

2021 进华中学初二第一学期月考数学试卷 9 月月考试卷

一、选择题 5*3=15

1. 使式子 $\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \sqrt{4-3x}$ 在实数范围内有意义的整数 x 有()

- A. 5 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 2 个

【答案】C

【解析】

【详解】 $\because$ 式子 $\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \sqrt{4-3x}$ 在实数范围内有意义

$$\therefore \begin{cases} x+3 > 0, \\ 4-3x \geq 0, \end{cases} \text{ 解得: } -3 < x \leq \frac{4}{3},$$

又 $\because x$ 要取整数值,

$\therefore x$ 的值为: $-2, -1, 0, 1$.

即符合条件的 x 的值有 4 个.

故选 C.

2. 下列各组两个根式, 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{\frac{1}{xy}}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{2xy}}$ B. $\sqrt{8ab^3}$ 和 $2\sqrt{ab}$ C. $\sqrt{20}$ 和 $-\sqrt{0.2}$ D. $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{ab}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据同类二次根式的概念逐个判断即可.

【详解】A: $\sqrt{\frac{1}{xy}} = \frac{\sqrt{xy}}{xy}$, $\sqrt{\frac{1}{2xy}} = \frac{\sqrt{2xy}}{2xy}$ 故 $\sqrt{\frac{1}{xy}}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{2xy}}$ 不是同类二次根式, 故 A 选项

不符合题意;

B: $\sqrt{8ab^3} = 2|b|\sqrt{2ab}$, 故 $\sqrt{8ab^3}$ 和 $2\sqrt{ab}$, 故 B 选项不符合题意;

C: $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $-\sqrt{0.2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 故 $\sqrt{20}$ 和 $-\sqrt{0.2}$ 是同类二次根式, 故 C 选项符合题意;

D: $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{ab}$ 不是同类二次根式, 故 D 选项不符合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查同类二次根式, 正确理解同类二次根式的概念是解题的关键.

3. 下列各方程中：① $x^2 + 1 = 0$ ；② $ax^2 + bx + c = 0$ ；③ $x^2 + \frac{1}{x} = 3$ ；④ $\frac{y^2}{4} + 3y = 1$ ；

⑤ $(x-1)(x+1) = (x+2)(x-2) + 2x - 5$ 一元二次方程的个数有 ()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的定义进行解答.

【详解】 解：① $x^2 + 1 = 0$ ，符合一元二次方程的定义；

② $ax^2 + bx + c = 0$ ，当 $a = 0$ 时， $ax^2 + bx + c = 0$ 不是一元二次方程；

③ $x^2 + \frac{1}{x} = 3$ 是分式方程，不是一元二次方程；

④ $\frac{y^2}{4} + 3y = 1$ ，符合一元二次方程的定义；

⑤ $(x-1)(x+1) = (x+2)(x-2) + 2x - 5$ ，方程整理可得 $2x - 8 = 0$ ，是一元一次方程.

综上所述，有 2 个符合题意.

故选：B.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的概念，判断一个方程是否是一元二次方程，首先要看是否是整式方程，然后看化简后是否是只含有一个未知数且未知数的最高次数是 2.

4. 当 k 不小于 $-\frac{1}{4}$ 时，方程 $(k-2)x^2 - (2k-1)x + k = 0$ 有 ().

A. 两个不相等的实数根

B. 两个相等的实数根

C. 两个实数根

D. 以上都不正确

【答案】 C

【解析】

【分析】 直接利用根的判别式进行计算得出 $\Delta = 4k + 1 \geq 0$ ，即可求解.

【详解】 $\because$ 方程 $(k-2)x^2 - (2k-1)x + k = 0$ ，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$$

$$= [-(2k-1)]^2 - 4k(k-2)$$

$$= 4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 8k$$

$$= 4k + 1$$

又 k 不小于 $-\frac{1}{4}$ ，即 $k \geq -\frac{1}{4}$ ，

$$\therefore \Delta = 4k + 1 \geq 0，$$

∴方程 $(k-2)x^2 - (2k-1)x + k = 0$ 有两个实数根,

故选: C.

