

2023 学年第一学期阶段诊断评估八年级数学试卷

(完卷时间: 90 分钟 满分: 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列二次根式中, 属于最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{\frac{x}{5}}$ C. $\sqrt{a+1}$ D. $\sqrt{a^4b}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查最简二次根式的判断, 根据最简二次根式的定义 (被开方数不含分母且不含能开得尽方的因数或因式), 逐一判断各选项即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$, 可化简, 不是最简二次根式, 故本选项不符合题意;

B、 $\sqrt{\frac{x}{5}}$ 被开方数含分母, 不是最简二次根式, 故本选项不符合题意;

C、 $\sqrt{a+1}$ 被开方数为多项式, 无平方因子且不含分母, 是最简二次根式, 故本选项符合题意;

D、 $\sqrt{a^4b} = a^2\sqrt{b}$, 可化简, 不是最简二次根式, 故本选项不符合题意.

故选: C.

2. $2\sqrt{a}+3\sqrt{b}$ 的一个有理化因式是 ()

- A. $-2\sqrt{a}-3\sqrt{b}$ B. $2\sqrt{a}+3\sqrt{b}$ C. $\sqrt{2a-3b}$ D. $-2\sqrt{a}+3\sqrt{b}$

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了二次根式的混合运算, 有理化因式需使乘积为有理式, 利用平方差公式消除根号即可求解.

【详解】解: 选项 A、B 和原式相乘后含 $\sqrt{ab}$, 选项 C 相乘后仍含根号, 均不是有理式;

$\therefore (2\sqrt{a}+3\sqrt{b})(-2\sqrt{a}+3\sqrt{b}) = 9b-4a$, 结果为有理式.

故选: D.

3. 下列二次根式中, 属于同类二次根式的是 ()

- A. $2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{24}$ B. $\sqrt{4a}$ 与 $\sqrt{\frac{a}{4}}$ C. $\sqrt{\frac{2}{a}}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ D. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 与 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查同类二次根式的定义：化成最简二次根式后，被开方数相同.

把四组式子化成最简二次根式后根据同类二次根式的定义进行判断.

【详解】解：A、 $2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ 被开方数不同，不是同类二次根式；

B、 $\sqrt{4a}=2\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{\frac{a}{4}}=\frac{\sqrt{a}}{2}$ 被开方数相同，是同类二次根式；

C、 $\sqrt{\frac{2}{a}}=\frac{\sqrt{2a}}{a}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 被开方数不同，不是同类二次根式；

D、 $\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 与 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ，被开方数不同，不是同类二次根式.

故选：B.

4. 下列方程中一定是关于 x 的一元二次方程的是（ ）

A. $x^2 + \sqrt{x} - 2 = 0$

B. $ax^2 + bx + c = 0$

C. $x^2 + 4x - 1 = x(x + 2)$

D. $(x + 1)(x - 1) = x(2x - 1)$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是一元二次方程的定义，熟知只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的整式方程叫一元二次方程是解答此题的关键. 据此逐项判断即可.

【详解】解：A、方程 $x^2 + \sqrt{x} - 2 = 0$ 不是整式方程，不是一元二次方程，故不符合题意；

B、当 $a = 0$ 时，方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 不是一元二次方程，故不符合题意；

C、方程 $x^2 + 4x - 1 = x(x + 2)$ 整理得， $4x - 1 = 2x$ ，不是一元二次方程，故不符合题意；

D、方程 $(x + 1)(x - 1) = x(2x - 1)$ 整理得 $x^2 - x + 1 = 0$ ，是一元二次方程，符合题意.

故选：D.

5. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x - c^2 = 0$ 根的情况是（ ）

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法判断

【答案】A

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程根的判别式，通过计算判别式 Δ 的值来判断根的情况.

【详解】 解: $\because a=1, b=-1$, 常数项为 $-c^2$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-c^2) = 1 + 4c^2,$$

$$\because c^2 \geq 0,$$

$$\therefore 4c^2 \geq 0,$$

$$\therefore 1 + 4c^2 \geq 1 > 0,$$

$$\therefore \Delta > 0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.

