

2020~2021 学年 10 月上海市闵行区民办华东师大二附中紫竹双语学校八年级上学期月考数学

试卷

(满分: 100 分)

一、选择题 (共六题: 共 18 分)

1. 下列各式中, 一定是最简二次根式的是 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt[3]{-3}$ C. $\sqrt{x^2}$ D. $\sqrt{9}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 被开方数不含分母; 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式. 我们把满足上述两个条件的二次根式, 叫做最简二次根式, 根据定义, 逐条判断即可.

【详解】 解: A、 $\sqrt{2}$ 属于最简二次根式, 符合题意;

B、 $\sqrt[3]{-3}$ 属于三次根式, 不合题意;

C、 $\sqrt{x^2} = |x|$, 不属于最简二次根式, 不合题意;

D、 $\sqrt{9} = 3$, 不属于最简二次根式, 不合题意;

故选: A.

【点睛】 本题主要考查了最简二次根式, 最简二次根式的条件: (1) 被开方数的因数是整数或字母, 因式是整式; (2) 被开方数中不含有可化为平方数或平方式的因数或因式.

2. 关于 x 的方程中:

① $ax^2 + bx + c = 0$; ② $x - (x-1)(3-x) = 0$;

③ $(k^2 + 1)x^2 + kx = 1$; ④ $\frac{3}{x^2 - 3} = \frac{1}{5}$;

其中一定是一元二次方程的个数有 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的定义对各小题进行逐一判断即可.

【详解】 解: ① $ax^2 + bx + c = 0$ 当 $a = 0$ 是一元一次方程, 故不符合题意;

② $x - (x - 1)(3 - x) = 0$ 是一元二次方程，故符合题意；

③ $(k^2 + 1)x^2 + kx = 1$ 是一元二次方程，故符合题意；

④ $\frac{3}{x^2 - 3} = \frac{1}{5}$ 是分式方程，故不符合题意；

所以是一元二次方程有②③，共 2 个。

故选：B。

【点睛】 本题考查的是一元二次方程的定义，掌握只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程是解答此题的关键。

3. 点 $A(m, 2)$ ， $B(n, \sqrt{3})$ 在函数 $y = -\frac{3}{x}$ 图象上，那么 m ， n 的符号和大小关系是 ()

- A. $m < n < 0$ B. $n < m < 0$ C. $m > n > 0$ D. $n > m > 0$

【答案】 B

【解析】

【分析】 先判断反比例函数的图象所在的象限，再利用反比例函数的增减性求解即可得。

【详解】 解： $\because$ 在函数 $y = -\frac{3}{x}$ 中， $k = -3 < 0$ ，

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大，函数图象位于第二、四象限，

又 $\because$ 点 $A(m, 2)$ ， $B(n, \sqrt{3})$ 在函数 $y = -\frac{3}{x}$ 图象上，且 $2 > \sqrt{3} > 0$ ，

$\therefore n < m < 0$ ，

故选：B。

【点睛】 本题考查了反比例函数的图象与性质，熟练掌握反比例函数的增减性是解题关键。

4. 下列各组数中不能作为直角三角形的三边长是 () 。

- A. 7, 24, 25 B. $\sqrt{3}$, 2, 1 C. 13, 15, 14 D. 13, 12, 5

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据勾股定理的逆定理、二次根式的乘法逐项判断即可得。

【详解】 解： A、 $7^2 + 24^2 = 625 = 25^2$ ，能作为直角三角形的三边长，则此项不符合题意；

B、 $1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 = 2^2$ ，能作为直角三角形的三边长，则此项不符合题意；

C、 $13^2 + 14^2 = 365 \neq 15^2$ ，不能作为直角三角形的三边长，则此项符合题意；

D、 $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$ ，能作为直角三角形的三边长，则此项不符合题意；

故选：C.

【点睛】 本题考查了勾股定理的逆定理、二次根式的乘法，熟练掌握勾股定理的逆定理是解题关键.

5. 已知 $A(4,3)$, $B(1,2)$, $C(3,-4)$, 那么 $\triangle ABC$ 的形状是 ().

- A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 等腰直角三角形 D. 以上都不是

【答案】 B

【解析】

【分析】 先根据两点之间的距离公式可得 AB^2 , AC^2 , BC^2 , 再根据勾股定理的逆定理即可得.

