 $<$

【解析】

【分析】 先得到 $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$, $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$, 即可作答.

【详解】 $\because 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$, $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$, 且 $20 < 27$,

$$\therefore \sqrt{20} < \sqrt{27} ,$$

$$\therefore 2\sqrt{5} < 3\sqrt{3} ,$$

故答案为: $<$.

【点睛】 本题主要考查了二次根式大小的比较，掌握二次根式大小的比较方法是解答本题的关键.

12. 化简: $\sqrt{-a^4b^3} =$ _____.

【答案】 $-a^2b\sqrt{-b}$

【解析】

【分析】 根据二次根式性质：被开方式非负得到 $-a^4b^3 \geq 0$, 解得 $b \leq 0$, 根据 $\sqrt{a^2} = |a|$ 化简即可得到答案.

【详解】 解: $\sqrt{-a^4b^3}$

$$= \sqrt{-a^4b^2b}$$

$$= |a^2b|\sqrt{-b}$$

$$\because -a^4b^3 \geq 0 ,$$

$$\therefore b \leq 0 ,$$

$$\therefore |a^2b|\sqrt{-b}$$

$$= -a^2b\sqrt{-b} ,$$

$$\therefore \sqrt{-a^4b^3} = -a^2b\sqrt{-b} ,$$

故答案为: $-a^2b\sqrt{-b}$.

【点睛】 本题考查利用二次根式性质化简，涉及二次根式被开方式非负、 $\sqrt{a^2} = |a|$ 及去绝对值运算等知识，熟练掌握二次根式是解决问题的关键.

13. 计算: $-\sqrt{1\frac{1}{5}} \div 3\sqrt{\frac{1}{15}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的除法运算法则即可求解.

【详解】 解: $-\sqrt{1\frac{1}{5}} \div 3\sqrt{\frac{1}{15}}$

$$= -\sqrt{\frac{6}{5}} \div \sqrt{\frac{9}{15}}$$
$$= -\sqrt{\frac{6}{5} \times \frac{15}{9}}$$
$$= -\sqrt{2}.$$

【点睛】 此题主要考查了二次根式的运算, 解题的关键是熟练掌握相关运算法则.

14. 计算: $(\sqrt{5}-2)^{2022}(\sqrt{5}+2)^{2023} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{5}+2$

【解析】

【分析】 根据积的乘方运算的逆运算将 $(\sqrt{5}-2)^{2022}(\sqrt{5}+2)^{2023}$ 变形为

$[(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)]^{2022}(\sqrt{5}+2)$, 再结合平方差公式计算即可得到答案.

【详解】 解: $(\sqrt{5}-2)^{2022}(\sqrt{5}+2)^{2023}$

$$= [(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)]^{2022}(\sqrt{5}+2)$$
$$= [(\sqrt{5})^2 - 2^2]^{2022}(\sqrt{5}+2)$$
$$= \sqrt{5}+2.$$

故答案为: $\sqrt{5}+2$.

【点睛】 本题考查二次根式计算, 涉及积的乘方运算的逆运算、平方差公式等知识, 熟练掌握相关运算法则及公式是解决问题的关键.

15. 若方程 $(m-1)x^2 - mx - 1 = 0$ 是关于 x 一元二次方程, 则 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $m \neq 1$

【解析】

【详解】 $\because$ 方程 $(m-1)x^2 - mx - 1 = 0$ 是一元二次方程,

$$\therefore m-1 \neq 0,$$

$$\therefore m \neq 1.$$

点睛: 本题考查了一元二次方程的定义, 方程的两边都是整式, 只含有一个未知数, 并且整理后未知数的最高次数都是 2, 像这样的方程叫做一元二次方程, 根据定义解答即可.

16. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 + x + m^2 + m = 0$ 有一个根为 0, 则 $m =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】根据方程根的定义, 将 $x=0$ 代入关于 x 的一元二次方程 $mx^2 + x + m^2 + m = 0$ 得到 $m^2 + m = 0$, 解这个关于 m 的一元二次方程, 结合一元二次方程定义 $m \neq 0$ 即可得到答案.