【点睛】本题考查一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 根的判别式, 解题的关键是熟练掌握根的判别式的有关知识点: 当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时, 方程有两个相等实数根; 当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程没有实数根.

5. 某种花卉每盆的盈利与每盆的株数有一定的关系, 每盆植 3 株时, 平均每株盈利 4 元. 若每盆增加 1 株, 平均每株盈利减少 0.5 元, 要使每盆的盈利达到 15 元, 每盆应多植多少株?

设每盆多植 x 株, 则可以列出的方程是 ()

A. $(3+x)(4-0.5x) = 15$

B. $(x+3)(4+0.5x) = 15$

C. $(x+4)(3-0.5x) = 15$

D. $(x+1)(4-0.5x) = 15$

【答案】A

【解析】

【分析】根据已知假设每盆花苗增加 x 株, 则每盆花苗有 $(x+3)$ 株, 得出平均单株盈利为 $(4-0.5x)$ 元, 由题意得 $(x+3)(4-0.5x)=15$ 即可.

【详解】解: 设每盆应该多植 x 株, 由题意得

$$(x+3)(4-0.5x)=15,$$

故选: A.

【点睛】此题考查了一元二次方程的应用, 根据每盆花苗株数 $\times$ 平均单株盈利 = 总盈利得出方程是解题关键.

二、填空题 12*2=24

6. 若最简二次根式 $\sqrt{x^2+1}$ 与 $\sqrt[3]{3x^2-1}$ 是同类二次根式, 则 $x+y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2 或 0

【解析】

【分析】根据二次根式和同类二次根式的定义列方程求出 x 、 y 的值, 再计算 $x+y$.

【详解】由题意得, $y+1=2$, $x^2+1=3x^2-1$,

解得 $y=1$, $x=\pm 1$,

∴当 $x=1$, $y=1$ 时, $x+y=1+1=2$;

当 $x=-1$, $y=1$ 时, $x+y=-1+1=0$;

故答案为 2 或 0.

【点睛】本题考查二次根式和同类二次根式的定义, 二次根式省略的根指数为 2, 化成最简二次根式之后, 若被开方数相同, 称为同类二次根式, 掌握基本概念是关键.

7. 化简 $\frac{a-2}{\sqrt{a^2-4a+4}}$, ($a < 2$) 的结果为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 利用完全平方公式和二次根式的性质化简即可求解.

【详解】 $\because a < 2$,

$\therefore a - 2 < 0$,

$$\text{原式} = \frac{a-2}{\sqrt{(a-2)^2}}$$

$$= -\frac{a-2}{a-2}$$

$$= -1$$

故答案为: -1.

【点睛】 本题考查完全平方公式和二次根式的化简求值, 解题的关键是熟练掌握完全平方公式和二次根式的性质.

8. 若 $\sqrt{x^3 + 2x^2} = -x\sqrt{x+2}$, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $-2 \leq x \leq 0$

【解析】

【分析】 根据二次根式的被开方数是非负数, 二次根式的值是非负数, 可得答案.

【详解】 解: $\sqrt{x^3 + 2x^2} = -x\sqrt{x+2}$,

$x \leq 0$, $x+2 \geq 0$,

解得 $-2 \leq x \leq 0$,

故答案为: $-2 \leq x \leq 0$.

【点睛】 本题考查了二次根式的性质与化简, 利用了二次根式的性质.

9. 比较大小: $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ _____ $2 - \sqrt{3}$ (填上 “>” 或 “<”)

【答案】 >

【解析】

【分析】 利用它们的倒数来进行比较.

【详解】 解: $\because \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$,

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{又} \because \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} > \frac{1}{2 + \sqrt{3}},$$

$$\therefore \sqrt{3} - \sqrt{2} > 2 - \sqrt{3}.$$

故答案为：>

【点睛】此题主要考查了实数大小比较的方法，解答此题的关键是通过比较它们的倒数进行比较大小.