【详解】 解: $\because A(4,3)$, $B(1,2)$, $C(3,-4)$,

$$\therefore AB^2 = (1-4)^2 + (2-3)^2 = 10,$$

$$AC^2 = (3-4)^2 + (-4-3)^2 = 50,$$

$$BC^2 = (3-1)^2 + (-4-2)^2 = 40,$$

$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2, \quad AB \neq AC \neq BC,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,

故选: B.

【点睛】 本题考查了两点之间的距离公式、勾股定理的逆定理，熟练掌握勾股定理的逆定理是解题关键.

6. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 的两实数根分别为 x_1 、 x_2 , 且 $x_1 + 3x_2 = 5$, 则 m 的值为 ()

- A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{7}{5}$ C. $\frac{7}{6}$ D. 0

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据一元二次方程根与系数的关系得到 $x_1 + x_2 = 4$, 代入代数式计算即可.

【详解】 解: $\because x_1 + x_2 = 4$,

$$\therefore x_1 + 3x_2 = x_1 + x_2 + 2x_2 = 4 + 2x_2 = 5,$$

$$\therefore x_2 = \frac{1}{2},$$

把 $x_2 = \frac{1}{2}$ 代入 $x^2 - 4x + m = 0$ 得: $(\frac{1}{2})^2 - 4 \times \frac{1}{2} + m = 0$,

$$\text{解得: } m = \frac{7}{4},$$

故选 A.

【点睛】 本题考查的是一元二次方程根与系数的关系，掌握一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与系数的

关系为: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$ 是解题的关键.

二、填空题 (共十二题: 共 24 分)

7. 如果 $\frac{\sqrt{3-a}}{a-2}$ 有意义, 那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \leq 3$ 且 $a \neq 2$ 或 $a \neq 2$ 且 $a \leq 3$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义和分式有意义的条件列出不等式组 $\begin{cases} 3-a \geq 0 \\ a-2 \neq 0 \end{cases}$, 解之即可求解.

【详解】 解: 由题意, 得 $\begin{cases} 3-a \geq 0 \\ a-2 \neq 0 \end{cases}$,

解得: $a \leq 3$ 且 $a \neq 2$,

故答案为: $a \leq 3$ 且 $a \neq 2$.

【点睛】 本题考查二次根式有意义和分式有意义的条件, 解题关键是熟练掌握二次根式有意义的条件: 被开方数为非负数; 分式有意义的条件是分母不为零.

8. 分母有理化: $\frac{1}{\sqrt{6}-2} =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{6}+2}{2}$

【解析】

【分析】 分子、分母同时乘以 $(\sqrt{6}+2)$, 可利用平方差公式将分母有理化.

【详解】 解: $\frac{1}{\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{6}+2}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} = \frac{\sqrt{6}+2}{2}$

故答案为 : $\frac{\sqrt{6}+2}{2}$

【点睛】 本题考查分母有理化. 熟悉平方差公式是解题关键.

9. 在实数范围内因式分解: $2x^2 + 4x - 1 =$ _____.

【答案】 $(\sqrt{2}x + \sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{2} - \sqrt{3})$

【解析】

【分析】 先将原式变形为 $2(x^2 + 2x + 1) - 3$, 则有 $2(x^2 + 2x + 1) - 3 = [\sqrt{2}(x+1)]^2 - (\sqrt{3})^2$, 再运用平

方差公式分解即可.

【详解】解: $2x^2 + 4x - 1$

$$= 2x^2 + 4x + 2 - 3$$

$$= 2(x^2 + 2x + 1) - 3$$

$$= [\sqrt{2}(x+1)]^2 - (\sqrt{3})^2$$

$$= [\sqrt{2}(x+1) + \sqrt{3}][\sqrt{2}(x+1) - \sqrt{3}]$$

$$= (\sqrt{2}x + \sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{2} - \sqrt{3}).$$

故答案为: $(\sqrt{2}x + \sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{2} - \sqrt{3})$.

【点睛】本题考查分组分解法分解因式, 先把多项式的项割补法进行分组, 然后运用完全平方公式分解, 再运用平方差公式进行分解, 注意分解因式要彻底, 直到不能再分解为止.

10. 如果 $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$, 那么 $f(\sqrt{2}) =$ _____.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据题意可直接进行求解.

【详解】解: 由题可得:

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2x^2 - 1} = \sqrt{2 \times (\sqrt{2})^2 - 1} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3},$$

故答案为 $\sqrt{3}$.

【点睛】本题主要考查函数, 熟练掌握函数的表示及概念是解题的关键.

