

2023 学年第一学期八年级数学第一次单元练习

(考试时间 70 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (每题 2 分, 满分 12 分)

1. 使二次根式 $\sqrt{2x-1}$ 有意义的 x 的取值范围是()

A. $x \neq \frac{1}{2}$

B. $x > \frac{1}{2}$

C. $x \leq \frac{1}{2}$

D. $x \geq \frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件得出 $2x-1 \geq 0$, 求出不等式的解集即可;

【详解】解: 要使 $\sqrt{2x-1}$ 有意义, 必须 $2x-1 \geq 0$, 即 $x \geq \frac{1}{2}$,

所以使得该二次根式有意义的 x 的取值范围是 $x \geq \frac{1}{2}$;

故选 D.

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件: 二次根式中被开方数不能是负数.

2. 下列二次根式中, 是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$;

B. $\sqrt{4x}$;

C. $\sqrt{x^3y}$;

D. $\sqrt{26x}$.

【答案】D

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义对各选项分析判断后利用排除法求解.

【详解】A、 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 不是最简二次根式, 故本选项错误;

B、 $\sqrt{4x}$ 不是最简二次根式, 故本选项错误;

C、 $\sqrt{x^3y}$ 不是最简二次根式, 故本选项错误;

D、 $\sqrt{26x}$ 是最简二次根式, 故本选项正确.

所以 D 选项是正确的.

【点睛】本题考查最简二次根式的定义, 最简二次根式必须满足两个条件: (1) 被开方数不含分母; (2) 被开方数不含能开得尽方的因数或因式.

3. 下列各式中计算正确的是 ()

A. $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ B. $\sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{3}$ C. $\sqrt{x^2+1} = x+1$ D. $\sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式的分母有理化以及去根号的运算法则分别计算四个选项中的式子，即可判断出哪个是正确的。

【详解】解：A. $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，故 A 错误；

B. $\sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$ ，故选项 B 错误；

C. $\sqrt{x^2+1}$ 是最简二次根式，不能再进行化简，所以 C 错误；

D. $\sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$ ，故 D 选项正确。

故答案选 D.

【点睛】本题主要考查二次根式的化简以及分母有理化，运用二次根式的计算法则，先将二次根式内的式子能计算的先计算，不能计算的就把分子分母的根号分开，之后再利用分母有理化即可得出结果。

4. 下列四个方程中，属于一元二次方程的是 ()

A. $x^2 - 2 = 0$

B. $2x^2 - 2x + 3 = 4 + 2x + 2x^2$

C. $2x^2 - 3\sqrt{x} + 1 = 0$

D. $2x^2 - \frac{1}{x} - 3 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】一元二次方程有三个特点：

(1) 只含有一个未知数；

(2) 未知数的最高次数是 2；

(3) 是整式方程。

同时满足以上三条的方程就是一元二次方程。

【详解】解：A. $x^2 - 2 = 0$ 符合要求，故选项 A 正确；

B. $2x^2 - 2x + 3 = 4 + 2x + 2x^2$ 整理后是一元一次方程，故选项 B 错误；

C. $2x^2 - 3\sqrt{x} + 1 = 0$ 不是整式方程，故选项 C 错误；

D. $2x^2 - \frac{1}{x} - 3 = 0$ 不是整式方程，故选项 D 错误；

故选 A.

【点睛】判断一个方程是否是一元二次方程，首先要看是否是整式方程，然后看化简后是否是只含有一个未知数且未知数的最高次数是 2. 这是一个需要识记的内容.