故选: A.

6. 如果 $|m^2 + 2m| + \sqrt{n^2 + mn - 2} = 4m - 1$, 那么 $m + n$ 的值为 ()

A. 3 或 2

B. -3 或 2

C. -1 或 2

D. 3 或 -2

【答案】 C

【解析】

【分析】 此题考查了绝对值和算术平方根的非负性，解一元二次方程，代数式求值，完全平方公式，解题的关键是掌握以上知识点.

由方程左边非负可得 $4m - 1 \geq 0$, 求出 $m \geq \frac{1}{4}$, 得到 $m^2 + 2m > 0$, 方程化为 $m^2 - 2m + 1 + \sqrt{n^2 + mn - 2} = 0$,

利用非负性求出 $m = 1$, $n = -2$ 或 $n = 1$, 然后代入求解即可.

【详解】 解: $\because |m^2 + 2m| \geq 0$, $\sqrt{n^2 + mn - 2} \geq 0$, 且 $|m^2 + 2m| + \sqrt{n^2 + mn - 2} = 4m - 1$,

$$\therefore 4m - 1 \geq 0,$$

$$\therefore m \geq \frac{1}{4},$$

$$\therefore m^2 + 2m > 0,$$

$$\therefore m^2 + 2m + \sqrt{n^2 + mn - 2} = 4m - 1,$$

$$\therefore m^2 - 2m + 1 + \sqrt{n^2 + mn - 2} = 0,$$

$$\therefore (m - 1)^2 + \sqrt{n^2 + mn - 2} = 0,$$

$$\therefore m - 1 = 0, \quad n^2 + mn - 2 = 0,$$

$$\therefore m=1, \quad n^2+n-2=0,$$

$$\therefore (n+2)(n-1)=0,$$

$$\therefore n+2=0 \text{ 或 } n-1=0,$$

$$\therefore n=-2 \text{ 或 } n=1,$$

$$\therefore m+n=1+(-2)=-1 \text{ 或 } m+n=1+1=2.$$

故选: C.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 计算: $\sqrt{18}-\sqrt{8}=\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】

$$\sqrt{2}$$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的减法运算, 需先简化每个根式, 再合并同类二次根式即可.

【详解】 解: $\sqrt{18}-\sqrt{8}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}.$

故答案为: $\sqrt{2}.$

8. 计算: $\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的乘法, 利用二次根式的乘法法则, 将 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{6}$ 相乘后化简即可.

【详解】 解: $\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{2\times6}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$

故答案为: $2\sqrt{3}.$

9. 当 x $\underline{\hspace{2cm}}$ 时, 二次根式 $\sqrt{4x-3}$ 有意义.

【答案】 $\geq \frac{3}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式性质. 根据二次根式的性质, 被开方数必须为非负数.

【详解】 解: 由二次根式有意义的条件, 得 $4x-3\geq 0,$

解得: $x\geq \frac{3}{4},$

故答案为: $\geq \frac{3}{4}$.

10. 方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 3, x_2 = -1$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，解题的关键是掌握一元二次方程的解法：直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法等.

利用因式分解法解一元二次方程即可.

【详解】 解: $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$(x-3)(x+1) = 0,$$

$$x-3=0 \text{ 或 } x+1=0$$

$$\text{解得 } x_1 = 3, x_2 = -1.$$

故答案为: $x_1 = 3, x_2 = -1$.

11. 如果一个长方形的面积是 $\sqrt{30}$ ，它的长是 $2\sqrt{3}$ ，则它的宽是_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的应用，根据长方形面积公式，面积等于长乘以宽，因此宽等于面积除以长.

$$\text{【详解】 解: 宽} = \sqrt{30} \div 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{30}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{30}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{90}}{2 \times 3} = \frac{3\sqrt{10}}{6} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

12. 已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + x + m = 0$ 没有实数根，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > \frac{1}{8}$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程根的判别式，根据一元二次方程没有实数根，得到 $\Delta < 0$ ，进行求解即可. 熟练掌握一元二次方程根的判别式与根的个数之间的关系，是解题的关键.

