

罗南中学 2023 学年第一学期八年级数学 练习 1

一、填空题 (每题 3 分, 满分 36 分)

1. 在平面直角坐标平面内, 已知 $P(-1, 2)$ 、 $Q(-2, 3)$, 则 $PQ =$ _____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据两点间的距离公式进行计算, 即 A (x, y) 和 B (a, b), 则 $AB = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ 进行计算.

【详解】 $\because P(-1, 2)$ 、 $Q(-2, 3)$,

$$\therefore PQ = \sqrt{(-1+2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2},$$

故答案为 $\sqrt{2}$.

【点睛】 此题考查坐标平面内两点间的距离公式, 解题关键在于能够熟练运用公式进行计算.

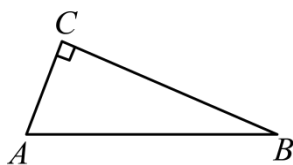
2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 13$, $AC = 5$, $BC =$ _____.

【答案】 12

【解析】

【分析】 根据勾股定理进行计算即可.

【详解】 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 13$, $AC = 5$,



$$\text{则 } BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 12,$$

故答案为 12.

【点睛】 此题考查勾股定理, 解题关键在于画出图形.

3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 若斜边 AB 的长度为 6cm, 则 AB 上的中线的长为 _____.

【答案】 3cm

【解析】

【分析】 直接根据直角三角形的性质即可得出结论.

【详解】 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 斜边 AB 的长为 6cm,

∴ 斜边 AB 上的中线为 $\frac{1}{2}AB=3\text{cm}$.

故答案为 3.

【点睛】此题考查直角三角形斜边上的中线，熟知在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半是解题的关键.

4. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，若 $\angle B=90^\circ$ ， $AC=10\text{cm}$ ， $AB=5\text{cm}$ ，则 $\angle A=$ _____°.

【答案】60

【解析】

【分析】根据勾股定理求出 BC 的长度，然后求出 $\angle A$ 的度数.

【详解】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

∵ $\angle B=90^\circ$ ， $AC=10$ ， $AB=5$ ，

∴ $BC=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$ ，

即 $AB=\frac{1}{2}AC$ ，

∴ $\angle A=60^\circ$.

故选答案为 60.

【点睛】此题考查含 30 度角的直角三角形，勾股定理，解题的关键是根据勾股定理求出 BC 的长度.

5. 定理“线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等”的逆定理是：_____

【答案】到线段两端的距离相等的点在线段的垂直平分线上

【解析】

【分析】根据线段垂直平分线的性质的逆定理求解即可.

【详解】定理“线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等”的逆定理是：到线段两端的距离相等的点在线段的垂直平分线上.

故答案为：到线段两端的距离相等的点在线段的垂直平分线上.

【点睛】此题考查了线段垂直平分线的性质的逆定理，解题的关键是熟练掌握线段垂直平分线的性质的逆定理.

6. 到点 P 的距离等于 3cm 的点的轨迹是_____.

【答案】以 P 为圆心，以 3cm 为半径的圆

【解析】

【分析】根据到定点的距离等于定长的点都在圆上，反过来圆上各点到定点的距离等于定长，得出结论到点 P 的距离等于 3cm 的点的轨迹是以 P 为圆心，以 3cm 为半径的圆.

【详解】解：到点 P 的距离等于 3cm 的点的轨迹是以 P 为圆心，以 3cm 为半径的圆.

故答案为：以 P 为圆心，以 3cm 为半径的圆.

【点睛】本题考查了学生的理解能力,理解到点 P 的距离等于 3cm 的点的轨迹是以 P 为圆心,以 3cm 为半径的圆是解题的关键.

7. $\triangle ABC$ 中, $\angle B$, $\angle C$ 的平分线交于点 O , 如果点 O 到 BC 边的距离为 5, 则点 O 到 AB 边的距离为 _____.

【答案】5

【解析】

【分析】根据角平分线的性质解答即可.

