

华政附校 2023 学年第一学期八年级数学 10 月阶段反馈

一、选择题：(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 下列式子中一定是二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{-1}$ B. $\sqrt[3]{2}$ C. $\sqrt{a^2+2a+1}$ D. $\sqrt{a}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次根式的概念进行分析判断.

【详解】解：A、 $\sqrt{-1}$ 中， $-1 < 0$ ， $\therefore$ 原式没有意义，故此选项不符合题意；

B、 $\sqrt[3]{2}$ 是三次根式，故此选项不符合题意；

C、 $\because a^2+2a+1=(a+1)^2 \geq 0$ ， $\therefore$ 原式一定是二次根式，故此选项符合题意；

D、 $\sqrt{a}$ 中， a 不一定是非负数，故此选项不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题考查二次根式的定义，完全平方公式，理解二次根式的定义是解决问题的关键.

2. 在二次根式 $\sqrt{5}$ ， $\sqrt{ab^2}$ ， $\sqrt{0.4}$ ， $\sqrt{a^2-b^2}$ ， $\frac{2}{\sqrt{x}}$ ，中，最简二次根式个数是 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次根式的性质化简，根据最简二次根式的概念判断即可.

【详解】解： $\sqrt{5}$ 不能再化简，是最简二次根式；

$\sqrt{ab^2} = |b|a$ ，不是最简二次根式，

$\sqrt{0.4} = \sqrt{\frac{4}{10}} = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ ，不是最简二次根式，

$\sqrt{a^2-b^2}$ 不能再化简，是最简二次根式；

$\frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}$ ，不是最简二次根式，

即最简二次根式有 2 个，

故选：B.

【点睛】 本题考查的是最简二次根式的概念，掌握二次根式的性质、最简二次根式的概念是解题的关键.

3. 下列根式中，与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{9}$; B. $\sqrt[3]{3}$; C. $\sqrt{3a^2}$; D. $\sqrt{27a}$.

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据同类二次根式的定义逐项分析即可.

【详解】 解： A. $\sqrt{9} = 3$ ，与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式，不符合题意；

B. $\sqrt[3]{3}$ 是三次根式，与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式，不符合题意；

C. $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3}|a|$ ，与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式，符合题意；

D. $\sqrt{27a} = 3\sqrt{3a}$ ，与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式，不符合题意.

故选 C.

【点睛】 本题考查了同类二次根式的定义，熟练掌握同类二次根式的定义是解答本题的关键. 化成最简二次根式后，如果被开方式相同，那么这几个二次根式叫做同类二次根式.

4. 下列方程是一元二次方程的是 ()

- A. $ax^2 + bx + c = 0$ B. $\frac{1}{x^2} + x = 1$ C. $x(x+3) = x^2$ D. $x(x-2) = 0$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程. 逐项分析解答即可.

【详解】 解： A、 $ax^2 + bx + c = 0$ ，当 $a = 0$ 时，就不是一元二次方程，故该选项不符合题意；

B、 $\frac{1}{x^2} + x = 1$ 是分式方程，故该选项不符合题意；

C、 $x(x+3) = x^2$ 可以变形为 $3x = 0$ ，是一元一次方程，故该选项不符合题意；

D、 $x(x-2) = 0$ 可以变形为 $x^2 - 2x = 0$ ，是一元二次方程，故该选项符合题意；

故选： D.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的定义，解题的关键是掌握一元二次方程的特点：只含有一个未知数，未知数的最高次数是 2，是整式方程.

5. 下列各式运算正确的是 ()

$$A. \sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{8}$$

$$B. \sqrt{(-4) \cdot (-9)} = \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = (-2) \times (-3) = 6$$

$$C. (2\sqrt{10} - \sqrt{5}) \div \sqrt{5} = 2\sqrt{2} - 1$$

$$D. \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{5^2} - \sqrt{4^2} = 1$$

【答案】C

【解析】

【分析】利用二次根式的加减法的法则，二次根式的乘除法的法则对各项进行运算即可.