5. 下列方程中有一个根为-1 的方程是 ()

A. $2x^2 + x = 0$

B. $3x^2 + 2x - 5 = 0$

C. $x^2 - 5x + 4 = 0$

D. $2x^2 - 3x - 5 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】根据方程根的定义，把 $x=-1$ 分别代入各方程，进而判断得出答案.

【详解】当 $x=-1$ 时，

A. $2x^2 + x = 2 \times (-1)^2 + (-1) = 1 \neq 0$ ，故选项 A 不符合题意；

B. $3x^2 + 2x - 5 = 3 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) - 5 = -4 \neq 0$ ，故选项 B 不符合题意；

C. $x^2 - 5x + 4 = (-1)^2 - 5 \times (-1) + 4 = 10 \neq 0$ ，故选项 C 不符合题意；

D. $2x^2 - 3x - 5 = 2 \times (-1)^2 - 3 \times (-1) - 5 = 0$ ，故选项 D 符合题意.

故选 D.

【点睛】此题主要考查了一元二次方程的根的意义，正确掌握一元二次方程的根的意义是解题关键.

6. 若关于 x 的方程 $(x-2)^2 = 1-m$ 无实数根，则 m 满足的条件是

A. $m < 1$

B. $m > 1$

C. $m < 2$

D. $m > 2$

【答案】B

【解析】

【分析】先把方程化成一般式，再根据方程没有实数根，则 $\Delta < 0$ ，解不等式即可得到答案.

【详解】 $(x-2)^2 = 1-m$ 化成一般式得： $x^2 - 4x + 3 + m = 0$

由题意知， $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

即： $(-4)^2 - 4 \times 1 \times (3+m) < 0$

$\therefore m > 1$,

故选 B

【点睛】考查了根的判别式的知识，熟练掌握一元二次方程根的情况与判别式的关系是解题的关键.

二、填空题 (每题 3 分, 共 36 分)

7. $\sqrt{a-b}$ 的一个有理化因式是_____.

【答案】 $\sqrt{a-b}$ (合理即可)

【解析】

【分析】根据有理化因式的定义，直接写出即可.

【详解】解： $\because \sqrt{a-b} \cdot \sqrt{a-b} = a-b$

$\therefore \sqrt{a-b}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{a-b}$ (合理即可) .

【点睛】本题考查了有理化因式的定义. 一般来说 $\sqrt{a}$ 的有理化因式为: $\sqrt{a}$ 或 $b\sqrt{a}$.

8. 若 $a > 0, c > 0$, 化简 $\sqrt{\frac{3a^2b}{8c}}$ = _____.

【答案】 $\frac{a}{4c}\sqrt{6bc}$

【解析】

【分析】根据 $a > 0, c > 0$ 判断出根号里边式子的正负，二次根式的性质即可得到结果.

【详解】解：因为 $a > 0, c > 0$,

$$\text{所以 } \sqrt{\frac{3a^2b}{8c}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot 6bc}{(4c)^2}} = \frac{a}{4c} \sqrt{6bc}.$$

故答案为: $\frac{a}{4c} \sqrt{6bc}$.

【点睛】此题考查了二次根式. 熟练掌握二次根式的性质是解本题的关键.

9. 在实数范围内二次根式 $\frac{\sqrt{x+4}}{2-x}$ 有意义, 那么 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq -4$ 且 $x \neq 2$

【解析】

【分析】让被开方数为非负数，分母不为 0 列式求解即可.

【详解】解：由题意得: $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases}$,

解得 $x \geq -4$ 且 $x \neq 2$,

故答案为: $x \geq -4$ 且 $x \neq 2$.

【点睛】考查二次根式的意义；用到的知识点为：二次根式有意义，被开方数为非负数；分式有意义，分母不为0.

10. 已知 $y = \sqrt{1-6x} + \sqrt{6x-1} + 2$ ，则 $xy =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件可得 x 的值，进而可得 y 的值，再计算 xy 的值即可.

【详解】解：由题意得：
$$\begin{cases} 6x-1 \geq 0 \\ 1-6x \geq 0 \end{cases}$$

解得： $x = \frac{1}{6}$,

则 $y = 2$,

$\therefore xy = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$,

故答案为： $\frac{1}{3}$.

【点睛】此题主要考查了二次根式有意义的条件，关键是掌握二次根式中的被开方数是非负数.