10. 分解因式： $2a^2 - ab - 2b^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2\left(a - \frac{1-\sqrt{17}}{4}b\right)\left(a - \frac{1+\sqrt{17}}{4}b\right)$

【解析】

【分析】先提公因式，再进行配方，运用平方差公式进行因式分解.

【详解】解： $2a^2 - ab - 2b^2$

$$= 2\left(a^2 - \frac{1}{2}ab - b^2\right)$$

$$= 2\left(a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{16}b^2 - \frac{1}{16}b^2 - b^2\right)$$

$$= 2\left[\left(a - \frac{1}{4}b\right)^2 - \frac{17}{16}b^2\right]$$

$$= 2\left[\left(a - \frac{1}{4}b\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{17}}{4}b\right)^2\right]$$

$$= 2\left(a - \frac{1}{4}b + \frac{\sqrt{17}}{4}b\right)\left(a - \frac{1}{4}b - \frac{\sqrt{17}}{4}b\right)$$

$$= 2\left(a - \frac{1-\sqrt{17}}{4}b\right)\left(a - \frac{1+\sqrt{17}}{4}b\right)$$

故答案为： $2\left(a - \frac{1-\sqrt{17}}{4}b\right)\left(a - \frac{1+\sqrt{17}}{4}b\right).$

【点睛】本题主要考查因式分解，熟练掌握因式分解的方法是解决本题的关键.

11. 已知 $x = 2 + \sqrt{3}$ 是关于 x 的方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 的一个根，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 1

【解析】

【分析】把 $x = 2 + \sqrt{3}$ 代入方程得到关于 m 的方程，然后解关于 m 的方程即可.

【详解】解：把 $x = 2 + \sqrt{3}$ 代入方程得 $(2 + \sqrt{3})^2 - 4(2 + \sqrt{3}) + m = 0,$

解得 $m = 1.$

故答案为 1.

【点睛】本题考查了一元二次方程的解：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解.

12. 已知关于 x 的方程 $x^2 + (3-m)x + \frac{m^2}{4} = 0$ 有两个不相等的实数根，那么 m 的最大整数值是_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】方程有两个不相等的实数根，则根的判别式 $\Delta > 0$ ，建立关于 m 的不等式，求得 m 的取值范围，再得出 m 的最大整数值.

【详解】 $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 + (3-m)x + \frac{m^2}{4} = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (3-m)^2 - m^2 > 0,$$

$$\text{解之得 } m < \frac{3}{2},$$

$\therefore m$ 的最大整数值是 1.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式，解题的关键是掌握根的判别式.

13. 已知 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10$ ，那么 $\left|x - \frac{1}{x}\right| =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据完全平方公式 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ，以及分式的乘除运算法则即可求出答案.

【详解】解： $\because (x - \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$ ， $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10$ ，

$$\therefore (x - \frac{1}{x})^2 = 10 - 2 = 8,$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = \pm 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \left|x - \frac{1}{x}\right| = 2\sqrt{2}$$

故答案为： $2\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查开平方、分式化简求值运算以及完全平方公式，解题的关键是熟练运用完全平方公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，本题属于基础题型.

14. 把 $(a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}}$ 中根号外的 $(a-1)$ 移入根号内得_____

【答案】 $-\sqrt{1-a}$

【解析】

【分析】 先根据二次根式有意义的条件：被开方数 ≥ 0 ，求出 a 的取值范围，根据 $(a-1) = -(1-a)$ 然后根据二次根式的乘法公式将 $(1-a)$ 移入根号化简即可.