【详解】 $\because \triangle ABC$ 中, $\angle B$, $\angle C$ 的平分线交于点 O ,

$\therefore$ 点 O 到 AB 边的距离=点 O 到 BC 边的距离=5,

故答案为 5

【点睛】此题考查角平分线的性质, 掌握角的平分线上的点到角的两边的距离相等是解题的关键.

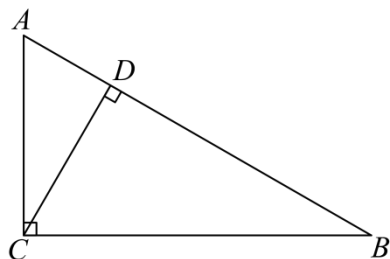
8. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 若 $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , $\angle ACD = 30^\circ$, $AD = 2$, 则 $AB =$ _____.

【答案】8

【解析】

【分析】先根据直角三角形两锐角互余计算出 $\angle A$, $\angle B$, 再根据含 30° 度角的直角三角形的性质求解.

【详解】解: 如图所示,



$\because$ 在 $\triangle ACD$ 中, $CD \perp AB$, $\angle ACD = 30^\circ$, $AD = 2$,

$\therefore \angle A = 90^\circ - \angle ACD = 60^\circ$, $AC = 2AD = 4$,

又 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle A = 30^\circ$,

$\therefore AB = 2AC = 8$,

故答案为: 8.

【点睛】本题主要考查直角三角形两锐角互余, 含 30° 度角的直角三角形的性质, 解题的关键是掌握含 30° 度角的直角三角形中, 30° 度角所对的直角边等于斜边的一半.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AC 的垂直平分线交 AC 于 D , 交 BC 于 E , 若 $\triangle ABE$ 的周长为 10, $BC = 6$,

则 $AC = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 4

【解析】

【分析】 由 $\triangle ABE$ 的周长为 10, $BC=6$, 可得 $AB+BE+AE=AB+BE+EC=AB+BC=10$, 推出 $AB=AC=4$;

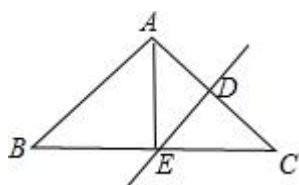
【详解】 $\because AC$ 的垂直平分线交 AC 于 D , 交 BC 于 E ,

$\therefore EA=EC$,

$\because \triangle ABE$ 的周长为 10, $BC=6$,

$\therefore AB+BE+AE=AB+BE+EC=AB+BC=10$,

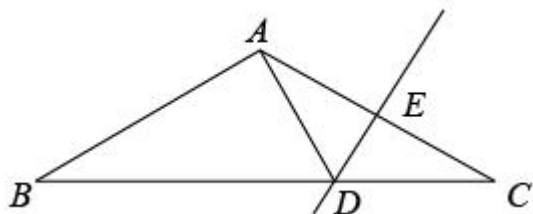
$\therefore AB=AC=4$,



故答案为 4.

【点睛】 此题考查等腰三角形的性质, 线段的垂直平分线的性质, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题.

10. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle BAC=120^\circ$, DE 垂直平分 AC 交 BC 于 D , 垂足为 E , 连接 AD , 若 $DE=2\text{cm}$, 则 $BC = \underline{\hspace{2cm}} \text{cm}$

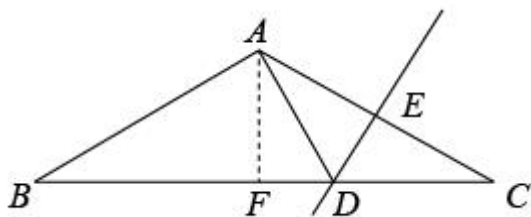


【答案】 12

【解析】

【分析】 作 $AF \perp BC$, 由线段垂直平分线的性质、等腰三角形的性质可得 AC , 再根据勾股定理即可求解;

【详解】 解: 如图, 作 $AF \perp BC$,



$$\because AB=AC, \angle BAC=120^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 30^\circ,$$

$$\because DE \text{ 垂直平分 } AC,$$

$$\therefore DE \perp AC,$$

$$\because DE=2 \text{ (cm)},$$

$$\therefore CD = 2DE = 4 \text{ (cm)},$$

$$\therefore EC = \sqrt{CD^2 - DE^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)},$$

$$\because AE = EC,$$

$$\therefore AC = AB = 2EC = 4\sqrt{3} \text{ (cm)},$$

$$\because AF \perp BC, \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore AF = \frac{1}{2} AB = 2\sqrt{3} \text{ (cm)},$$

$$\therefore BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2} = 6 \text{ (cm)},$$

$$\therefore BC = 2BF = 12 \text{ (cm)},$$

故答案为：12.