11. 若反比例函数 $y = \frac{1-3k}{x}$ 的图象不经过第一象限, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k > \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】根据图象在坐标平面内的位置: 不经过第一象限, 则 $1-3k < 0$, 解之即可求得 k 的取值范围, 从而求解.

【详解】解: 反比例函数 $y = \frac{1-3k}{x}$ 的图象不经过第一象限,

则经过二四象限,

$\therefore 1-3k < 0$.

解得: $k > \frac{1}{3}$.

故答案为: $k > \frac{1}{3}$.

【点睛】 本题考查了反比例函数图象性质, 熟练掌握反比例函数的图象性质是解题的关键.

12. 若实数 a 、 b 满足 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$, $\sqrt{ab} = \sqrt{15}$, 则 $a - b =$ _____.

【答案】 ± 2

【解析】

【分析】 先将 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ 两边平方, 化简得出 $a + b$ 的值, 再利用 $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$ 得出 $(a - b)^2$ 的值, 再求 $(a - b)^2$ 的平方根即可得解.

【详解】 解: $\because \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$,

$$\therefore (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2,$$

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 8 + 2\sqrt{15},$$

$$\because \sqrt{ab} = \sqrt{15},$$

$$\therefore a + b = 8, \quad ab = 15,$$

$$\therefore (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

$$= 8^2 - 4 \times 15$$

$$= 64 - 60$$

$$= 4,$$

$$\therefore a - b = \pm 2.$$

故答案为: ± 2 .

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算, 代数式求值, 掌握完全平方公式及其变形是解题的关键.

13. 命题“等腰三角形的两个底角相等”的逆命题是_____.

【答案】 “两个角相等的三角形是等腰三角形”

【解析】

【分析】 逆命题就是原命题的题设和结论互换, 找到原命题的题设为等腰三角形, 结论为两个角相等, 互换即可.

【详解】 解: 命题“等腰三角形的两个底角相等”的逆命题是“两个角相等的三角形是等腰三角形”,

故答案为: “两个角相等的三角形是等腰三角形”.

【点睛】 本题考查逆命题的概念，解决本题的关键是熟练掌握逆命题的概念，知道题设和结论互换.

14. 以线段 MN 为底边的等腰三角形的顶角顶点的轨迹是 _____.

【答案】 线段 MN 的垂直平分线 (线段 MN 的中点除外)

【解析】

【分析】 满足 $\triangle MNC$ 以线段 MN 为底边且 $CM = CN$ ，根据线段的垂直平分线判定得到点 C 在线段 AB 的垂直平分线上，除去与 MN 的交点 (交点不满足三角形的条件).

【详解】 解: $\because \triangle MNC$ 以线段 MN 为底边, $CM = CN$,

$\therefore$ 点 C 在线段 MN 的垂直平分线上, 除去与 MN 的交点 (交点不满足三角形的条件),

$\therefore$ 以线段 MN 为底边的等腰三角形的顶点 C 的轨迹是: 线段 MN 的垂直平分线 (线段 MN 的中点除外).

故答案为: 线段 MN 的垂直平分线 (线段 MN 的中点除外).

【点睛】 此题主要考查垂直平分线的判定，解题的关键是熟知等腰三角形的性质及垂直平分线的判定定理.

15. 若点 P 在 y 轴上，点 A 坐标是 $(2, 1)$ ，且 $PA = \sqrt{6}$ ，点 P 的坐标是_____.

【答案】 $(0, 1 + \sqrt{2})$ 或 $(0, 1 - \sqrt{2})$

【解析】

【分析】 设点 P 的坐标是 $(0, y)$ ，根据勾股定理，得 $PA^2 = 2^2 + (1 - y)^2$ ，即 $(\sqrt{6})^2 = 2^2 + (1 - y)^2$ ，求出方程的解，即可求解.

【详解】 解: 设点 P 的坐标是 $(0, y)$,

$\because$ 点 A 坐标是 $(2, 1)$ ，且 $PA = \sqrt{6}$,

根据勾股定理，得 $PA^2 = 2^2 + (1 - y)^2$

$$\therefore PA^2 = 2^2 + (1 - y)^2$$

$$\text{即 } (\sqrt{6})^2 = 2^2 + (1 - y)^2$$

$$\text{化简整理，得 } y^2 - 2y - 1 = 0$$

$$\text{解得: } y_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad y_2 = 1 - \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标是 } (0, 1 + \sqrt{2}) \text{ 或 } (0, 1 - \sqrt{2}).$$

$$\text{故答案为: } (0, 1 + \sqrt{2}) \text{ 或 } (0, 1 - \sqrt{2}).$$

【点睛】 本题考查平面直角坐标系中点的坐标的求解，掌握坐标轴上点的坐标特征和勾股定理，会解一元二次方程是解题的关键.