【详解】 解：根据二次根式有意义的条件可得： $\frac{1}{1-a} \geq 0$

解得： $a < 1$

则 $a-1 < 0, 1-a > 0$

$\therefore$

$$(a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}} = -(1-a)\sqrt{\frac{1}{1-a}} = -\sqrt{(1-a)^2} \sqrt{\frac{1}{1-a}} = -\sqrt{(1-a)^2 \cdot \frac{1}{1-a}} = -\sqrt{1-a}$$

故答案为： $-\sqrt{1-a}$.

【点睛】 此题考查的是二次根式的变形，掌握二次根式有意义的条件：被开方数 ≥ 0 和二次根式的乘法公式是解决此题的关键.

15. 如果 $5+\sqrt{5}$ 和 $\sqrt{5}-2$ 小数部分分别为 a, b ，那么 $\frac{a}{b}+2=$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 先估算 $\sqrt{5}$ ，进而求得 a, b 的值，再代值计算便可.

【详解】 解： $\because 2 < \sqrt{5} < 3$,

$$\therefore 7 < 5+\sqrt{5} < 8, \quad 0 < \sqrt{5}-2 < 1,$$

$\therefore 5+\sqrt{5}$ 和 $\sqrt{5}-2$ 小数部分分别为 a, b ,

$$\therefore a = 5+\sqrt{5}-7 = \sqrt{5}-2, \quad b = \sqrt{5}-2,$$

$$\therefore \frac{a}{b}+2 = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}+2 = 1+2 = 3,$$

故答案为： 3.

【点睛】 本题考查了估算无理数的大小，二次根式除法运算，正确估算无理数的大小是解题的关键.

16. 如果关于 x 的二次三项式 $x^2-kx+k+3$ 是一个完全平方式，则 $k=$ _____.

【答案】 -2 或 6 或 -2

【解析】

【分析】利用完全平方公式的结构特征解答即可.

【详解】解: $\because$ 关于 x 的二次三项式 $x^2 - kx + k + 3$ 是一个完全平方式,

$$\therefore \left(-\frac{k}{2}\right)^2 = k + 3,$$

$$\therefore k^2 - 4k - 12 = 0,$$

$$\text{解得 } k_1 = 6, k_2 = -2.$$

故答案为: -2 或 6

【点睛】本题考查了完全平方式的知识, 属于常考题型, 熟知完全平方式的结构特征是解题关键.

17. 若实数 $a \neq b$, 且 a, b 满足 $a^2 - 8a + 5 = 0$, $b^2 - 8b + 5 = 0$, 则 $\frac{b-1}{a-1} + \frac{a-1}{b-1} =$ _____.

【答案】 -20

【解析】

【分析】根据已知可知 a, b 是一元二次方程 $x^2 - 8x + 5 = 0$ 的两个不相等的实数根, 再利用根与系数的关系, 得 $a + b = 8, ab = 5$; 然后再根据分式的加法运算法则, 将所求的式子化成关于 $a + b, ab$ 的形式, 再代入即可求解.

【详解】解: $\because$ 实数 $a \neq b$, 且 a, b 满足 $a^2 - 8a + 5 = 0$, $b^2 - 8b + 5 = 0$,

$\therefore a, b$ 是方程 $x^2 - 8x + 5 = 0$ 的两个不相等的实数根,

$$\therefore a + b = 8, ab = 5,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{b-1}{a-1} + \frac{a-1}{b-1} &= \frac{(b-1)^2 + (a-1)^2}{(a-1)(b-1)} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - 2(a+b) + 2}{ab - (a+b) + 1} \\ &= \frac{(a+b)^2 - 2ab - 2(a+b) + 2}{ab - (a+b) + 1} \\ &= \frac{8^2 - 2 \times 5 - 2 \times 8 + 2}{5 - 8 + 1} \\ &= -20. \end{aligned}$$

【点睛】此题考查了已知式子的值求代数式的值、根与系数的关系、分式的加法运算、完全平方公式等知识, 熟练掌握根与系数的关系、分式的化简变形是解答此题的关键.