【点睛】 本题主要考查勾股定理的应用、线段垂直平分线的性质、等腰三角形的性质，掌握相关性质并灵活运用是解题的关键.

11. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ，交 BC 于 D ，如果 $BD:CD = 2:1$ ，那么 $\angle B =$ _____.

【答案】 30° ## 30 度

【解析】

【分析】 先画出图形，作 $DE \perp AB$ ，于点 E ，根据角平分线的性质得 $CD = DE$ ，再根据 $BD:CD = 2:1$ ，得 $BD:DE = 2:1$ ，根据直角三角形的性质可得答案.

【详解】 如图所示，过点 D 作 $DE \perp AB$ ，于点 E ，

$$\because AD \text{ 平分 } \angle BAC, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore CD = DE.$$

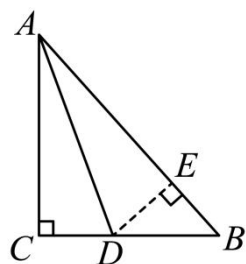
$$\because BD:CD = 2:1,$$

$$\therefore BD:DE = 2:1,$$

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中， $BD:DE = 2:1$ ，

$$\therefore \angle B = 30^\circ.$$

故答案为： 30° .



【点睛】 本题主要考查了角平分线的性质定理，含 30° 的直角三角形的性质等，构造

直角三角形是解题的关键.

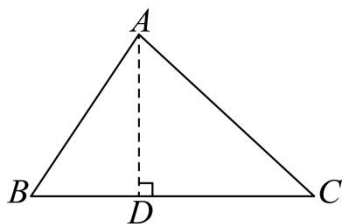
12. $\triangle ABC$ 中， $AB = 13$ ， $AC = 15$ ， BC 边上的高 $AD = 12$ ， 则 BC 长为_____.

【答案】 4 或 14##14 或 4

【解析】

【分析】 根据题意， $\triangle ABC$ 可能是锐角三角形或者钝角三角形， 分两种情况进行讨论作图， 然后利用勾股定理即可求解.

【详解】 解： 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 13$ ， $AC = 15$ ， BC 边上高 $AD = 12$ ，
如图所示， 当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，



在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AB = 13$ ， $AD = 12$ ， 由勾股定理得：

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 = 13^2 - 12^2 = 25,$$

$$\therefore BD = 5,$$

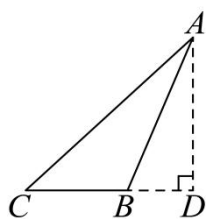
在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中 $AC = 15$ ， $AD = 12$ ， 由勾股定理得：

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 15^2 - 12^2 = 81,$$

$$\therefore CD = 9,$$

$$\therefore BC \text{ 的长为: } BC = BD + DC = 5 + 9 = 14;$$

如图所示， 当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，



在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中 $AB = 13$ ， $AD = 12$ ， 由勾股定理得：

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 = 13^2 - 12^2 = 25,$$

$$\therefore BD = 5,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中 $AC = 15$, $AD = 12$, 由勾股定理得:

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 15^2 - 12^2 = 81,$$

$$\therefore CD = 9,$$

$$\therefore BC \text{ 的长为: } BC = CD - BD = 9 - 5 = 4;$$

综上可得: BC 的长为: 4 或 14.

故答案为: 4 或 14.

【点睛】题目主要考查勾股定理, 进行分类讨论作出图象运用勾股定理理解直角三角形是解题关键.

二、选择题 (每题 3 分, 满分 18 分)

13. 已知等边三角形的边长为 1, 则它的高等于 ().