【详解】 解: 由题意，得: $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \cdot m < 0$,

解得： $m > \frac{1}{8}$ ；

故答案为： $m > \frac{1}{8}$.

13. 不等式 $(\sqrt{3}-\sqrt{6})x < 3$ 的解集是_____.

【答案】 $x > -\sqrt{3}-\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 此题考查了解不等式，分母有理化，首先解不等式，然后根据分母有理化化简即可.

【详解】 解： $(\sqrt{3}-\sqrt{6})x < 3$

$$x > \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}$$

$$x > \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{6})}{(\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{3}+\sqrt{6})}$$

$$x > \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{6})}{3-6}$$

$$x > -\sqrt{3}-\sqrt{6} .$$

故答案为： $x > -\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

14. 最简根式 $2\sqrt{m^2-3}$ 与 $4\sqrt{9m+7}$ 是同类二次根式，则 $m =$ _____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查同类二次根式，同类二次根式要求被开方数相同，据此列方程求解，并验证被开方数的非负性.

【详解】 解： $\because$ 最简根式 $2\sqrt{m^2-3}$ 与 $4\sqrt{9m+7}$ 是同类二次根式，

$$\therefore m^2-3=9m+7 ,$$

解得 $m=10$ 或 $m=-1$

检验：当 $m=10$ 时， $m^2-3=97>0$ ， $9m+7=97>0$ ；当 $m=-1$ 时， $m^2-3=-2<0$ ，不符合二次根式定义，

故 $m=10$.

故答案为：10.

15. 当 $m =$ _____ 时，关于 x 的方程 $(m-1)x^{|m|+1} - x + 3 = 0$ 是一元二次方程.

【答案】 -1

【解析】

【分析】考查了一元二次方程的定义：含有一个未知数，且未知数最高次数为 2 次的整式方程，熟练掌握一元二次方程的定义是解本题的关键.

根据一元二次方程的定义得到 $|m|+1=2$ ， $m-1 \neq 0$ 求解即可.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的方程 $(m-1)x^{|m|+1} - x + 3 = 0$ 是一元二次方程，

$$\therefore |m|+1=2, \quad m-1 \neq 0,$$

$$\therefore m = \pm 1, \quad m \neq 1,$$

$$\therefore m = -1.$$

故答案为：-1.

16. 如果 $\sqrt{(\pi-m)^2} - m + \pi = 0$ ，那么 $\sqrt{(3-m)^2} - \sqrt{m^2} =$ _____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质. 由已知方程 $\sqrt{(\pi-m)^2} - m + \pi = 0$ 可得 $\sqrt{(\pi-m)^2} = m - \pi$ ，根据算术平方根的非负性，有 $m \geq \pi$ ，再化简所求表达式 $\sqrt{(3-m)^2} - \sqrt{m^2} = |3-m| - |m| = (m-3) - m = -3$ ，即可作答.

【详解】解： $\because \sqrt{(\pi-m)^2} - m + \pi = 0$ ，

$$\therefore \sqrt{(\pi-m)^2} = m - \pi,$$

$$\therefore \sqrt{(\pi-m)^2} = |\pi-m| \geq 0,$$

$$\therefore m - \pi \geq 0,$$

$$\therefore m \geq \pi$$

$$\text{故 } \sqrt{(3-m)^2} - \sqrt{m^2} = |3-m| - |m|,$$

$$\therefore m \geq \pi$$

$$\therefore |3-m| = m-3, \quad |m| = m,$$

$$\therefore |3-m|-|m|=(m-3)-m=-3,$$

故答案为: -3 .

17. 当 $a > 0$ 时, 化简 $\sqrt{-\frac{b^3}{a}} =$ _____.

【答案】 $-\frac{b\sqrt{-ab}}{a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的化简, 根据题意可知 $b \leq 0$, 然后化简即可.

【详解】 解: 根据题意可知: $-\frac{b^3}{a} \geq 0$,

又 $a > 0$,

$\therefore b \leq 0$,

$$\therefore \sqrt{-\frac{b^3}{a}} = |b| \sqrt{-\frac{b}{a}} = -b \sqrt{\frac{-b}{a}} = -b \sqrt{\frac{-ab}{a^2}} = -\frac{b\sqrt{-ab}}{a},$$

故答案为: $-\frac{b\sqrt{-ab}}{a}$.