【详解】解：A. $\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{5}$ 不属于同类二次根式，不能运算，故 A 选项运算错误，不符合题意；

B. $\sqrt{(-4) \cdot (-9)} = \sqrt{36} = 6$ ，故 B 选项运算错误，不符合题意；

C. $(2\sqrt{10} - \sqrt{5}) \div \sqrt{5} = 2\sqrt{2} - 1$ ，故 C 不符合题意；

D. $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$ ，故 D 选项运算错误，不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题主要考查二次根式的混合运算，解答的关键是对相应的运算法则的掌握.

6. 定义：如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 满足 $a + b + c = 0$ ，那么我们称这个方程为“凤凰”方程. 已知 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 是“凤凰”方程，且有两个相等的实数根，则下列结论正确的是 ()

$$A. a = c$$

$$B. a = b$$

$$C. b = c$$

$$D. a = b = c$$

【答案】A

【解析】

【分析】先根据方程有两个相等的实数根得到 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，再将 $b = -a - c$ 代入 $b^2 - 4ac = 0$ 即可得到 $(a - c)^2 = 0$ ，从而得到答案.

【详解】解：∵ 方程有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 0,$$

$$\therefore a + b + c = 0,$$

$$\therefore b = -a - c$$

$$\therefore b^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2,$$

$$\therefore (a - c)^2 = 0,$$

$$\therefore a = c,$$

故先：A.

【点睛】 本题考查一元二次方程根与系数的关系，解题的关键是熟知当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时方程有两个相等的实数根.

二、填空题：（共 12 题，每题 2 分，共 24 分）

7. 如果式子 $\sqrt{\frac{1-x}{2+x}}$ 有意义，那么 x 的取值范围是_____.

【答案】 $-2 < x \leq 1$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件，分式有意义的条件列不等式组求解即可得出答案.

【详解】 解： $\because \sqrt{\frac{1-x}{2+x}}$ 有意义，

$$\therefore \frac{1-x}{2+x} \geq 0, \text{ 且 } 2+x \neq 0,$$

$$\text{即 } \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 2+x > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 1-x \leq 0 \\ 2+x < 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x \leq 1 \\ x > -2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x \geq 1 \\ x < -2 \end{cases},$$

$$\therefore -2 < x \leq 1,$$

故答案为： $-2 < x \leq 1$.

【点睛】 本题考查了二次根式有意义的条件，分式有意义的条件，解一元一次不等式组，熟练掌握解一元一次不等式的方法是解题的关键.

8. 写出二次根式 $\sqrt{x+y}$ 的一个有理化因式是_____.

【答案】 $\sqrt{x+y}$

【解析】

【分析】 二次根式的有理化的目的就是去掉根号，所以 $\sqrt{x+y}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{x+y}$.

【详解】 解： $\sqrt{x+y} \times \sqrt{x+y} = (\sqrt{x+y})^2 = x+y,$

故 $\sqrt{x+y}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{x+y}$

故答案为： $\sqrt{x+y}$.

【点睛】 本题考查了二次根式的有理化，根据二次根式的乘除法法则进行二次根式有理化. 本题二次根式有理化主要利用平方公式.

9. 计算: $\sqrt{40} \div \sqrt{5} =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的除法法则进行计算即可.

【详解】 解: $\sqrt{40} \div \sqrt{5} = \sqrt{40 \div 5} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

故答案为: $2\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了二次根式的除法, 熟练掌握二次根式的除法法则是解题的关键.

10. 化简: 当 $m > n$ 时, $\sqrt{(n-m)^2} =$ _____.

【答案】 $m-n$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质进行化简即可.

【详解】 解: 原式 $= |n-m|$,

$\because m > n$,

$\therefore n-m < 0$,

$\therefore$ 原式 $= m-n$.

故答案为: $m-n$.

【点睛】 本题考查二次根式的性质. 熟记 $\sqrt{a^2} = |a|$, 是解题的关键.

11. 分母有理化 $\frac{2}{2-\sqrt{5}} =$ _____.

【答案】 $-4-2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 根据分式的性质, 分子、分母同时乘 $2+\sqrt{5}$ 即可.

【详解】 解: $\frac{2}{2-\sqrt{5}} = \frac{2(2+\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = -4-2\sqrt{5}$,

故答案为: $-4-2\sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查的是分式的化简, 掌握分母有理化的步骤是解题的关键.