三、计算和解方程 $3+3+3+4*5=29$

18. $2a\sqrt{3ab^2} - \frac{b}{3}\sqrt{27a^3} - 6ab\sqrt{\frac{a}{3}} (b \geq 0)$

【答案】 $-ab\sqrt{3a}$

【解析】

【分析】根据二次根式的加减运算，先化为最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并.

【详解】解： $2a\sqrt{3ab^2} - \frac{b}{3}\sqrt{27a^3} - 6ab\sqrt{\frac{a}{3}}$
 $= 2ab\sqrt{3a} - \frac{b}{3} \cdot 3a\sqrt{3a} - 6ab \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3a}$
 $= 2ab\sqrt{3a} - ab\sqrt{3a} - 2ab\sqrt{3a}$
 $= -ab\sqrt{3a}.$

【点睛】本题考查了二次根式的化简，需注意的是，当二次被开方数为平方的形式时，化简的结果要带着绝对值，而合并同类二次根式的实质是合并同类二次根式的系数，根指数与被开方数不变.

19. $\frac{2}{b}\sqrt{ab} \cdot \left(-\frac{2}{3}\sqrt{a^3b}\right) \div \frac{1}{3}\sqrt{\frac{b}{a}}$

【答案】 $-\frac{4a^2}{b}\sqrt{ab}$

【解析】

【分析】根据二次根式的乘除计算法则和化简法则求解即可.

【详解】解原式 $= \frac{2}{b}\sqrt{ab} \cdot \left(-\frac{2}{3}a\sqrt{ab}\right) \div \frac{1}{3a}\sqrt{ab}$
 $= -\frac{4a}{3b}(\sqrt{ab})^2 \div \frac{1}{3a}\sqrt{ab}$
 $= -\frac{4a}{3b}(\sqrt{ab})^2 \times \frac{3a}{\sqrt{ab}}$
 $= -\frac{4a^2}{b}\sqrt{ab}$

【点睛】此题主要考查了二次根式的乘除运算和二次根式的性质与化简，正确化简二次根式是解题关键.

20. $\frac{4x-9y}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}} - \frac{5\sqrt{xy}-y}{5\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

【答案】 $2\sqrt{x}+2\sqrt{y}$

【解析】

【分析】 先利用平方差公式把分子因式分解，然后约分后合并即可.

$$\begin{aligned}\text{【详解】 解: } & \frac{4x-9y}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}} - \frac{5\sqrt{xy}-y}{5\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ &= \frac{(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}(5\sqrt{x}-\sqrt{y})}{5\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ &= 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}-\sqrt{y} \\ &= 2\sqrt{x}+2\sqrt{y}.\end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算：先把二次根式化为最简二次根式，然后进行二次根式的乘除运算，再合并即可. 在二次根式的混合运算中，如能结合题目特点，灵活运用二次根式的性质，选择恰当的解题途径，往往能事半功倍.

21. 化简并求值： $\frac{a^2-1}{a-1} - \frac{\sqrt{a^2+2a+1}}{a^2+a} - \frac{1}{a}$ ，其中 $a = \frac{2}{1-\sqrt{3}}$.

【答案】 $-\sqrt{3}$

【解析】

【详解】 试题分析： 本题因为所求代数式中有二次根式，故应先确定 a 的正负，故应先把 a 化简后再代入原式计算.

$$\begin{aligned}\text{试题解析: } \because a+1 &= \frac{2}{1-\sqrt{3}} + 1 = \frac{2(1+\sqrt{3})}{1-3} + 1 = -\sqrt{3} < 0, \\ \therefore \text{原式} &= a+1 - \frac{\sqrt{(a+1)^2}}{a(a+1)} - \frac{1}{a} = a+1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = a+1 = -\sqrt{3}.\end{aligned}$$

点睛： 此题考查了分式的化简求值，熟练掌握运算是解本题的关键.