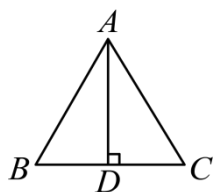
- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据等腰三角形三线合一的性质求得 BD 的长, 再进一步根据勾股定理求解.

【详解】 $\because AB=AC$, $AD \perp BC$,



$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.$$

在直角三角形 ABD 中, 根据勾股定理, 得

$$AD = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选 B.

【点睛】此题考查等边三角形的性质和勾股定理, 解题关键在于画出图形.

14. 等腰直角三角形, ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, D 是 BC 上一点, $AD = 2CD$, 则 $\angle DAB$ 的度数是 ().

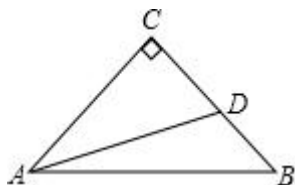
- A. 22.5° B. 20° C. 15° D. 30°

【答案】C

【解析】

【分析】在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，由 $\frac{CD}{AD} = \frac{1}{2}$ 得到 $\angle ADC = 60^\circ$ ，而 $\angle ADC = 45^\circ = \angle B + \angle DAB$ ，根据等腰直角三角形即可求出 $\angle ADC$ 。

【详解】：在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中



$$\therefore \frac{CD}{AD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle CAD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 60^\circ$$

而 $\angle ADC = \angle B + \angle DAB$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形

$$\therefore \angle B = 45^\circ$$

$$\therefore \angle DAB = 15^\circ.$$

故选 C.

【点睛】此题考查等腰直角三角形的性质，解题关键在于掌握其性质定义。

15. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 、 CE 是斜边上的高和中线， $AC = CE = 10\text{cm}$ ，则 BD 长为 ().

A. 25cm

B. 5cm

C. 15cm

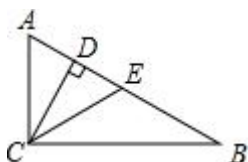
D. 10cm

【答案】C

【解析】

【分析】根据条件可求得 $AC = AE = CE = BE$ ，可证得 $\triangle ACE$ 为等边三角形，可求得 $DE = \frac{1}{2} AE$ ，可求得 DE ，则可求得 BD 。

【详解】 $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， CE 为斜边上的中线，



$$\therefore AE = BE = CE = AC = 10\text{cm},$$

$\therefore \triangle ACE$ 为等边三角形，

$$\therefore CD \perp AE,$$

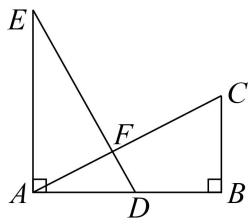
$$\therefore DE = \frac{1}{2} AE = 5\text{cm},$$

$$\therefore BD=DE+BE=5\text{cm}+10\text{cm}=15\text{cm},$$

故选 C.

【点睛】此题考查直角三角形的性质，等边三角形的性质，根据直角三角形的性质求得 BE、根据等边三角形的性质求得 DE 是解题的关键.

16. 如图, $EA \perp AB$, $CB \perp AB$, $AE=AB=2BC$, D 是 AB 的中点, 那么下列结论中不正确的是 ()



A. $DE = AC$

B. $DE \perp AC$

C. $\angle CAB = 30^\circ$

D. $\angle EAF = \angle ADE$

【答案】C

【解析】

【分析】已知 $EA=AB=2BC$, 且 D 是 AB 中点, 那么 $AD=BC$, 进而可证得 $\triangle AED$ 、 $\triangle BAC$ 全等, 可根据这个条件进行判断.

【详解】 $\because EA=AB=2BC$, $AB=2AD$,

$$\therefore AD=BC;$$

又 $\because EA \perp AB$, $CB \perp AB$, 即 $\angle EAD = \angle B = 90^\circ$,

$$\therefore Rt \triangle EAD \cong Rt \triangle ABC,$$

$$\therefore DE=AC;$$

又 $\angle EAF$ 、 $\angle ADF$ 同为 $\angle FAD$ 的余角,

$$\therefore \angle EAF = \angle ADE;$$

故 A、B、D 的结论都正确;

$Rt \triangle CAB$ 中, $AB=2BC$, 而不是 $AC=2BC$ (含 30° 度角的直角三角形, 直角边等于斜边的一半), 所以 $\angle CAB \neq 30^\circ$, 因此 C 的结论是错误的.