16. 一元二次方程 $(x+7)(x-3)+(x+7)(x+17)+2(x-3)(x+17)=0$ 的两根为 x_1 、 x_2 ，则 $(1-x_1)(1-x_2)=$ _____.

【答案】 14

【解析】

【分析】 先将原方程展开并化简得 $x^2+14x-1=0$ ，再由根与系数关系得 $x_1+x_2=-14$ ， $x_1x_2=-1$ ，然后将 $(1-x_1)(1-x_2)$ 展开，得 $1-(x_1+x_2)+x_1x_2$ ，即可整体代入计算即可.

【详解】 解： $\because (x+7)(x-3)+(x+7)(x+17)+2(x-3)(x+17)=0$

$$\therefore x^2+14x-1=0$$

$\therefore$ 方程的两根为 x_1 、 x_2 ，

$$\therefore x_1+x_2=-14, \quad x_1x_2=-1,$$

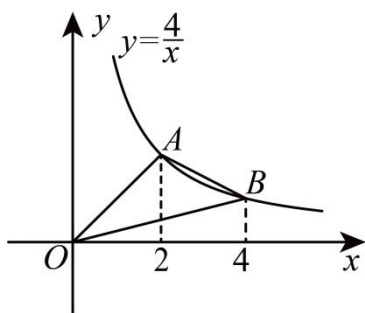
$$\therefore (1-x_1)(1-x_2)=1-(x_1+x_2)+x_1x_2=1-(-14)-1=14.$$

故答案为：14.

【点睛】 本题主要考查一元二次函数根与系数的关系，代数式求值，熟练掌握： x_1 ， x_2 是一元二次方程

$ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的两根时， $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ ， $x_1x_2=\frac{c}{a}$ 是解题关键.

17. 如图，A，B 是反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 在第一象限内的图象上的两点，且 A，B 两点的横坐标分别是 2 和 4，则 $\triangle OAB$ 的面积是_____.



【答案】 3

【解析】

【分析】 先根据反比例函数图象上点的坐标特征及 A，B 两点的横坐标，求出 A (2, 2)，B (4, 1). 再过 A，B 两点分别作 $AC \perp x$ 轴于 C， $BD \perp x$ 轴于 D，根据反比例函数系数 k 的几何意义得出

$S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOD}=\frac{1}{2} \times 4=2$. 根据 $S_{\text{四边形 AODB}}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOD}=S_{\triangle AOC}+S_{\text{梯形 ABDC}}$ ，得出 $S_{\triangle AOB}=S_{\text{梯形 ABDC}}$ ，利用梯形面

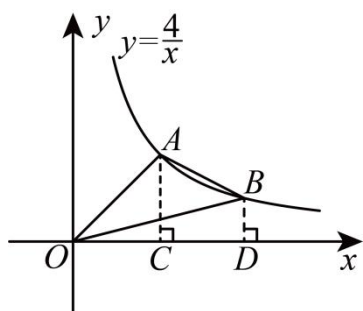
积公式求出 $S_{\text{梯形}ABDC} = \frac{1}{2} (BD+AC) \cdot CD = \frac{1}{2} (1+2) \times 2 = 3$ ，从而得出 $S_{\triangle AOB} = 3$ 。

【详解】解：∵ A，B 是反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 在第一象限内的图象上的两点，且 A，B 两点的横坐标分别是 2 和 4，

∴ 当 $x=2$ 时， $y=2$ ，即 A (2, 2)，

当 $x=4$ 时， $y=1$ ，即 B (4, 1)。

如图，过 A，B 两点分别作 $AC \perp x$ 轴于 C， $BD \perp x$ 轴于 D，



则 $S_{\triangle AOC} = S_{\triangle BOD} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ 。

∵ $S_{\text{四边形}AODB} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOD} = S_{\triangle AOC} + S_{\text{梯形}ABDC}$ ，