22. 解方程： $x^2 - (2\sqrt{5}+1)x + 2\sqrt{5} = 0$

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = 2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 利用因式分解法把方程整理成 $(x-1)(x-2\sqrt{5}) = 0$ 得出 $x-1=0$ 或 $x-2\sqrt{5}=0$ ，然后解一元一次方程即可.

【详解】 解： $x^2 - (2\sqrt{5}+1)x + 2\sqrt{5} = 0$

$$(x-1)(x-2\sqrt{5}) = 0$$

$$\therefore x-1=0 \text{ 或 } x-2\sqrt{5}=0,$$

$$\text{解得: } x_1=1, \quad x_2=2\sqrt{5}.$$

【点睛】本题考查解一元二次方程—因式分解法，因式分解法是利用因式分解求出方程解的方法，解题的关键是熟练掌握因式分解法.

$$23. (x^2+x)^2-3(x^2+x)+2=0$$

$$\text{【答案】 } x_1=-2, \quad x_2=1, \quad x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

【解析】

【分析】利用换元法解这个方程，先设 $t=x^2+x$ ，求得 t 的值后再代回，求解 x .

【详解】解：设 $t=x^2+x$ ，则原方程化为：

$$\therefore t^2-3t+2=0,$$

$$(t-1)(t-2)=0,$$

$$\therefore t=1 \text{ 或 } t=2,$$

$$\text{当 } t=1 \text{ 时, } x^2+x=1,$$

$$\text{解此方程得 } x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{当 } t=2 \text{ 时, } x^2+x=2,$$

$$\text{解此方程得 } x=-2 \text{ 或 } x=1,$$

$$\therefore \text{原方程得解为 } x_1=-2, \quad x_2=1, \quad x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

【点睛】本题考查了一元二次方程的解法，利用换元法解方程可以把较为复杂的一元二次方程化为简单的方程从而得解.

$$24. \text{在实数范围内因式分解: } 3x^2-2xy-7y^2$$

$$\text{【答案】 } 3\left(x-\frac{1-\sqrt{66}}{3}y\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{66}}{3}y\right)$$

【解析】

【分析】先提公因式，再进行配方，运用平方差公式进行因式分解.

$$\text{【详解】解: } 3x^2-2xy-7y^2$$

$$=3\left(x^2-\frac{2}{3}xy-\frac{7}{3}y^2\right)$$

$$=3\left(x^2-\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}y^2-\frac{1}{9}y^2-\frac{7}{3}y^2\right)$$

$$\begin{aligned}
&= 3\left[\left(x - \frac{1}{3}y\right)^2 - \frac{22}{3}y^2\right] \\
&= 3\left(x - \frac{1}{3}y + \frac{\sqrt{66}}{3}y\right)\left(x - \frac{1}{3}y - \frac{\sqrt{66}}{3}y\right) \\
&= 3\left(x - \frac{1 - \sqrt{66}}{3}y\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{66}}{3}y\right).
\end{aligned}$$

【点睛】本题主要考查因式分解，熟练掌握因式分解的方法是解决本题的关键。

四、解答题 (4+6+5+5+6+6=31)

25. 已知 $x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $y = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$, 求 $\frac{x+y}{x^2+y^2}$ 的值.

【答案】 $\frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{(x+y)^2 - 2xy}$, 原式 = $\frac{4}{31}$

【解析】

【分析】先将 x 和 y 化简，分别求出 $x+y$ 和 xy 的值，再根据乘法公式得

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{(x+y)^2 - 2xy}, \text{ 代入即可求解.}$$

【详解】 $\because x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}, y = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}},$

$$\therefore x+y = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})},$$

$$= \frac{5 + 2\sqrt{15} + 3 + 5 - 2\sqrt{15} + 3}{5 - 3},$$

$$= 8,$$

$$xy = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$\therefore \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{(x+y)^2 - 2xy} = \frac{8}{8^2 - 2 \times 1} = \frac{8}{62} = \frac{4}{31}.$$

【点睛】本题主要考查了二次根式的运算、完全平方公式等，掌握完全平方公式的变形是解题的关键。

26. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (k+2)x + 2k = 0$.