故选: C.

【点评】此题考查三角形全等的判定和性质, 平行线的性质, 含 30° 度角的直角三角形, 解题关键在于掌握各性质定义.

17. 下列命题的逆命题是假命题的是 ()

A. 凡直角都相等

B. 在一个三角形中, 等边对等角

- C. 角平分线上的点到角的两边的距离都相等
- D. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 30° 角所对的边是斜边的一半

【答案】A

【解析】

【分析】分别写出各个命题的逆命题, 根据全等三角形的判定、等腰三角形的判定、角平分线的判定和平行线的判定定理判断即可.

- 【详解】解: A、凡直角都相等的逆命题是相等的角都是直角, 逆命题是假命题;
- B、一个三角形中, 等边对等角的逆命题是同一个三角形中, 等角对等边, 逆命题是真命题;
- C、角平分线上的点到角两边的距离相等的逆命题是到角两边的距离相等的点在角平分线上, 逆命题是真命题;
- D、在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 30° 角所对的边是斜边的一半的逆命题是在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 一个锐角的对边是斜边的一半补, 则这个锐角等于 30° , 逆命题是真命题;

故选 A.

【点睛】本题主要考查真假命题的判定, 解决本题的关键是要正确写出各个命题的逆命题、熟练掌握等腰三角形, 角平分线, 含 30° 直角三角形的性质和判定定理.

18. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $\angle B$ 与 $\angle C$ 的平分线交于点 O , 那么 $\angle BOC$ 等于 ().

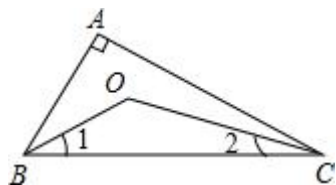
- A. 100° B. 120° C. 135° D. 150°

【答案】C

【解析】

【分析】根据直角三角形的两个锐角互余和角平分线定义, 可得 $\angle 1 + \angle 2 = 45^\circ$, 从而根据三角形的内角和定理求解.

【详解】 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$,



$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 90^\circ,$$

又 $\angle B$ 与 $\angle C$ 的平分线相交于点 O ,

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ,$$

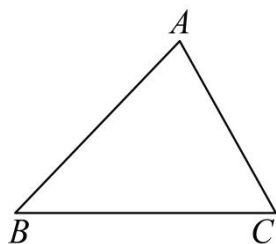
$$\therefore \angle BOC = 135^\circ.$$

故选 C.

【点睛】此题考查三角形的内角和定理，角平分线的定义，解题关键在于画出图形.

三、简答题：(第 19 题 6 分，第 20、21 题 8 分，满分 22 分)

19. 已知：如图 $\triangle ABC$ ，求作： $\triangle ABC$ 内一点 P ，使 $PB = PC$ ，且点 P 到 $\angle ABC$ 两边的距离相等. (要求正确画出图形，保留作图痕迹，并简单写出作法)

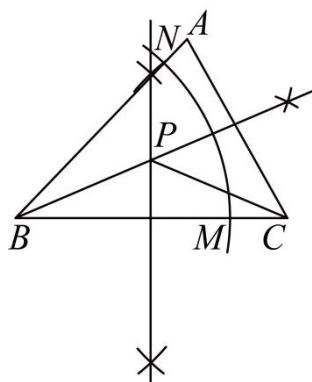


【答案】见解析

【解析】

【分析】以点 B 为圆心，以任意长为半径画弧，两弧交 $\angle ABC$ 两边于点 M ， N ，分别以点 M ， N 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长度为半径画弧，两弧交于点 P ，作射线 BP . 分别以 B, C 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}BC$ 的长为半径画弧，得到弧的两个交点，连接交点即为垂直平分线，与角平分线的交点即为点 P .