∴ $S_{\triangle AOB} = S_{\text{梯形}ABDC}$ ，

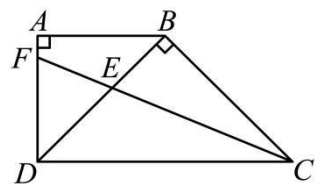
∴ $S_{\text{梯形}ABDC} = \frac{1}{2} (BD+AC) \cdot CD = \frac{1}{2} (1+2) \times 2 = 3$ ，

∴ $S_{\triangle AOB} = 3$ 。

故答案是：3。

【点睛】主要考查了反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中 k 的几何意义，即图象上的点与原点所连的线段、坐标轴、向坐标轴作垂线所围成的直角三角形面积 S 的关系即 $S = \frac{1}{2} |k|$ 。

18. 如图，在四边形 ABCD 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 1$ ， $BD \perp BC$ ， $BD = BC$ ，CF 平分 $\angle BCD$ 交 BD、AD 于 E、F，则 $\triangle EDC$ 的面积为_____。

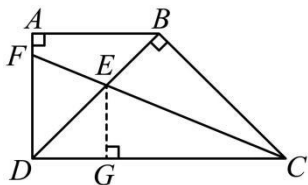


【答案】 $2-\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先过点 E 作 $EG \perp CD$ 于 G ，再判定 $\triangle BCD$ 、 $\triangle ABD$ 都是等腰直角三角形，并求得其边长，最后利用等腰直角三角形，求得 EG 的长，进而得到 $\triangle EDC$ 的面积.

【详解】解：过点 E 作 $EG \perp CD$ 于 G ，



又 $\because CF$ 平分 $\angle BCD$ ， $BD \perp BC$ ， $EG \perp CD$ ，

$\therefore BE = GE$ ， $BC = GC$ ，

$\because BD \perp BC$ ， $BD = BC$ ，

$\therefore \triangle BCD$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle BDC = 45^\circ$ ，

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle ABD = 45^\circ$ ，

又 $\because \angle A = 90^\circ$ ， $AB = 1$ ，

$\therefore$ 等腰直角三角形 ABD 中， $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = BC$ ，

$\therefore$ Rt $\triangle BDC$ 中， $CD = \sqrt{BD^2 + BC^2} = 2$ ，

$\therefore DG = DC - GC = 2 - \sqrt{2}$ ，

$\because \triangle DEG$ 是等腰直角三角形，

$\therefore EG = DG = 2 - \sqrt{2}$ ，

$\therefore \triangle EDC$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times DC \times EG = \frac{1}{2} \times 2 \times (2 - \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}$ 。

故答案为： $2 - \sqrt{2}$ 。

【点睛】本题主要考查了角平分线的性质的运用，解决问题的关键是作辅助线，构造直角三角形 EDG 进行求解.

三、简答题 (共四题: 共 29 分)

19. 计算: $\sqrt{8x} - 2\sqrt{\frac{x}{2}} + 2x\sqrt{\frac{2}{9x}}$

【答案】 $\frac{5}{3}\sqrt{2x}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的加减法的计算方法进行化简，再合并同类二次根式即可.

【详解】 原式 $= 2\sqrt{2x} - \sqrt{2x} + \frac{2}{3}\sqrt{2x} = \frac{5}{3}\sqrt{2x}$.

【点睛】 本题考查二次根式的加减运算，掌握二次根式的性质以及合并同类二次根式的方法是正确计算的前提.

20. 解方程: $x^2 + 4x - 7 = 0$.

【答案】 $x_1 = -2 + \sqrt{11}$, $x_2 = -2 - \sqrt{11}$

【解析】

【分析】 利用配方法解答，即可求解.

【详解】 解: 方程 $x^2 + 4x - 7 = 0$ 可化为 $(x+2)^2 = 11$,

解得: $x+2 = \pm\sqrt{11}$,

$\therefore x_1 = -2 + \sqrt{11}$, $x_2 = -2 - \sqrt{11}$.

【点睛】 本题主要考查了解一元二次方程，熟练掌握一元二次方程的解法，并灵活选用合适的方法解答是解题的关键.

21. 关于 x 的一元二次方程 $(c-a)x^2 + 2bx + (c+a) = 0$ 中的 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，若方程有两个相等的实数根，请判断 $\triangle ABC$ 的形状并加以说明.