12. 关于 x 的方程 $(m+5)x^2 - 2mx - 4 = 0$ 是一个一元二次方程, 那么 m 的取值范围是 _____.

【答案】 $m \neq -5$

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的定义：只含有一个未知数，且未知数的最高次数为2的整式方程是一元二次方程，其中二次项系数不为0，可得 m 的取值范围.

【详解】 解：因为 $(m+5)x^2 - 2mx - 4 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，
所以 $m+5 \neq 0$,

解得： $m \neq -5$,

故答案为： $m \neq -5$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的定义，一元二次方程的一般形式是： $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c 是常数且 $a \neq 0$)，特别要注意 $a \neq 0$ 的条件. 这是在做题过程中容易忽视的知识点.

13. 已知 $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x} - 3$ ，则 $x^y =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{8}$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件列出不等式，求出 x ，得到 y 的值，根据有理数的乘方法则计算即可.

【详解】 解：由题意得， $x-2 \geq 0$ ， $2-x \geq 0$ ，

解得， $x=2$ ，

$\therefore y = -3$ ，

则 $x^y = 2^{-3} = \frac{1}{8}$ ，

故答案为： $\frac{1}{8}$.

【点睛】 本题考查的是二次根式有意义的条件，掌握二次根式的被开方数是非负数是解题的关键.

14. 计算： $\sqrt{18} \div \sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{4}{3}} =$ _____.

【答案】 $4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的混合运算进行计算即可求解.

【详解】 解： $\sqrt{18} \div \sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{18 \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}} = 4\sqrt{2}$ ，

故答案为： $4\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了二次根式的乘除法混合运算，掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

15. 已知 $a > 0$, 那么 $\sqrt{\frac{-4a}{b}}$ 可化简为_____

【答案】 $-\frac{2\sqrt{-ab}}{b}$

【解析】

【分析】由 $a > 0$, $\frac{-4a}{b} \geq 0$ 可得 $b < 0$, 再化简即可得到答案.

【详解】解: $\because a > 0$, $\frac{-4a}{b} \geq 0$,

$\therefore b < 0$,

$$\therefore \text{原式} = \sqrt{\frac{-4ab}{b^2}} = \frac{2\sqrt{-ab}}{|b|} = -\frac{2\sqrt{-ab}}{b}.$$

故答案为: $-\frac{2\sqrt{-ab}}{b}$

【点睛】本题考查的是二次根式的化简, 掌握利用二次根式的性质化简二次根式是解题的关键.

16. 已知一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的一根为 0, 则 $a^c =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】将 $x = 0$ 代入已知方程, 求得 c , 即可求解.

【详解】解: $\because$ 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的一根为 0,

$\therefore c = 0$,

$\therefore a^c = a^0 = 1$,

故答案为: 1.

【点睛】本题主要考查一元二次方程的解, 解题的关键是正确理解一元二次方程的定义以及一元二次方程的解.

17. 计算: $(2 - \sqrt{3})^{2024} (2 + \sqrt{3})^{2023} =$ _____.

【答案】 $2 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】把原式化成 $(2 - \sqrt{3}) \times [(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})]^{2023}$ 即可求解.

【详解】解：原式 $= (2-\sqrt{3}) \times [(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})]^{2023}$

$$= (2-\sqrt{3}) \times 1^{2023}$$

$$= 2-\sqrt{3}$$

故答案为： $2-\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了实数的混合运算，解题关键是熟练掌握二次根式和乘方的运算法则，准确进行计算.

18. 等腰三角形的底和腰是方程 $x^2 - 7x + 10 = 0$ 的两根，则这个三角形的周长是_____.

【答案】 12

【解析】

【分析】 用因式分解法求出方程的两个根分别是 5 和 2，根据两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，得出相应的值，再根据三角形的周长公式进行计算即可.

【详解】解： $\because x^2 - 7x + 10 = 0$,

$$\therefore (x-5)(x-2) = 0,$$

$$\therefore x_1 = 5, x_2 = 2,$$

$\because$ 等腰三角形的底和腰是方程的两根，

$\therefore$ 当腰为 2 时，则底为 5， $\because 2+2 < 5$ ，此三角形不存在， $\therefore$ 不合题意舍去，

$\therefore$ 当腰为 5 时，则底为 2，

$\therefore$ 这个三角形的周长是 $5+5+2=12$;

故答案为： 12.