(1) 若 $x=1$ 是这个方程的一个根，求 k 的值和它的另一根；

(2) 对于任意的实数 k ，判断原方程根的情况，并说明理由。

【答案】 (1) $k=1$ ；另一根为 $x=2$ ；(2) 证明见解析。

【解析】

【分析】 (1) 把 $x=1$ 代入方程得到关于 k 的方程, 求出 k 的值, 再把 k 的值代入原方程, 然后利用因式分解法解方程求出方程的另一根;

(2) 计算判别式得到 $\Delta = (k+2)^2 - 4 \times 2k = k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2$, 根据非负数的性质得到 $\Delta \geq 0$, 然后根据判别式的意义判断方程根的情况.

【详解】 解: (1) $\because x=1$ 是方程 $x^2 - (k+2)x + 2k = 0$ 的一个根,

$$\therefore 1 - (k+2) \times 1 + 2k = 0,$$

解得 $k=1$,

$$\therefore \text{原方程为 } x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 1, x_2 = 2,$$

$\therefore$ 原方程的另一根为 $x=2$

(2) 对于任意的实数 k , 原方程总有两个实数根,

$$\because \Delta = (k+2)^2 - 4 \times 2k = k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2 \geq 0$$

$\therefore$ 对于任意的实数 k , 原方程总有两个实数根.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解和解法, 根的判别式, 解决此题的关键是合理运用不同的解法, 得到正确的结果.

27. 已知关于 x 的方程 $(m-1)x^2 + (2m-1)x + m-3 = 0$ 有实数根, 求实数 m 的值.

【答案】 $m \geq \frac{11}{12}$

【解析】

【分析】 根据 $(m-1)$ 分类讨论即可求出答案.

【详解】 解: 由题意可知: 当 $m-1=0$ 时,

此时原方程为: $x-2=0$, 符合题意.

当 $m-1 \neq 0$,

$$\text{此时 } \Delta = (2m-1)^2 - 4(m-1)(m-3) \geq 0,$$

$$\therefore m \geq \frac{11}{12} \text{ 且 } m \neq 1,$$

综上所述, $m \geq \frac{11}{12}$.

【点睛】 本题考查根的判别式, 解题的关键是熟练运用根的判别式, 本题属于基础题型.

28. 某种电脑病毒传播非常快, 如果一台电脑被感染, 经过两轮感染后就会有 81 台电脑被感染. 请你用学过的知识分析, 每轮感染中平均一台电脑会感染多少台电脑?

【答案】 8 台

【解析】

【详解】试题分析：解：设每轮感染中平均每一台电脑会感染 x 台电脑

依题意得： $1+x+(1+x)x=81$ ，

解得 $x_1=8$ ， $x_2=-10$ （舍去），

$\therefore x=8$ ．

答：每轮感染中平均每一台电脑会感染 8 台．

考点：二元一次方程的实际应用

点评：该题是常考题，主要考查学生对二元一次方程实际应用中题意分析和列式．

29. 已知非零实数 a, b 满足 $2\sqrt{a}(\sqrt{a}+2\sqrt{b})=\sqrt{b}(\sqrt{a}+5\sqrt{b})$ ，求代数式 $\frac{2a+\sqrt{ab}+3b}{3a+\sqrt{ab}-2b}$ 的值．

【答案】 3

【解析】

【分析】利用因式分解将已知化为 $(2\sqrt{a}+5\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=0$ ，得出 $a=b$ ，然后代入所求代数式即可得解．

【详解】解： $\because$ 非零实数 a, b 满足 $2\sqrt{a}(\sqrt{a}+2\sqrt{b})=\sqrt{b}(\sqrt{a}+5\sqrt{b})$ ，

由题意可知 $a>0, b>0$ ，

$$\therefore 2(\sqrt{a})^2+3\sqrt{a}\sqrt{b}-5(\sqrt{b})^2=0,$$

$$\therefore (2\sqrt{a}+5\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=0$$