【详解】解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 + x + m^2 + m = 0$ 有一个根为 0,

$$\therefore m^2 + m = 0, \text{ 即 } m(m+1) = 0, \text{ 解得 } m = 0 \text{ 或 } m = -1,$$

$\because mx^2 + x + m^2 + m = 0$ 是关于 x 的一元二次方程,

$$\therefore m \neq 0,$$

$$\therefore m = -1,$$

故答案为: -1.

【点睛】本题考查一元二次方程根的定义、一元二次方程的定义及因式分解法解一元二次方程, 熟练掌握一元二次方程的二次项系数不等于 0 是解决问题的关键.

17. 一元二次方程 $x^2 = 3x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = 3$ ## $x_1 = 3, x_2 = 0$

【解析】

【分析】首先把 $3x$ 移至方程左边, 再把方程左边的多项式进行因式分解, 即可得到答案.

【详解】解: $x^2 = 3x$,

$$\text{移项得: } x^2 - 3x = 0,$$

$$\therefore x(x-3) = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x - 3 = 0,$$

$$\therefore x_1 = 0, x_2 = 3.$$

故答案为: $x_1 = 0, x_2 = 3$.

【点睛】本题考查一元二次方程的解法. 解一元二次方程常用的方法有直接开平方法, 配方法, 公式法, 因式分解法, 本题运用的是因式分解法. 结合方程的特点选择合适、简便的方法是解题的关键.

18. 已知 $0 < a < 1$ ，且 $a + \frac{1}{a} = 7$ ，则 $\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$ 的值为_____.

【答案】 $-\sqrt{5}$

【解析】

【分析】由题意，先求出 $(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2 = a - 2 + \frac{1}{a} = 5$ ，即可求出答案.

【详解】解： $\because a + \frac{1}{a} = 7$ ，

$$\therefore (\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2 = a - 2 + \frac{1}{a} = 7 - 2 = 5,$$

$$\because 0 < a < 1,$$

$$\therefore \sqrt{a} < \frac{1}{\sqrt{a}},$$

$$\therefore \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} < 0$$

$$\therefore \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = -\sqrt{5};$$

故答案为： $-\sqrt{5}$

【点睛】本题考查了完全平方公式的变形求值，求一个数的平方根，解题的关键是熟练掌握运算法则，正确得到 $(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2 = 5$.

三、简答题（本大题共 7 个小题，每题 5 分，满分 35 分）

19. 计算： $6\left(\sqrt{0.5} + 2\sqrt{\frac{1}{3}}\right) - (\sqrt{18} - \sqrt{27})$

【答案】 $7\sqrt{3}$

【解析】

【分析】先根据二次根式性质化简，再结合去括号法则及二次根式混合运算逐步计算，最后合并同类二次根式即可得到答案.

【详解】解： $6\left(\sqrt{0.5} + 2\sqrt{\frac{1}{3}}\right) - (\sqrt{18} - \sqrt{27})$

$$= 6 \times \sqrt{\frac{1}{2}} + 6 \times 2\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{18} + \sqrt{27}$$

$$\begin{aligned}
&= 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 \times 2 \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{2 \times 9} + \sqrt{3 \times 9} \\
&= 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} \\
&= 7\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

【点睛】本题考查二次根式混合运算，涉及二次根式性质化简、去括号法则、二次根式加减乘除运算法则及合并同类二次根式等知识，熟练掌握二次根式混合运算法则是解决问题的关键.

20. 计算: $(8\sqrt{2} - 3\sqrt{6}) \div 2\sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$

【答案】 $5 - \frac{5\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】先判断 $\sqrt{3} - 1 > 0$ ，化简 $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$ ，然后利用二次根式的混合计算法则进行求解即可得到答案.

【详解】解: $\because \sqrt{3} > 1$,

$$\therefore \sqrt{3} - 1 > 0,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore (8\sqrt{2} - 3\sqrt{6}) \div 2\sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} \\
&= 8\sqrt{2} \div 2\sqrt{2} - 3\sqrt{6} \div 2\sqrt{2} - (\sqrt{3} - 1) \\
&= 4 - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} + 1 \\
&= 5 - \frac{5\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

【点睛】本题主要考查了二次根式的混合计算，正确化简 $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$ 并熟练掌握二次根式的运算法则是解题关键.

21. 计算: $\frac{x}{3}\sqrt{x} + \sqrt{\frac{4x^3}{9}} - 2x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$

【答案】 $-x\sqrt{x}$.