【答案】 $\triangle ABC$ 为直角三角形；证明见解析

【解析】

【分析】 根据方程有两个相等的实数根，结合根的判别式可得出 $\Delta = 4b^2 - 4(c+a)(c-a) = 0$ ，整理即可得出 $c^2 = a^2 + b^2$ ，由此得出 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

【详解】 解: $\triangle ABC$ 为直角三角形；理由如下:

$\because$ 一元二次方程 $(c-a)x^2 + 2bx + (c+a) = 0$ 有两个相等的实数根， a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，

$$\therefore \begin{cases} c-a \neq 0 \\ \Delta = (2b)^2 - 4(c+a)(c-a) = 0 \end{cases},$$

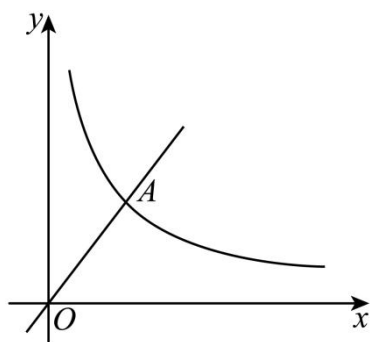
解得: $c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

【点睛】 本题考查一元二次方程和勾股定理，熟练掌握一元二次方程根的判别式和勾股定理的逆定理的应

用是解题的关键.

22. 如图, 在平面直角坐标系中, 正比例函数 $y = \frac{4}{3}x$ 的图象经过点 A, 点 A 的纵坐标为 4, 反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象也经过点 A; 第一象限内的点 B 在这个反比例函数的图象上, 过点 B 作 $BC \parallel x$ 轴, 交 y 轴于点 C, 且 $AC = AB$. 求:



(1) 这个反比例函数的解析式.

(2) 求点 C 的坐标.

(3) 直线 AB 的函数表达式.

【答案】(1) $y = \frac{12}{x}$;

(2) $(0, 2)$;

(3) $y = -\frac{2}{3}x + 6$.

【解析】

【分析】(1) 根据正比例函数 $y = \frac{4}{3}x$ 的图象经过点 A, 点 A 的纵坐标为 4, 求出点 A 的坐标, 根据反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象经过点 A, 求出 m 的值;

(2) 根据点 A 的坐标和等腰三角形的性质求出点 B 的坐标, 再求出点 C 坐标即可;

(3) 运用待定系数法求出直线 AB 的表达式.

【小问 1 详解】

$\because$ 正比例函数 $y = \frac{4}{3}x$ 的图象经过点 A, 点 A 的纵坐标为 4,

$\therefore$ 将 $y = 4$ 代入 $y = \frac{4}{3}x$ 得: $x = 3$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(3, 4)$,

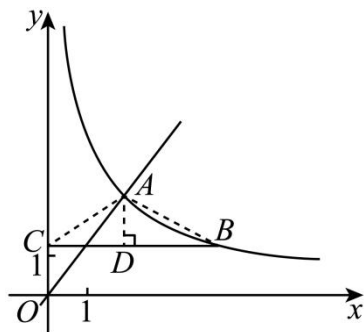
$\because$ 反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象经过点 A,

$\therefore m = 12$,

$\therefore$ 反比例函数的解析式为: $y = \frac{12}{x}$;

【小问 2 详解】

如图, 连接 AC 、 AB , 作 $AD \perp BC$ 于 D ,



$\because AC = AB$, $AD \perp BC$,

$\therefore BC = 2CD = 6$,

$\therefore$ 将 $x = 6$ 代入 $y = \frac{12}{x}$ 得: $y = 2$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为: $(6, 2)$,

$\because BC \parallel x$ 轴,

$\therefore$ 点 C 的坐标为: $(0, 2)$,

【小问 3 详解】

设直线 AB 的表达式为: $y = kx + b$,

由题意得,
$$\begin{cases} 3k + b = 4 \\ 6k + b = 2 \end{cases}$$

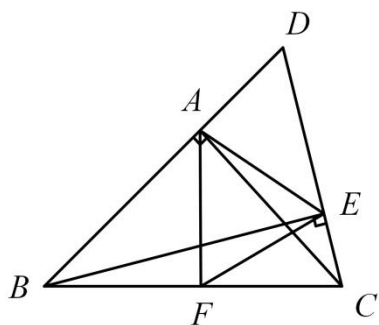
解得,
$$\begin{cases} k = -\frac{2}{3} \\ b = 6 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为: $y = -\frac{2}{3}x + 6$.

【点睛】 本题主要考查了待定系数法求反比例函数与一次函数的解析式和一次函数与反比例函数的交点的求法, 注意数形结合的思想在解题中的应用.