18. 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - 9x - 3c + 3 = 0$ 有两个不相等的整数根 x_1 和 x_2 , 且 $x_2 = 2x_1$, 如果 a 是正整数, 则 c 的值为 _____.

【答案】 -5 或 -1

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 根与系数的关系, 由一元二次方程根与系数的关系得出 $x_1 = \frac{3}{a}$, $2x_1^2 = \frac{-3c+3}{a}$, 再根据 x_1 整数, a 是正整数, 可得出 $a = 1$ 或 $a = 3$, 然后分情况求出 c 的值, 再验证即可得出答案.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - 9x - 3c + 3 = 0$ 有两个不相等的整数根 x_1 和 x_2 ,

$$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{9}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{-3c+3}{a} \end{cases},$$

$\therefore x_2 = 2x_1$,

$$\therefore \begin{cases} x_1 + 2x_1 = \frac{9}{a} \\ x_1 \times 2x_1 = \frac{-3c+3}{a} \end{cases},$$

$$\text{即可得出: } x_1 = \frac{3}{a}, \quad 2x_1^2 = \frac{-3c+3}{a},$$

$\because x_1$ 整数, a 是正整数,

$$\therefore a=1 \text{ 或 } a=3,$$

$$\text{根据题意可知: } \Delta = (-9)^2 - 4a \times (-3c+3) = 81 + 12a(c-1) > 0,$$

$$\text{当 } a=1 \text{ 时, 则 } x_1=3, \quad x_2=6,$$

$$\text{把 } a=1, \quad x_1=3 \text{ 代入 } 2x_1^2 = \frac{-3c+3}{a},$$

$$\text{解得: } c=-5,$$

$$\text{当 } c=-5 \text{ 时, } \Delta = (-9)^2 - 4a \times (-3c+3) = 81 + 12 \times 1 \times (-5-1) = 9 > 0, \text{ 满足题意,}$$

$$\text{当 } a=3 \text{ 时, 则 } x_1=1, \quad x_2=2,$$

$$\text{把 } a=3, \quad x_1=1 \text{ 代入 } 2x_1^2 = \frac{-3c+3}{a},$$

$$\text{解得: } c=-1,$$

$$\text{当 } c=-1 \text{ 时, } \Delta = (-9)^2 - 4a \times (-3c+3) = 81 + 12 \times 3 \times (-1-1) = 9 > 0, \text{ 满足题意,}$$

综上: $c=-5$ 或 $c=-1$.

故答案为: -5 或 -1 .

三、简答题 (本大题共 6 题, 每题 5 分, 满分 30 分)

$$19. \text{ 计算: } \sqrt{2\frac{2}{3}} + \frac{\sqrt{20}}{2} - \left(\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{24}}{3} \right)$$

$$\text{【答案】 } -2\sqrt{6} - \sqrt{5}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的加减运算, 分母有理化, 先利用二次根式的性质化简, 然后去括号, 最后再计算括号外面的即可.

$$\text{【详解】 解: } \sqrt{2\frac{2}{3}} + \frac{\sqrt{20}}{2} - \left(\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{24}}{3} \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{2\sqrt{5}}{2} - \left(2\sqrt{6} + 2\sqrt{5} + \frac{2\sqrt{6}}{3} \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{3} + \sqrt{5} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$= -2\sqrt{6} - \sqrt{5}$$

20. 计算: $4a\sqrt{\frac{a}{2}} - a^2\sqrt{\frac{8}{a}} + \sqrt{\frac{2a^3}{9}}$

【答案】 $\frac{a\sqrt{2a}}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质和二次根式的加减运算. 根据二次根式的性质进行化简, 然后运算即可.