【解析】

【分析】先分别化简每个二次根式，然后合并同类二次根式计算.

【详解】解: $\frac{x}{3}\sqrt{x} + \sqrt{\frac{4x^3}{9}} - 2x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{3}\sqrt{x} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} - 2x^2 \times \frac{\sqrt{x}}{x} \\
&= \frac{x}{3}\sqrt{x} + \frac{2x}{3}\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} \\
&= -x\sqrt{x}
\end{aligned}$$

【点睛】本题考查二次根式的加减混合运算，掌握运算顺序和计算法则正确计算是解题关键.

22. 计算: $\frac{1}{3}\sqrt{x^4y} \cdot \left(-4\sqrt{\frac{y^2}{x}}\right) \div \frac{2}{9}\sqrt{xy^2}$

【答案】 $-6x\sqrt{y}$

【解析】

【分析】先根据二次根式性质化简，再结合二次根式乘除运算法则求解即可得到答案.

【详解】解: $\frac{1}{3}\sqrt{x^4y} \cdot \left(-4\sqrt{\frac{y^2}{x}}\right) \div \frac{2}{9}\sqrt{xy^2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\sqrt{x^4y} \cdot \left(-4\sqrt{\frac{y^2}{x}}\right) \times \frac{9}{2\sqrt{xy^2}} \\
&= \frac{1}{3} \times (-4) \times \frac{9}{2} \times \sqrt{x^4y \cdot \frac{y^2}{x} \cdot \frac{1}{xy^2}} \\
&= -6\sqrt{x^2y},
\end{aligned}$$

由二次根式被开方式非负可知 $x^4y \geq 0, \frac{y^2}{x} \geq 0, xy^2 \geq 0$ ，即 $x \geq 0, y \geq 0$ ，

$$\therefore -6\sqrt{x^2y} = -6x\sqrt{y},$$

$$\therefore \frac{1}{3}\sqrt{x^4y} \cdot \left(-4\sqrt{\frac{y^2}{x}}\right) \div \frac{2}{9}\sqrt{xy^2} = -6x\sqrt{y}.$$

【点睛】本题考查二次根式乘除混合运算，涉及二次根式性质化简、二次根式被开方式非负、二次根式乘法运算法则及二次根式除法运算法则等，熟练掌握二次根式性质及乘除运算法则是解决问题的关键.

23. 解不等式: $\sqrt{2}(x-\sqrt{2}) \leq \sqrt{3}(x-\sqrt{3})$

【答案】 $x \geq \sqrt{2} + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】去括号，移项，合并同类项，系数化为1，即可求解.

【详解】 $\sqrt{2}(x-\sqrt{2}) \leq \sqrt{3}(x-\sqrt{3})$

$$\sqrt{2}x-2 \leq \sqrt{3}x-3$$

$$\sqrt{2}x-\sqrt{3}x \leq 2-3$$

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})x \leq -1$$

$$x \geq \frac{-1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$x \geq \frac{-1 \times (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}$$

$$x \geq \frac{-1 \times (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2-3} = \sqrt{2} + \sqrt{3},$$

即: $x \geq \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

【点睛】 本题主要考查了求解一元一次不等式的解集和二次根式的混合运算, 掌握二次根式的运算法则是解答本题的关键.

24. 解方程: $3(x-1)^2 + 1 = 16$

【答案】 $x_1 = 1 + \sqrt{5}$, $x_2 = 1 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 根据直接开平方法解一元二次方程即可得到答案.

【详解】 解: $3(x-1)^2 + 1 = 16$,

移项得 $3(x-1)^2 = 15$,

系数化为 1 得 $(x-1)^2 = 5$,

直接开平方得 $x-1 = \pm\sqrt{5}$,

$\therefore x = 1 + \sqrt{5}$ 或 $x = 1 - \sqrt{5}$,

$\therefore$ 原方程解为 $x_1 = 1 + \sqrt{5}$, $x_2 = 1 - \sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查解一元二次方程, 根据一元二次方程特征, 选择恰当方法求解是解决问题的关键.