四、解答题 (共三题: 共 29 分)

23. 如图, 在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 延长 BA 至点 D , 连接 DC , 过点 B 作 $BE \perp DC$ 于点 E , F 是 BC 的中点, 连接 AF 、 AE .



(1) 求证: $FA = FE$.

(2) 若 $\angle D = 60^\circ$, $AC = 8\sqrt{2}$, 求 $\triangle AEF$ 的周长.

【答案】(1) 见解析 (2) 24

【解析】

【分析】(1) 由等腰三角形的性质, 结合斜中半定理即可求证;

(2) 求出 $\angle FCE$ 即可求出 $\angle FAE$, 可得 $\triangle AEF$ 是等边三角形, 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, F 是 BC 的中点

$$\therefore FA = FB = FC$$

$\because \angle BEC = 90^\circ$, F 是 BC 的中点

$$\therefore FE = \frac{1}{2}BC = FC = FB$$

$$\therefore FA = FE$$

【小问 2 详解】

解: $\because \angle D = 60^\circ$

$$\therefore \angle ACD = 30^\circ$$

$\because$ 等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$

$$\therefore \angle ACF = 45^\circ$$

$$\therefore \angle FCE = \angle ACF + \angle ACD = 75^\circ$$

由 (1) 得: $FC = FE$

$$\therefore \angle FCE = \angle FEC = 75^\circ, \angle EFC = 30^\circ$$

$\because$ 在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, F 是 BC 的中点

$$\therefore \angle AFC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AFE = \angle AFC - \angle EFC = 60^\circ$$

$\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形

$$\therefore AC = 8\sqrt{2}, AF = CF, AC^2 = AF^2 + CF^2$$

$$\therefore AF = 8$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 的周长为: } 8 \times 3 = 24$$

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质、直角三角形的性质、勾股定理、等边三角形的性质. 掌握直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半是解题关键.

24. 新冠疫情蔓延全球, 口罩成了人们的生活必需品, 某药店销售普通口罩和 N95 口罩, 今年 8 月份的进价如下表:

	普通口罩	N95 口罩
进价 (元/包)	8	20

(1) 计划 N95 口罩每包售价比普通口罩贵 16 元, 7 包普通口罩和 3 包 N95 口罩总售价相同, 求普通口罩和 N95 口罩每包售价;

(2) 按 (1) 中售价销售一段时间后发现普通口罩的日均销售量为 120 包, 当每包售价降价 1 元时, 日均销售量增加 20 包, 该药店秉承让利于民的原则, 对普通口罩进行降价销售, 但要保证当天的利润为 320 元, 求此时普通口罩每包售价;

(3) 疫情期间, 该药店进货 2 万包 N95 口罩, 进价不变, 店长向当地医院捐赠了 a 包 ($6000 \leq a \leq 7000$), 该款口罩, 剩余的 N95 口罩向市民销售, 若这 2 万包口罩的利润等于 10%, 则 N95 口罩每包售价是_____元. (直接写出答案, 售价为整数元)

【答案】(1) 普通口罩和 N95 口罩每包售价分别为 12 元和 28 元; (2) 10 元; (3) 32

【解析】

【分析】(1) 设普通口罩和 N95 口罩每包售价分别为 x 元和 y 元, 建立二元一次方程组, 求解即可得到答案;

(2) 设普通口罩每包售价降低 a 元; 根据当天的利润=每个普通口罩的利润 $\times$ 当日普通口罩销售量的关系, 列出并求解方程, 即可得到答案;

(3) 设 N95 口罩每包售价是 x 元; 根据总售价-总成本=总利润的关系, 列出方程, 再结合 a 的取值范围, 求解不等式, 即可完成求解.

【详解】(1) 设普通口罩和 N95 口罩每包售价分别为 x 元和 y 元

$$\text{由题意得, } \begin{cases} x+16=y \\ 7x=3y \end{cases}$$

$$\text{解得 } x=12, y=28$$

∴ 普通口罩和 N95 口罩每包售价分别为 12 元和 28 元.