【详解】 解: $4a\sqrt{\frac{a}{2}} - a^2\sqrt{\frac{8}{a}} + \sqrt{\frac{2a^3}{9}}$

$$= 4a \cdot \frac{\sqrt{2a}}{2} - a^2 \cdot \frac{2\sqrt{2a}}{a} + \frac{a\sqrt{2a}}{3}$$

$$= 2a\sqrt{2a} - 2a\sqrt{2a} + \frac{a\sqrt{2a}}{3}$$

$$= \frac{a\sqrt{2a}}{3}.$$

21. 计算: $\frac{3}{4}\sqrt{a^2b} \times 2\sqrt{a^3b} \div 3\sqrt{\frac{a}{b}} (a > 0, b > 0)$

【答案】 $\frac{1}{2}a^2b\sqrt{b}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的乘除法, 原式根据二次根式乘除法法则进行计算即可.

【详解】 解: $\frac{3}{4}\sqrt{a^2b} \times 2\sqrt{a^3b} \div 3\sqrt{\frac{a}{b}}$

$$= \frac{3}{4} \times 2 \div 3 \sqrt{a^2b \times a^3b \div \frac{a}{b}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4} \times 2 \times \frac{1}{3} \sqrt{a^2 b \times a^3 b \times \frac{b}{a}} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{a^4 b^3} \\
&= \frac{1}{2} a^2 b \sqrt{b}.
\end{aligned}$$

22. 解方程: $(3x-2)^2 = 3x-2$

【答案】 $x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = 1$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程，方程移项后运用因式分解法求解即可.

【详解】 解: $(3x-2)^2 = 3x-2$,

$$(3x-2)^2 - (3x-2) = 0,$$

$$(3x-2)(3x-2-1) = 0,$$

$$3x-2=0, \quad 3x-2-1=0,$$

解得: $x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = 1.$

23. 解方程: $2x^2 - 6x + 1 = 0$ (用配方法).

【答案】 $x_1 = \frac{3+\sqrt{7}}{2}, \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$

【解析】

【分析】 在本题中，先化二次项系数为 1，然后把常数项 $\frac{1}{2}$ 移项后，应该在左右两边同时加上一次项系数 -3 的一半的平方.

【详解】 解: $x^2 - 3x = -\frac{1}{2},$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{9}{4},$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4},$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2},$$

所以 $x_1 = \frac{3+\sqrt{7}}{2}, \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{7}}{2}.$

【点睛】 本题主要考查了配方法解一元二次方程，配方法的一般步骤：（1）把常数项移到等号的右边；（2）把二次项的系数化为 1；（3）等式两边同时加上一次项系数一半的平方．选择用配方法解一元二次方程时，最好使方程的二次项的系数为 1，一次项的系数是 2 的倍数．

24. 解方程： $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x}{4} = x(x+1)$

【答案】 $x_1 = -2, x_2 = -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，解题的关键是掌握一元二次方程的解法：直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法等．

首先整理成一般式，然后利用因式分解法解一元二次方程即可．

【详解】 解： $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x}{4} = x(x+1)$

$$2x^2 - 2 - x = 4x^2 + 4x$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$(x+2)(2x+1) = 0$$

$$x+2=0 \text{ 或 } 2x+1=0$$

$$\text{解得 } x_1 = -2, x_2 = -\frac{1}{2}.$$

四、解方程（本大题共 3 题，第 25、26 题 7 分，第 27 题 8 分，满分 22 分）

25. 先化简，再求值：已知 $x = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ，求 $\frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \div \frac{x-1}{x+1} \cdot (\sqrt{x}-1)$ 的值．

【答案】 $x+1, 2\sqrt{15}-5$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的化简求值，先把分式的除法转化成乘法，再约分计算即可，利用分母有理化求出 x 的值，最后代入数值计算即可得出答案．

【详解】 解： $\frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \div \frac{x-1}{x+1} \cdot (\sqrt{x}-1)$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}+1} \times \frac{x+1}{x-1} \cdot (\sqrt{x}-1)$$

$$\begin{aligned}
 &= (\sqrt{x}+1) \times \frac{x+1}{x-1} \cdot (\sqrt{x}-1) \\
 &= (x-1) \times \frac{x+1}{x-1} \\
 &= x+1
 \end{aligned}$$

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \frac{4\sqrt{15}-12}{2} = 2\sqrt{15}-6$$

$$\therefore \text{原式} = 2\sqrt{15}-6+1 = 2\sqrt{15}-5.$$

26. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + \sqrt{m-1}x + m-3 = 0$ 有实数根.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 当 m 是偶数时, 记方程的两根为 x_1 和 x_2 ($x_1 < x_2$), 求 $x_1^{2022} \cdot x_2^{2023}$ 的值.