11. 若 $\sqrt{(x-1)^2} = 1-x$ ，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \leq 1$

【解析】

【分析】等式左边为算术平方根，结果为非负数，即 $1-x \geq 0$.

【详解】解：由于二次根式的结果为非负数可知，

$1-x \geq 0$ ，解得 $x \leq 1$ ，

故答案为： $x \leq 1$.

【点睛】本题利用了二次根式的结果为非负数求 x 的取值范围.

12. 若最简二次根式 $-\sqrt{5x-7}$ 与 $2\sqrt{3x+1}$ 是同类二次根式，则 $x =$ _____.

【答案】 4

【解析】

【分析】根据最简二次根式及同类二次根式的定义列方程求解.

【详解】解： $\because$ 最简二次根式 $-\sqrt{5x-7}$ 与 $2\sqrt{3x+1}$ 是同类二次根式，

$\therefore 5x-7 = 3x+1$ ，

解得： $x = 4$.

故答案为：4.

【点睛】 本题考查同类二次根式的定义，即化成最简二次根式后，被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式.

13. 不等式 $(2-\sqrt{3})x < 1$ 的解集是_____.

【答案】 $x < 2 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 直接系数化为1，即可求出不等式的解集.

【详解】 解： $\because (2-\sqrt{3})x < 1$

$$\therefore x < \frac{1}{2-\sqrt{3}},$$

$$\therefore x < \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})},$$

$$\therefore x < \frac{2+\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2},$$

$$\therefore x < 2 + \sqrt{3}.$$

故答案为： $x < 2 + \sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式，解题的关键是掌握解一元一次不等式的方法.

14. 方程 $x^2 = -3x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1=0$, $x_2=-3$

【解析】

【分析】 根据因式分解法即可求解.

【详解】 $x^2 = -3x$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x+3) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 或 } x+3=0$$

$$\therefore x_1=0, x_2=-3.$$

故答案为： $x_1=0$, $x_2=-3$.

【点睛】 此题主要考查解一元二次方程，解题的关键是熟知因式分解法的应用.

15. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m+2)x^2 + \sqrt{2}x + m^2 - 4 = 0$ 的一个根是 0, 则 $m =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 把 $x = 0$ 代入方程即可得出 m 的值, 再由二次项系数不为 0 得出 m 的值.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(m+2)x^2 + \sqrt{2}x + m^2 - 4 = 0$ 有一个根是 0,

$$\therefore m^2 - 4 = 0,$$

$$\therefore m = \pm 2,$$

$$\because m + 2 \neq 0,$$

$$\therefore m \neq -2,$$

$$\therefore m = 2,$$

故答案为 2.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解, 掌握一元二次方程的一般形式 $ax^2 + bx + c = 0$, 其中 $a \neq 0$ 是解题的关键.

16. 如果 $4a - 2b + c = 0$, 则关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根有一个为_____.

【答案】 $x = -2$

【解析】

【分析】 把 $x = -2$ 代入方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 能得出 $4a - 2b + c = 0$, 即可得出答案.

【详解】 解: 当把 $x = -2$ 代入方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 能得出 $4a - 2b + c = 0$,

即方程一定有一个根为 $x = -2$.

故答案为: $x = -2$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解 (根) 的意义: 能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解. 又因为只含有一个未知数的方程的解也叫做这个方程的根, 所以, 一元二次方程的解也称为一元二次方程的根.

17. 如果某厂 2014 年的产值为 100 万元, 两年后的年产值增加到 144 万元, 如果设这两年的每年平均增长率为 x , 那么可以列出方程是_____.

【答案】 $100(1+x)^2 = 144$

【解析】

【分析】 增长率问题, 一般用增长后的量 = 增长前的量 $\times (1 + \text{增长率})$, 参照本题, 如果年平均增长率为 x , 根据 2014 年产值 100 万元, 预计 2016 年产值 144 万元即可得出方程.

【详解】解：设年平均增长率为 x ，

则 2015 的产值为： $100(1+x)$

2016 的产值为： $100(1+x)^2$.