【点睛】 本题考查的是用因式分解法解一元二次方程，解题的关键是根据两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，得出相应的边的值，再根据周长公式进行计算.

三、计算题：(共 6 题，每题 5 分，共 30 分)

19. 计算： $\sqrt{12} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{0.5}$

【答案】 $\frac{4}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 先化简各个二次根式，再合并同类二次根式即可.

【详解】解： $\sqrt{12} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{0.5}$

$$\begin{aligned}
 &= 2\sqrt{3} - \sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \\
 &= \frac{4}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

【点睛】此题考查了二次根式的加减法，熟练掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

20. 计算: $\left(\sqrt{mn} - \sqrt{\frac{m}{n}}\right) \div \sqrt{\frac{m}{n}}$

【答案】当 $n > 0$ 时, 原式 $= n - 1$; 当 $n < 0$ 时, 原式 $= -n - 1$

【解析】

【分析】根据二次根式的混合运算进行计算即可.

【详解】解: $\left(\sqrt{mn} - \sqrt{\frac{m}{n}}\right) \div \sqrt{\frac{m}{n}}$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{mn \div \frac{m}{n}} - \sqrt{\frac{m}{n} \div \frac{m}{n}} \\
 &= \sqrt{mn \times \frac{n}{m}} - \sqrt{\frac{m}{n} \times \frac{n}{m}} \\
 &= \sqrt{n^2} - 1,
 \end{aligned}$$

当 $n > 0$ 时, 原式 $= n - 1$;

当 $n < 0$ 时, 原式 $= -n - 1$.

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算, 熟练掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

21. 利用配方法解方程: $\frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = 0$

【答案】 $x_1 = \frac{1 - \sqrt{41}}{5}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{41}}{5}$

【解析】

【分析】根据配方法解一元二次方程的步骤进行计算即可.

【详解】解: $\frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = 0$

$$\begin{aligned}
 x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{8}{5} &= 0 \\
 x^2 - \frac{2}{5}x &= \frac{8}{5} \\
 x^2 - \frac{2}{5}x + \left(\frac{1}{5}\right)^2 &= \frac{8}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2
 \end{aligned}$$

$$\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{41}{25}$$

$$x - \frac{1}{5} = \pm \frac{\sqrt{41}}{5}$$

$$\therefore x_1 = \frac{1 - \sqrt{41}}{5}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{41}}{5}$$

【点睛】 本题考查了配方法解一元二次方程，熟练掌握解一元二次方程的方法是解题的关键.

22. 用公式法解方程: $3x^2 + 1 = 2\sqrt{3}x$.

【答案】 $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 根据公式法解一元二次方程的步骤进行计算即可.

【详解】 解: $3x^2 + 1 = 2\sqrt{3}x$

整理得: $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$,

则 $a = 3$, $b = -2\sqrt{3}$, $c = 1$,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 3 \times 1 = 12 - 12 = 0,$$

$$\therefore x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【点睛】 本题考查了公式法解一元二次方程，熟练掌握解一元二次方程的方法是解题的关键.

23. 解方程: $x^2 + 8x - 2 = 0$.

【答案】 $x_1 = 3\sqrt{2} - 4$, $x_2 = -3\sqrt{2} - 4$

【解析】

【分析】 利用解一元二次方程 - 配方法，进行计算即可解答.

【详解】 解: $x^2 + 8x - 2 = 0$,

$$x^2 + 8x = 2,$$

$$x^2 + 8x + 16 = 2 + 16,$$

$$(x + 4)^2 = 18,$$

$$x+4=\pm 3\sqrt{2},$$

$$x+4=3\sqrt{2} \text{ 或 } x+4=-3\sqrt{2},$$

$$x_1=3\sqrt{2}-4, \quad x_2=-3\sqrt{2}-4.$$

【点睛】 本题考查解一元二次方程，熟练掌握用配方法、公式法解一元二次方程是解题的关键.