25. 解方程: $9(x-2)^2 - 16(x+1) = 0$

【答案】 $x_1 = \frac{26+4\sqrt{31}}{9}$, $x_2 = \frac{26-4\sqrt{31}}{9}$

【解析】

【分析】先根据完全平方公式、去括号法则化简得到 $9x^2 - 52x + 20 = 0$ ，结合公式法解这个一元二次方程即可得到答案.

【详解】解： $\because 9(x-2)^2 - 16(x+1) = 0$ ，

$$\therefore 9x^2 - 52x + 20 = 0,$$

$$\therefore a = 9, b = -52, c = 20,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-52)^2 - 4 \times 9 \times 20$$

$$= 1984 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{52 \pm \sqrt{1984}}{18} = \frac{52 \pm 8\sqrt{31}}{18} = \frac{26 \pm 4\sqrt{31}}{9},$$

$$\therefore x_1 = \frac{26 + 4\sqrt{31}}{9} \text{ 或 } x_2 = \frac{26 - 4\sqrt{31}}{9}.$$

【点睛】本题考查解一元二次方程，熟练掌握公式法解一元二次方程是解决问题的关键.

四、解答题 (本大题共有 3 题, 第 26 题 7 分, 第 27 题每题 7 分, 第 26 题 9 分)

26. 已知 $x = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ ，求代数式 $\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16}}{x^2 - 5x + 4}$ 的值.

【答案】 $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】先把 $x = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ 化简为 $x = 2 + \sqrt{3}$ ，再化简 $\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16}}{x^2 - 5x + 4}$ 得 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$ ，

最后代入求值即可.

【详解】解： $\because x = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}$ ，

又 $\because \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$ ，即 $1 < \sqrt{3} < 2$ ，

$$\therefore 3 < 2 + \sqrt{3} < 4,$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16}}{x^2 - 5x + 4}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{(x-4)^2}}{(x-4)(x-1)}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{-(x-4)}{(x-4)(x-1)}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

将 $x = 2 + \sqrt{3}$ 代入, 可得

$$\text{原式} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3} - 1}$$

$$= 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}$$

$$= 2 - \sqrt{3} + \frac{1 - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}$$

$$= 2 - \sqrt{3} + \frac{1 - \sqrt{3}}{-2}$$

$$= \frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

【点睛】本题主要考查了代数式求值、二次根式的混合计算等知识, 熟练掌握相关运算法则是解答此题的关键.

27. 已知方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的一个根是 m , 求代数式 $m^2 - 2m - \frac{m^2 + 2}{3}$ 的值.

【答案】 -2

【解析】

【分析】根据一元二次方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的一个根是 m , 将 m 代入方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 得到 $m^2 - 3m + 2 = 0$, 从而变形得 $m^2 + 2 = 3m$, 代入代数式 $m^2 - 2m - \frac{m^2 + 2}{3}$ 得

$m^2 - 2m - \frac{3m}{3} = m^2 - 3m$, 再由 $m^2 - 3m + 2 = 0$ 变形得到 $m^2 - 3m = -2$ 即可得到答案.

【详解】解: $\because$ 已知方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的一个根是 m ,

$\therefore m^2 - 3m + 2 = 0$, 即 $m^2 + 2 = 3m$,

$$\therefore m^2 - 2m - \frac{m^2 + 2}{3}$$

$$= m^2 - 2m - \frac{3m}{3}$$

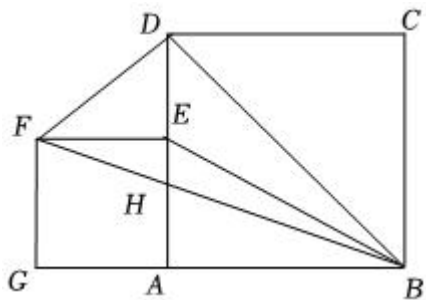
$$= m^2 - 3m,$$

由 $m^2 - 3m + 2 = 0$ 变形得 $m^2 - 3m = -2$,

$$\therefore m^2 - 2m - \frac{m^2 + 2}{3} = -2.$$

【点睛】本题考查代数式求值，涉及方程根的定义，根据条件，恒等变形，整体代入代数式化简求值是解决问题的关键.

28. 如图：正方形 $ABCD$ 的面积为 a ，正方形 $AEFG$ 的面积为 4，已知 $a > 4$.