【答案】 (1) $1 \leq m \leq \frac{11}{3}$

(2) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 一元二次方程根与系数的关系等知识.

(1) 根据一元二次方程有实数根的条件, 即判别式非负, 同时根号下的表达式需满足非负性质求解即可.

(2) 先确定满足条件的偶数 m 值, 再利用根与系数的关系计算所求表达式即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 方程有实数根, 且 $\sqrt{m-1} \geq 0$,

$$\therefore m \geq 1, \text{ 判别式 } \Delta = (\sqrt{m-1})^2 - 4 \times 1 \times (m-3) = m-1-4m+12 = -3m+11.$$

$$\therefore \Delta \geq 0,$$

$$\therefore -3m+11 \geq 0,$$

$$\text{解得: } m \leq \frac{11}{3}$$

$$\therefore m \text{ 的取值范围是 } 1 \leq m \leq \frac{11}{3}.$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because m \text{ 是偶数, 且 } 1 \leq m \leq \frac{11}{3},$$

$$\therefore m = 2,$$

当 $m=2$ 时, 方程为 $x^2 + \sqrt{2-1}x + 2-3=0$,

即 $x^2 + x - 1 = 0$,

记方程的两根为 x_1 和 x_2 ($x_1 < x_2$),

则 $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 x_2 = -1$,

$$\therefore x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore x_1^{2022} \cdot x_2^{2023} = (x_1 x_2)^{2022} \times x_2 = 1 \cdot x_2 = x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

27. 阅读材料, 回答问题

双二次方程又称“准二次方程”, 是移项且合并同类项之后, 只含有偶次项的四次方程, 其一般形式为:

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$). 下面我们来看解双二次方程: $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$.

解: 令 $y = x^2$, 原方程化为 $y^2 + 5y - 36 = 0$

得: $(y+9)(y-4) = 0$,

解得: $y_1 = -9, y_2 = 4$

当 $x^2 = -9$ 时, 无实数根, 舍去; 当 $x^2 = 4$ 时, $x = \pm 2$,

所以, 原方程的解为 $x_1 = 2, x_2 = -2$,

已知关于 x 的双二次方程 $3x^4 + 4x^2 + k - 1 = 0$.

(1) 当 $k = -\frac{2}{3}$ 时, 求方程的根;

(2) 如果该方程和关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (a+1)x + \frac{a^2+1}{2} = 0$ 有一个共同的实数根, 求 k 的值;

(3) 填空: 如果该方程无实数根, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 (1) $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $k = -6$

(3) $k > 1$

【解析】

【分析】 本题考查了已知一元二次方程的根的情况求参数，因式分解法解方程，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 先模仿题干过程，得出 $3y^2 + 4y - \frac{5}{3} = 0$ ，再整理得 $9y^2 + 12y - 5 = 0$ ，然后运用因式分解法进行解方程，即可作答.

(2) 由 $x^2 + (a+1)x + \frac{a^2+1}{2} = 0$ 得出 $\Delta = (a+1)^2 - 4 \times 1 \times \left(\frac{a^2+1}{2}\right) = -(a-1)^2 \leq 0$ ，因为关于 x 的双二次方程 $3x^4 + 4x^2 + k - 1 = 0$ 和关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (a+1)x + \frac{a^2+1}{2} = 0$ 有一个共同的实数根，故 $a = 1$ ，代入 $x^2 + (a+1)x + \frac{a^2+1}{2} = 0$ 求出 $x_1 = x_2 = -1$ ，最后把 $x = -1$ 代入 $3x^4 + 4x^2 + k - 1 = 0$ ，解得 $k = -6$ ；