$$24. \text{ 解方程: } \sqrt{2}(x^2-1)=x(x-2)+1$$

$$\text{【答案】 } x_1=-3-2\sqrt{2}, \quad x_2=1$$

【解析】

【分析】 先将等号左边括号里式子进行因式分解，等号右边去掉括号再进行因式分解，之后利用因式分解法解该方程即可

$$\text{【详解】 原方程可化为: } \sqrt{2}(x-1)(x+1)=(x-1)^2,$$

$$\text{移项得: } \sqrt{2}(x-1)(x+1)-(x-1)^2=0,$$

$$\text{提公因式得: } [\sqrt{2}(x+1)-(x-1)](x-1)=0,$$

$$\therefore \sqrt{2}x+\sqrt{2}-x+1=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

$$\text{解得: } x_1=-3-2\sqrt{2}, \quad x_2=1.$$

【点睛】 本题考查了解一元二次方程以及二次根式的运算，掌握因式分解的方法是解题关键

四、解答题：(共 5 题，第 25、26 每题各 5 分，第 27、28、29 每题各 6 分，共 28 分)

$$25. \text{ 已知 } x=\frac{1}{\sqrt{3}+2}, \quad y=\frac{1}{\sqrt{3}-2}, \text{ 求 } x^2-xy+y^2 \text{ 的值.}$$

$$\text{【答案】 } 15$$

【解析】

【分析】 先将 x, y 分母有理化，求得 $x-y$ 和 xy 的值，根据完全平方公式求解原式即可.

$$\text{【详解】 解: } x=\frac{1}{\sqrt{3}+2}=\frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}=-(\sqrt{3}-2)=2-\sqrt{3},$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}-2}=\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}=-(\sqrt{3}+2)=-\sqrt{3}-2,$$

$$\therefore x-y=2-\sqrt{3}-(-\sqrt{3}-2)=4, \quad xy=(2-\sqrt{3})(-\sqrt{3}-2)=-1,$$

$$x^2-xy+y^2$$

$$= x^2 - 2xy + y^2 + xy$$

$$= (x-y)^2 + xy$$

$$\text{故原式} = 4^2 + (-1) = 16 - 1 = 15.$$

【点睛】 本题考查了分母有理化，完全平方公式，代数式求值，熟练掌握完全平方公式是解题的关键.

26. 比较 $\sqrt{17} - \sqrt{13}$ 与 $\sqrt{13} - 3$ 的大小.

【答案】 $\sqrt{17} - \sqrt{13} < \sqrt{13} - 3$

【解析】

【分析】 观察得代数式的被开方数的差相等，先将代数式转变为分式的形式，比较分式的大小即可求解.

【详解】 解： $\because \sqrt{17} - \sqrt{13} = \frac{(\sqrt{17} - \sqrt{13})(\sqrt{17} + \sqrt{13})}{\sqrt{17} + \sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{17} + \sqrt{13}},$

$$\sqrt{13} - 3 = \sqrt{13} - \sqrt{9} = \frac{(\sqrt{13} - \sqrt{9})(\sqrt{13} + \sqrt{9})}{\sqrt{13} + \sqrt{9}} = \frac{4}{\sqrt{13} + \sqrt{9}},$$

且 $\frac{4}{\sqrt{17} + \sqrt{13}} < \frac{4}{\sqrt{13} + \sqrt{9}},$

$$\therefore \sqrt{17} - \sqrt{13} < \sqrt{13} - 3.$$

【点睛】 本题考查了代数式的大小比较，解题的关键是借助被开方数的差相等，将代数式转化为分式的形式进行比较.

27. 已知关于 x 的方程 $(m-1)x^{m^2+1} + 2x - 3 = 0$ 是一元二次方程.

(1) 求 m 的值;

(2) 解该一元二次方程.

【答案】 (1) $m = -1$

(2) 无解

【解析】

【分析】 (1) 根据一元二次方程的定义：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 次的方程叫一元二次方程，求解即可；

(2) 根据 (1) 求得的 m 值，代入方程，利用根的判别式判定方程无解即可.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 关于 x 的方程 $(m-1)x^{m^2+1} + 2x - 3 = 0$ 是一元二次方程，

$$\therefore \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ m^2+1=2 \end{cases},$$

解得 $m=-1$;

【小问2详解】

解：方程为 $-2x^2+2x-3=0$,

即 $2x^2-2x+3=0$,

$\therefore a=2, b=-2, c=3$,

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4 \times 2 \times 3=4-24=-20<0$,

故原方程无解.