$\because a>0, b>0$ ，

$$\therefore 2\sqrt{a}+5\sqrt{b}>0,$$

$$\therefore \sqrt{a}=\sqrt{b},$$

$$\therefore a=b,$$

$$\therefore \frac{2a+\sqrt{ab}+3b}{3a+\sqrt{ab}-2b}$$

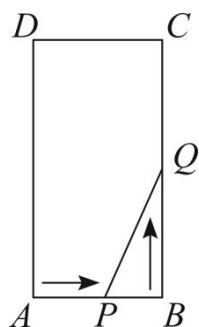
$$=\frac{2a+a+3a}{3a+a-2a}$$

$$=\frac{6a}{2a}$$

$$=3.$$

【点睛】此题考查了二次根式的化简求值，熟练掌握二次根式的性质、因式分解以及分式的性质是解答此题的关键．

30. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$, 点 P 从点 A 出发, 沿 AB 边向点 B 以 1cm/s 的速度移动, 同时, 点 Q 从点 B 出发沿 BC 边向点 C 以 2cm/s 的速度移动, 如果 P 、 Q 两点分别到达 B 、 C 两点后就停止移动, 回答下列问题:



(1) 运动开始后第几秒时, $\triangle PBQ$ 的面积等于 8cm^2 ?

(2) 设运动开始后第 t 秒时, 五边形 $APQCD$ 的面积为 $S(\text{cm}^2)$, 写出 S 关于 t 的关系式, 并指出 t 的取值的范围;

(3) t 为何值时, S 最小? 求出 S 的最小值.

【答案】(1) 2 或 4

(2) $S = t^2 - 6t + 72$ ($0 < t < 6$)

(3) $t = 3$, 63

【解析】

【分析】(1) 设运动时间为 t 秒, 则 $PA = t\text{cm}$, $BQ = 2t\text{cm}$, 然后再根据 $\triangle PBQ$ 的面积得到关于 t 的一元二次方程, 求解之即可得答案;

(2) 根据 $S = S_{\text{矩形}ABCD} - S_{\triangle PBQ}$ 即可得出答案;

(3) 利用配方法将 S 关于 t 的关系式变形为顶点式, 然后根据二次函数的性质求其最小值.

【小问 1 详解】

解: 设运动时间为 t 秒, 则 $PA = t\text{cm}$, $BQ = 2t\text{cm}$,

$$\therefore PB = AB - PA = (6 - t)\text{cm},$$

$\because \triangle PBQ$ 的面积等于 8cm^2 ,

$$\therefore \frac{1}{2}PB \cdot BQ = 8,$$

$$\therefore \frac{1}{2}(6 - t) \cdot 2t = 8,$$

整理, 得 $t^2 - 6t + 8 = 0$,

$$\therefore (t - 2)(t - 4) = 0,$$

$$\therefore t = 2 \text{ 或 } t = 4;$$

故运动开始后第 2 秒或第 4 秒时, $\triangle PBQ$ 的面积等于 8cm^2 ;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 运动开始后第 t 秒时,

$$\therefore S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2}(6-t) \cdot 2t = 6t - t^2,$$

$$\therefore S = S_{\text{矩形}ABCD} - S_{\triangle PBQ} = 6 \times 12 - (6t - t^2),$$

$$\therefore S = t^2 - 6t + 72 \quad (0 < t < 6);$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \because S = t^2 - 6t + 72 = (t-3)^2 + 63,$$

又 $\because$ 二次项系数为 $1 > 0$,

$\therefore$ 抛物线开口向上,

$\therefore$ 当 $t = 3$ 时, S 最小, S 的最小值为 63.

【点睛】 此题考查了一元二次方程与二次函数在解决图形面积问题中的应用, 熟练掌握一元二次方程的解法与运用配方法求二次函数的最值是解答此题的关键.