那么可得方程： $100(1+x)^2 = 144$.

故答案为： $100(1+x)^2 = 144$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的运用，解此类题一般是根据题意分别列出不同时间按增长率所得产值与预计产值相等的方程.

18. 等腰 $\triangle ABC$ 的一边长为 3，另外两边的长是关于 x 的方程 $x^2 - 10x + m = 0$ 的两个实数根，求等腰三角形的腰长是_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 结合根与系数的关系，分已知边长 3 是底边和腰两种情况讨论.

【详解】 解：设关于 x 的方程 $x^2 - 10x + m = 0$ 的两个实数根分别为 a 、 b .

$\because$ 方程 $x^2 - 10x + m = 0$ 有两个实数根，

$\therefore \Delta = 100 - 4m \geq 0$ ，得 $m \leq 25$.

①当底边长为 3 时，另两边相等时， $a + b = 10$ ，

$\therefore$ 另两边的长都是为 5，

则 $m = ab = 25$ ，

$\therefore$ 腰长为 5；

②当腰长为 3 时，另两边中至少有一个是 3，

则 3 一定是方程 $x^2 - 10x + m = 0$ 的根，

而 $a + b = 10$ ，

$\therefore$ 另一根为： 7.

$\because 3 + 3 < 7$ ，不能构成三角形.

综上：腰长为 5

故答案为： 5.

【点睛】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ：当 $\Delta > 0$ ，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ ，方程没有实数根. 也考查了三角形三边的关系以及等腰三角形的性质.

三、简答题 (每小题 5 分, 满分 30 分)

19. 计算: $\frac{\sqrt{12}}{2} - \frac{\sqrt{18}}{3} + 2\sqrt{32} - \sqrt{\frac{1}{12}}$.

【答案】 $7\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{3}}{6}$

【解析】

【分析】 先将各二次根式进行化简, 再合并同类二次根式即可得解.

【详解】 $\frac{\sqrt{12}}{2} - \frac{\sqrt{18}}{3} + 2\sqrt{32} - \sqrt{\frac{1}{12}}$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{2} + 8\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$
$$= 7\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

【点睛】 此题考查二次根式的混合运算, 先化简, 再合并同类二次根式, 注意选择合适的方法简算.

20. 计算: $\frac{1}{2}\sqrt{4x} + 5x\sqrt{\frac{x}{3}} \cdot \sqrt{\frac{6}{x^2}} - 2\sqrt{\frac{x}{2}}$.

【答案】 $\sqrt{x} + 4\sqrt{2x}$.

【解析】

【分析】 先把二次根式进行化简, 再合并同类二次根式即可求得结果.

【详解】 解: $\frac{1}{2}\sqrt{4x} + 5x\sqrt{\frac{x}{3}} \cdot \sqrt{\frac{6}{x^2}} - 2\sqrt{\frac{x}{2}}$

$$= \sqrt{x} + 5x\sqrt{\frac{x}{3} \cdot \frac{6}{x^2}} - 2\sqrt{\frac{2x}{4}}$$
$$= \sqrt{x} + 5\sqrt{2x} - \sqrt{2x}$$
$$= \sqrt{x} + 4\sqrt{2x}.$$

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算, 在进行此类运算时, 一般先把二次根式化为最简二次根式的形式后再运算.

21. 解方程: $3(x-2)^2 + x(2-x) = 0$.

【答案】 $x_1 = 2, x_2 = 3$

【解析】

【分析】先利用因式分解法把方程转化为 $x-2=0$ 或 $2x-6=0$ ，然后解一次方程即可.

【详解】解: $3(x-2)^2 + x(2-x) = 0$,

$$3(x-2)^2 - x(x-2) = 0.$$

$$(x-2)(2x-6) = 0,$$

$$x-2=0 \text{ 或 } 2x-6=0,$$

$$\text{所以 } x_1=2, \quad x_2=3.$$

【点睛】本题考查了解一元二次方程-因式分解法: 因式分解法就是利用因式分解求出方程的解的方法, 这种方法简便易用, 是解一元二次方程最常用的方法.