- (1) 用 a 表示 $\triangle BDE$ 的面积;
- (2) 用 a 表示 $\triangle BDF$ 的面积;
- (3) 试验证 $\triangle DHF$ 和 $\triangle ABH$ 的面积是否相等? 请说明理由;
- (4) 用 a 表示线段 AH 的长.

【答案】(1) $\frac{a}{2} - \sqrt{a}$

(2) $\frac{a}{2}$

(3) 相等，理由见详解

(4) $\frac{2a - 4\sqrt{a}}{a - 4}$

【解析】

【分析】(1) 根据正方形的面积公式可得两个正方形的边长，然后由三角形面积公式即可获得答案;

(2) 由 $S_{\triangle BDF} = (S_{\triangle ABD} + S_{\triangle DEF} + S_{\text{正方形}AEFG}) - S_{\triangle BGF}$ 即可获得答案;

(3) 首先借助三角形面积公式和梯形面积公式证明 $S_{\text{梯形}ADFG} = S_{\triangle BFG}$ ，然后由 $S_{\text{梯形}ADFG} - S_{\text{四边形}AHFG} = S_{\triangle BFG} - S_{\text{四边形}AHFG}$ 证明 $\triangle DHF$ 和 $\triangle ABH$ 的面积相等即可;

(4) 由 (3) 可知 $S_{\triangle DHF} = S_{\triangle ABH}$ ，利用三角形面积公式代入求解即可获得答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 正方形 $ABCD$ 的面积为 a ,

$$\therefore AB = AD = \sqrt{a},$$

$\because$ 正方形 $AEFG$ 的面积为 4,

$$\therefore AE = EF = FG = AG = 2,$$

$$\therefore DE = AD - AE = \sqrt{a} - 2,$$

$$\therefore S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} DE \cdot AB$$

$$= \frac{1}{2} \times (\sqrt{a} - 2) \times \sqrt{a}$$

$$= \frac{a}{2} - \sqrt{a};$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} S_{\triangle BDF} &= (S_{\triangle ABD} + S_{\triangle DEF} + S_{\text{正方形}AEFG}) - S_{\triangle BGF} \\ &= \left(\frac{1}{2} AB \cdot AD + \frac{1}{2} DE \cdot EF + 4 \right) - \frac{1}{2} (AB + AG) \cdot FG \\ &= \left[\frac{1}{2} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a} + \frac{1}{2} (\sqrt{a} - 2) \times 2 + 4 \right] - \frac{1}{2} \times (\sqrt{a} + 2) \times 2 \\ &= \frac{a}{2} + \sqrt{a} - 2 + 4 - \sqrt{a} - 2 \\ &= \frac{a}{2}; \end{aligned}$$

【小问 3 详解】

相等，理由如下：

$$\therefore S_{\text{梯形}ADFG} = \frac{1}{2} (FG + AD) \times AG = \frac{1}{2} \times (2 + \sqrt{a}) \times 2 = 2 + \sqrt{a},$$

$$\text{又} \therefore S_{\triangle BFG} = \frac{1}{2} BG \cdot FG = \frac{1}{2} (AG + AB) \times FG = \frac{1}{2} \times (2 + \sqrt{a}) \times 2 = 2 + \sqrt{a},$$

$$\therefore S_{\text{梯形}ADFG} = S_{\triangle BFG},$$

$$\therefore S_{\text{梯形}ADFG} - S_{\text{四边形}AHFG} = S_{\triangle BFG} - S_{\text{四边形}AHFG},$$

$$\text{即 } S_{\triangle DHF} = S_{\triangle ABH};$$

【小问 4 详解】

$$\text{由 (3) 可知, } S_{\triangle DHF} = S_{\triangle ABH},$$

$$\therefore \frac{1}{2} DH \cdot EF = \frac{1}{2} AB \cdot AH,$$

$$\therefore (AD - AH) \cdot EF = AB \cdot AH,$$

$$\therefore (\sqrt{a} - AH) \times 2 = \sqrt{a} \times AH,$$

$$\text{解得 } AH = \frac{2a - 4\sqrt{a}}{a - 4}.$$

【点睛】本题主要考查了正方形、梯形和三角形面积公式、列代数式以及二次根式混合运算

等知识，熟练掌握并灵活运用相关知识是解题关键.