(3) 依题意， $3x^4 + 4x^2 + k - 1 = 0$ ，令 $x^2 = y$ ，原方程化为 $3y^2 + 4y + k - 1 = 0$ ，此时 $y \geq 0$ ， $3y^2 + 4y + k - 1 = 0$ 无实数根，整理 $3y^2 + 4y + k - 1$ 得 $3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + k - \frac{7}{3}$ ，又因为 $y \geq 0$ ，当 $y = 0$ 时，则 $3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + k - \frac{7}{3}$ 有最小值，且要大于 0，才能满足 $y \geq 0$ ， $3y^2 + 4y + k - 1 = 0$ 无实数根，故 $\frac{4}{3} + k - \frac{7}{3} > 0$ ，解得 $k > 1$ ，即可作答.

【小问 1 详解】

解： $\because 3x^4 + 4x^2 + k - 1 = 0$ ， $k = -\frac{2}{3}$ ，

$$\therefore 3x^4 + 4x^2 - \frac{2}{3} - 1 = 0,$$

$$\text{即 } 3x^4 + 4x^2 - \frac{5}{3} = 0,$$

令 $x^2 = y$ ，原方程化为 $3y^2 + 4y - \frac{5}{3} = 0$ ，

$$\therefore 9y^2 + 12y - 5 = 0,$$

$$\text{得: } (3y-1)(3y+5) = 0,$$

$$\text{解得: } y_1 = \frac{1}{3}, y_2 = -\frac{5}{3}$$

当 $x^2 = y_2 = -\frac{5}{3} < 0$ 时，无实数根，舍去；当 $x^2 = y_1 = \frac{1}{3}$ 时， $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$$\therefore \text{原方程的解为 } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 或 } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because x^2 + (a+1)x + \frac{a^2+1}{2} = 0,$$

$$\therefore \Delta = (a+1)^2 - 4 \times 1 \times \left(\frac{a^2+1}{2} \right) = a^2 + 2a + 1 - 2a^2 - 2 = -a^2 + 2a - 1 = -(a-1)^2 \leq 0,$$

$\therefore$ 关于 x 的双二次方程 $3x^4 + 4x^2 + k - 1 = 0$ 和关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (a+1)x + \frac{a^2+1}{2} = 0$ 有一个共同的实数根,

$$\therefore -(a-1)^2 = 0,$$

解得 $a = 1$,

$$\therefore x^2 + (1+1)x + \frac{1^2+1}{2} = 0$$

$$\therefore x^2 + 2x + 1 = 0$$

解得 $x_1 = x_2 = -1$,

依题意, 把 $x = -1$ 代入 $3x^4 + 4x^2 + k - 1 = 0$,

$$\text{得 } 3 \times (-1)^4 + 4 \times (-1)^2 + k - 1 = 0,$$

$$\therefore 3 \times 1 + 4 \times 1 + k - 1 = 0,$$

解得 $k = -6$;

【小问 3 详解】

解: 依题意, $3x^4 + 4x^2 + k - 1 = 0$,

令 $x^2 = y$, 原方程化为 $3y^2 + 4y + k - 1 = 0$, 此时 $y \geq 0$,

即 $y \geq 0$, $3y^2 + 4y + k - 1 = 0$ 无实数根,

$$\therefore 3y^2 + 4y + k - 1$$

$$= 3 \left(y^2 + \frac{4}{3}y \right) + k - 1$$

$$= 3\left(y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) + k - 1$$

$$= 3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + k - \frac{7}{3},$$

又 $\because y \geq 0$,

当 $y = 0$ 时, 则 $3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + k - \frac{7}{3}$ 有最小值, 且要大于 0, 才能满足 $y \geq 0$, $3y^2 + 4y + k - 1 = 0$ 无实数根,

$$\therefore 3 \times \left(0 + \frac{2}{3}\right)^2 + k - \frac{7}{3} > 0,$$

$$\text{则 } \frac{4}{3} + k - \frac{7}{3} > 0,$$

$$\therefore k - 1 > 0,$$

解得 $k > 1$.