(2) 设普通口罩每包售价降低 a 元

$$\text{由题意得 } (12-8-a)(120+20a)=320$$

解得: $a=2$, $a=-4$ (舍去)

∴ 此时普通口罩每包售价为 $12-2=10$ 元;

(3) 设 N95 口罩每包售价是 x 元

$$\text{由题意得 } x(20000-a)-20000 \times 20 = 20000 \times 20 \times 10\%$$

$$\therefore a = 20000 - \frac{20000 \times 22}{x} = 20000 \left(1 - \frac{22}{x} \right)$$

$$\therefore 6000 \leq a \leq 7000$$

$$\therefore \begin{cases} 20000 \left(1 - \frac{22}{x} \right) \leq 7000 \\ 20000 \left(1 - \frac{22}{x} \right) \geq 6000 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 1 - \frac{22}{x} \leq \frac{7}{20} \\ 1 - \frac{22}{x} \geq \frac{6}{20} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x \leq 33\frac{11}{13} \\ x \geq 31\frac{3}{7} \end{cases}$$

$$\text{即 } 31\frac{3}{7} \leq x \leq 33\frac{11}{13}$$

$x=32$ 或 33 .

当 $x=33$ 时, a 不是整数,

∴ N95 口罩每包售价是 32 元.

【点睛】 本题考查了二元一次方程组、一元二次方程、分式方程和不等式的知识; 求解的关键是熟练掌握二元一次方程组、一元二次方程、分式方程和不等式的性质, 从而完成求解.

25. 阅读材料: 数学上有一种根号内又带根号的数. 形如 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$, 如果你能找到两个数 m 、 n , 使

$m^2 + n^2 = a$, 且 $mn = \sqrt{b}$, 则 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ 可变形为 $\sqrt{m^2 + n^2 \pm 2mn} = \sqrt{(m \pm n)^2} = |m \pm n|$. 从而达到化去一层根号的目的.

例如化简 $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$, $\because 5=3+2$ 且 $6=3\times 2$,

$$\therefore \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

(1) 填上适当的数: $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(\quad)^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) $\sqrt{m+4\sqrt{6}}$ 能化为最简二次根式, 求正整数 m 的最小值和最大值.

(3) 化简: $\sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{7+3\sqrt{5}}.$

【答案】 (1) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$, $\sqrt{5} + \sqrt{3}$;

(2) 正整数 m 的最小值是 10, 最大值是 25;

(3) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}.$

【解析】

【分析】 (1) 将 8 写成 $(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2$, 将 $\sqrt{15}$ 写成 $\sqrt{5} \times \sqrt{3}$, 然后将被开方数变形为完全平方公式的形式, 即可得出答案.

(2) 将 $4\sqrt{6}$ 写成 $2\sqrt{24}$, 将 $\sqrt{24}$ 写成 $\sqrt{1} \times \sqrt{24}$, 或 $\sqrt{2} \times \sqrt{12}$, 或 $\sqrt{3} \times \sqrt{8}$ 或 $\sqrt{4} \times \sqrt{6}$ 分别求出 $(\sqrt{1})^2 + (\sqrt{24})^2$, $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{12})^2$, $(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{8})^2$, $(\sqrt{4})^2 + (\sqrt{6})^2$, 即可得出正整数 m 的最小值和最大值.

【小问 1 详解】

$$\because 8 = 5 + 3 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2, \sqrt{15} = \sqrt{5} \times \sqrt{3}$$

$$\therefore \sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

故答案为: $\sqrt{5} + \sqrt{3}$, $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

【小问 2 详解】

$$\sqrt{m+4\sqrt{6}} = \sqrt{m+2\sqrt{24}}$$

$$\because \sqrt{24} = \sqrt{1} \times \sqrt{24} = \sqrt{2} \times \sqrt{12} = \sqrt{3} \times \sqrt{8} = \sqrt{4} \times \sqrt{6},$$

$$\therefore m = (\sqrt{1})^2 + (\sqrt{24})^2 = 25, \text{ 或 } m = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{12})^2 = 14, \text{ 或 } m = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{8})^2 = 11,$$

$$\text{或 } m = (\sqrt{4})^2 + (\sqrt{6})^2 = 10.$$

$\therefore$ 正整数 m 的最小值是 10, 最大值是 25.

【小问 3 详解】

$$\begin{aligned}& \sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{7+3\sqrt{5}} \\&= \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{14+2\sqrt{45}}}{\sqrt{2}} \\&= \frac{\sqrt{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{(\sqrt{9})^2+2\times\sqrt{9}\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}}{\sqrt{2}} \\&= \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{(\sqrt{9}+\sqrt{5})^2}}{\sqrt{2}} \\&= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{9}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \\&= \frac{3+2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\&= \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

【点睛】 本题主要考查了二次根式的性质与化简，正确应用完全平方公式，掌握完全平方公式的特征是解题的关键.