22. 解方程: $\frac{x^2-x}{2} - 2 = x$

【答案】 $x_1=4, \quad x_2=-1$

【解析】

【分析】整理后分解因式, 即可得出两个一元一次方程, 求出方程的解即可.

【详解】 $\frac{x^2-x}{2} - 2 = x$,

$$x^2 - x - 4 = 2x,$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0,$$

$$(x-4)(x+1) = 0,$$

$$x_1=4, x_2=-1.$$

【点睛】本题考查了解一元二次方程的应用, 关键是能把一元二次方程转化成一元一次方程.

23. 用配方法解方程: $4x^2 - 2x - 1 = 0$

【答案】 $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$

【解析】

【分析】先把常数项移到等号右边, 将二次项系数化为 1, 得到 $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$, 方程两边同时加上一项系数一半的平方 $\frac{1}{16}$, 配成完全平方式, 得到 $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$, 直接开平方后即可求解.

【详解】解： $4x^2 - 2x - 1 = 0$

移项，得： $4x^2 - 2x = 1$ ，

系数化为 1，得： $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$ ，

配方，得： $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$ ，

即 $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$ ，

开方，得： $x - \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$ ，

解得： $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ ， $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ 。

【点睛】 本题考查了配方法解一元二次方程，熟练掌握用配方法解一元二次方程的步骤是解题的关键。

24. 在实数范围内分解因式： $2x^2 - 3x - 1$ 。

【答案】 $\left(\sqrt{2}x - \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{34}}{4}\right)\left(\sqrt{2}x - \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{34}}{4}\right)$

【解析】

【分析】 根据完全平方公式将原式变形为 $2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{8}$ ，再利用平方差公式分解即可求得答案。

【详解】解： $2x^2 - 3x - 1$ 。

$$= 2\left(x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}\right) - 1$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{8}$$

$$= \left(\sqrt{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{34}}{4}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{34}}{4}\right)\left(\sqrt{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{34}}{4}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}x - \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{34}}{4}\right)\left(\sqrt{2}x - \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{34}}{4}\right)，$$

$$\text{故答案为： } \left(\sqrt{2}x - \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{34}}{4}\right)\left(\sqrt{2}x - \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{34}}{4}\right)。$$

【点睛】 本题考查实数范围内的因式分解，运用了完全平方公式和平方差公式，将原式变形为 $2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{8}$

是解题的关键.

四、解答题 (本大题共 22 分, 第 25-26 题每题 7 分, 第 27 题 8 分)

25. 已知 $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, 求 $x^2 - 4x + 5$ 的值.

【答案】 4

【解析】

【分析】 由题意可得: $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$, 再代入相应的值运算即可.

【详解】 解: $\because x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$,

$$\therefore x = 2 - \sqrt{3},$$

$$x^2 - 4x + 5$$

$$= (x-2)^2 + 1$$

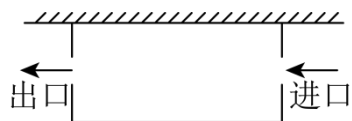
把 $x = 2 - \sqrt{3}$ 代入得:

$$= (2 - \sqrt{3} - 2)^2 + 1$$

$$= 4.$$

【点睛】 本题主要考查二次根式的化简求值, 解答的关键是对相应的运算法则的掌握.

26. 中国上海国际艺术节期间, 主办方工作人员准备利用一边靠墙(墙长 26 米)的空旷场地为提前到场的观众设立面积为 300 平方米的封闭型长方形等候区. 如图, 为了方便观众进出, 在两边空出两个宽各为 1 米的出入口, 共用去围栏绳 48 米. 请问, 工作人员围成的这个长方形的相邻两边长分别是多少米?

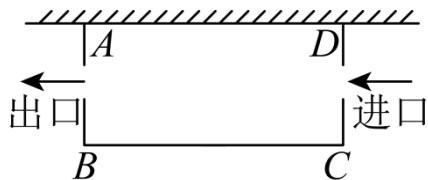


【答案】 封闭型长方形等候区的边 AB 为 15 米, BC 为 20 米.