【点睛】本题考查一元二次方程的定义，解一元二次方程，熟练掌握用根的判别式判定一元二次方程根的情况：当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根，当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根，当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根是解题的关键.

28. 先化简，再求值： $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-b} - \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) \div \frac{\sqrt{b}}{a-b}$ ，其中 $a=\frac{4}{3+\sqrt{5}}$ ， $b=3+\sqrt{5}$.

【答案】 $2\sqrt{ab}$ ，4

【解析】

【分析】先根据二次根式的性质，分式的性质，将代数式化简，将 a 的分母有理化，再代入原式即可求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} & \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-b} - \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) \div \frac{\sqrt{b}}{a-b} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} - \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) \div \frac{\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\ &= \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \left[\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right] \div \frac{\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\ &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) \div \frac{\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\ &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \left[\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \right] \div \frac{\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \frac{2\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \times \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}}$$

$$= 2\sqrt{ab},$$

$$\text{且 } a = \frac{4}{3+\sqrt{5}} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{9-5} = 3-\sqrt{5}, \quad b = 3+\sqrt{5},$$

$$\therefore \text{原式} = 2\sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$

$$= 2\sqrt{9-5}$$

$$= 4$$

【点睛】 本题考查了分式的化简求值，二次根式的化简，平方差公式，熟练掌握二次根式的化简是解题的关键.

29. 配方法是数学中重要的一种思想方法，这种方法是根据完全平方公式的特征进行代数式的变形，并结合非负数的意义来解决一些问题，我们规定：一个整数能表示成 $a^2 + b^2$ (a, b 是整数) 的形式，则称这个数为“完美数”. 例如，10 是“完美数”，理由：因为 $10 = 3^2 + 1^2$ ，所以 10 是“完美数”.

解决问题：

(1) 下列各数中，“完美数”有_____ (填序号)；

① 29；② 48；③ 13；④ 28

探究问题：

(2) 若 $x^2 - 6x + 18$ 可配方成 $(x-m)^2 + n^2$ (m, n 为常数)，则 mn 的值为_____；

(3) 已知 $s = a^2 + 4ab + 5b^2 - 12b + k$ (a, b 是整数， k 是常数)，要使 s 为“完美数”，试求出符合条件的一个 k 值，并说明理由.

【答案】 (1) ①③ (2) ± 9

(3) 当 $k = 36$ 时， S 是“完美数”，理由见解答

【解析】

【分析】 (1) 根据“完美数”的定义分别进行判断即可；

(2) 利用配方法进行转化，然后求得对应系数的值；

(3) 利用完全平方式把原式变形，根据“完美数”的定义，即可证明结论.

【小问 1 详解】

解： $\because 29 = 25 + 4 = 5^2 + 2^2$ ， $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$ ， 48 和 28 不能表示成两个整数的平方和，

$\therefore$ “完美数” 有 29 和 13，

故答案为：①③.

【小问 2 详解】

解： $\because x^2 - 6x + 18 = (x - 3)^2 + 9 = (x - m)^2 + n^2$ ，

$\therefore m = 3$ ， $n^2 = 9$ ，

$\therefore n = \pm 3$ ，

$\therefore mn = \pm 9$.

故答案为： ± 9 .

【小问 3 详解】

解： 当 $k = 36$ 时， s 是 “完美数”，

理由如下：

$$s = a^2 + 4ab + 5b^2 - 12b + 16$$

$$= a^2 + 4ab + 4b^2 + b^2 - 12b + 36$$

$$= (a + 2b)^2 + (b - 6)^2,$$

$\because a, b$ 是整数，

$\therefore a + 2b$ 和 $b - 6$ 也是整数，

$\therefore$ 当 $k = 36$ 时， s 是 “完美数” .

【点睛】 本题考查了完全平方公式的应用，理解新定义 “完美数” 并把算式灵活配方是解决问题的关键.