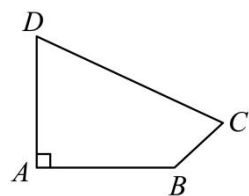
【详解】如图，点 P 即为所求.



【点睛】此题考查角平分线的性质与作法，线段垂直平分线的性质和作法，熟练

掌握相关性质是解题关键.

20. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = AD = 2$ ， $BC = 1$ ， $CD = 3$.



(1) 求 $\angle B$ 的度数.

(2) 求四边形 $ABCD$ 的面积.

【答案】(1) 135°

(2) $2 + \sqrt{2}$

【解析】

【分析】对于 (1)，连接 BD ，根据勾股定理求出 BD 及 $\angle ABD$ ，再根据勾股定理逆定理说明 $\triangle BCD$ 是直角三角形，即可求出答案；

对于 (2)，根据两个三角形的面积和求出答案即可。

【小问 1 详解】

连接 BD ，如图所示。

$$\because AB = AD = 2, \angle A = 90^\circ,$$

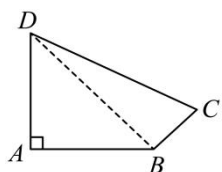
$$\therefore \angle ABD = \angle ADB = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ,$$

$$\text{根据勾股定理得 } BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{在 } \triangle BCD \text{ 中, } BD^2 + BC^2 = (2\sqrt{2})^2 + 1^2 = 9 = CD^2,$$

$$\therefore \triangle BCD \text{ 是直角三角形, 且 } \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ;$$



【小问 2 详解】

$$S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 1 = 2 + \sqrt{2}.$$

【点睛】本题主要考查了勾股定理及逆定理的应用，求四边形的面积，将不规则四边形转化为两个直角三角形是解题的关键。

21. 已知: $A(2,1)$, $B(-1,2)$, $C(5, y)$, 且 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 求 y 的值.

【答案】 $y = 0$ 或 15

【解析】

【分析】根据等腰三角形的定义，结合两点距离公式得 $AB = \sqrt{10}$ ， $AC = \sqrt{9 + (1 - y)^2}$ ， $BC = \sqrt{36 + (2 - y)^2}$ ，然后进行分类讨论，即可列式作答。

【详解】解: $\because A(2,1)$, $B(-1,2)$, $C(5, y)$,

$$\therefore AB = \sqrt{(2+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10},$$

$$AC = \sqrt{(2-5)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{9 + (1-y)^2},$$

$$BC = \sqrt{(-1-5)^2 + (2-y)^2} = \sqrt{36 + (2-y)^2},$$

$\because \triangle ABC$ 为等腰三角形,

$\therefore$ 当 $AB = AC$ 时, 即 $\sqrt{10} = \sqrt{9 + (1-y)^2}$,

则 $10 = 9 + (1-y)^2$

解得 $y = 0$;

或当 $AB = BC$ 时, 即 $\sqrt{10} = \sqrt{36 + (2-y)^2}$,

因为 $(2-y)^2 \geq 0$,

所以 $10 \neq 36 + (2-y)^2$

此种情况不存在;

或当 $AC = BC$ 时, 即 $\sqrt{9 + (1-y)^2} = \sqrt{36 + (2-y)^2}$,

则 $9 + (1-y)^2 = 36 + (2-y)^2$,

即 $2y = 30$,

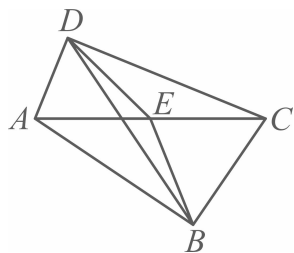
那么 $y = 15$

综上所述, $y = 0$ 或 15 .

【点睛】 本题考查了两点的距离公式以及等腰三角形的性质, 灵活运用分类讨论思想是解题的关键.

四、证明题: (每小题 8 分, 满分 24 分)

22. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, E 是 AC 中点. 求证: $\angle DEB = 2\angle DCB$.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 找出相等的边, 再利用等边对等角、三角形外角的性质得出 $\angle AEB = 2\angle BCE$ 、 $\angle AED = 2\angle DCE$, 从而证明结论.