【解析】

【分析】 设封闭型长方形等候区的边 AB 为 x 米, 根据面积为 300 平方米的封闭型长方形等候区可得 $(48+2-2x)x=300$, 再解一元二次方程即可.

【详解】 解: 设封闭型长方形等候区的边 AB 为 x 米,



由题意得: $x(48-2x+2)=300$,

整理, 得 $x^2-25x+150=0$,

解得 $x_1=10$, $x_2=15$,

当 $x=10$ 时, $BC=30>26$;

当 $x=15$ 时, $BC=20<26$,

$\therefore x=10$ 不合题意, 应舍去.

答: 封闭型长方形等候区的边 AB 为 15 米, BC 为 20 米.

【点睛】此题主要考查了一元二次方程的应用, 关键是正确理解题意, 正确表示出长方形的长和宽.

27. 阅读: 对于所有的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 中, 对于两根 x_1, x_2 , 存在如下关系:

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$. 试着利用这个关系解决问题. 设方程 $2x^2-5x-3=0$ 的两根为 x_1, x_2 ,

(1) 不解方程, 求 $x_1+x_2=$ _____, $x_1 \cdot x_2=$ _____.

(2) 不解方程, 求 $x_1^2+x_2^2=$ _____.

(3) 不解方程, 求 $2x_2^2-5x_2=$ _____.

(4) 不解方程, 求下列式子的值: $2x_1^2+4x_2^2+5x_1$.

【答案】(1) $\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$

(2) $\frac{37}{4}$

(3) 3 (4) 34

【解析】

【分析】(1) 根据方程 $2x^2-5x-3=0$ 的两个根为 x_1, x_2 , 可得 $x_1+x_2=\frac{5}{2}$, $x_1 \cdot x_2=-\frac{3}{2}$;

(2) 根据方程 $2x^2-5x-3=0$ 的两个根为 x_1, x_2 , $x_1+x_2=\frac{5}{2}$, $x_1 \cdot x_2=-\frac{3}{2}$ 代入即可;

(3) 由题意得 $2x_2^2-5x_2-3=0$, 等式变形代入即可;

(4) 根据一元二次方程根的定义得到 $2x_1^2=5x_1+3$, $2x_2^2=5x_2+3$, 则原式 $=10(x_1+x_2)+9$, 再根据根与系

数的关系得到 $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$ ，然后利用整体代入的方法计算.

【小问 1 详解】

解：∵ 方程 $2x^2 - 5x - 3 = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{5}{2}, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{2},$$

故答案为: $\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$

【小问 2 详解】

$$\because x_1 + x_2 = \frac{5}{2}, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{25}{4} + 3$$

$$= \frac{37}{4}$$

故答案为: $\frac{37}{4}$

【小问 3 详解】

∵ 方程 $2x^2 - 5x - 3 = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 ,

$$\therefore 2x_2^2 - 5x_2 - 3 = 0,$$

$$\text{即 } 2x_2^2 = 5x_2 + 3,$$

$$2x_2^2 - 5x_2 = 5x_2 + 3 - 5x_2 = 3$$

故答案为: 3

【小问 4 详解】

∵ 方程 $2x^2 - 5x - 3 = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 ,

$$\therefore 2x_1^2 - 5x_1 - 3 = 0, \quad 2x_2^2 - 5x_2 - 3 = 0,$$

$$\text{即 } 2x_1^2 = 5x_1 + 3, \quad 2x_2^2 = 5x_2 + 3,$$

$$\therefore \text{原式} = 5x_1 + 3 + 2(5x_2 + 3) + 5x_1$$

$$= 10(x_1 + x_2) + 9$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \text{原式} = 10 \times \frac{5}{2} + 9 = 34.$$

【点睛】 本题考查了根与系数的关系：若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根时，

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$
 也考查了一元二次方程根的定义.