【详解】 证明: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, E 是 AC 中点.

$\therefore BE = EC = AE$,

$\therefore \angle ACB = \angle CBE$,

$\therefore \angle AEB = \angle CBE + \angle BCE = 2\angle BCE$,

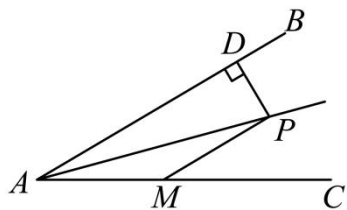
同理可得: $\angle AED = 2\angle DCE$,

$$\therefore \angle AED + \angle AED = 2\angle DCE + 2\angle BCE,$$

$$\therefore \angle DEB = 2\angle DCB.$$

【点睛】本题考查了直角三角形斜边上的中线性质的等腰三角形的性质, 三角形外角的性质等知识. 熟练掌握直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半是解题的关键.

23. 如图, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BAC$ 的平分线上有一点 P , $PM \parallel AB$, $PD \perp AB$, $PM = 6$, 求 AD 的长.

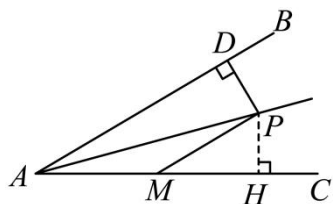


【答案】 $6 + 3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】过 P 点作 $PH \perp AC$ 于 H , 如图, 根据角平分线的性质得到 $\angle BAP = \angle CAP = 15^\circ$, $PH = PD$, 再证明 $MA = MP$, 计算出 $\angle HMP = 30^\circ$, 则可计算出 $PH = 3$, $HM = 3\sqrt{3}$, 然后证明 $\text{Rt}\triangle APH \cong \text{Rt}\triangle APD$, 从而得到 $AD = AH$, 进而即可求解.

【详解】解: 过 P 点作 $PH \perp AC$ 于 H , 如图,



$\because P$ 是 $\angle BAC$ 平分线上一点, $PD \perp AC$, $PH \perp AB$,

$$\therefore \angle BAP = \angle CAP = 15^\circ, \quad PH = PD,$$

$$\therefore PM \parallel AC,$$

$$\therefore \angle MPA = \angle BAP = \angle CAP = 15^\circ,$$

$$\therefore MA = MP = 6, \quad \angle PMC = \angle MPA + \angle CAP = 30^\circ,$$

$$\therefore PH = \frac{1}{2}PM = \frac{1}{2} \times 6 = 3, \quad HM = \sqrt{3}PH = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore AH = AM + MH = MP + MH = 6 + 3\sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle APH$ 和 $\text{Rt}\triangle APD$ 中,

$$\therefore \begin{cases} AP = AP \\ PH = PD \end{cases},$$

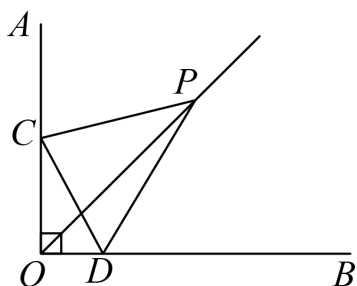
$$\therefore \text{Rt}\triangle APH \cong \text{Rt}\triangle APD (\text{HL}),$$

$$\therefore AD = AH = 6 + 3\sqrt{3}.$$

故答案为 $6 + 3\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了角平分线的性质：角的平分线上的点到角的两边的距离相等，也考查了平行线的性质和含 30° 的直角三角形三边的关系.

24. 如图， $\angle AOB = 90^\circ$ ， OP 平分 $\angle AOB$ ，一个 45° 角的顶点与 P 重合，角的两边分别与射线 OA 交于点 C 、与射线 OB 交于点 D .



(1) 设 $OC = 4$ ， $OD = 3$ ，求 $\triangle COD$ 的周长.

(2) 若 $OP = a$ ，当 $\angle CPD$ 在绕点 P 旋转过程中， $\triangle COD$ 的周长是否会发生变化？若不变，求出 $\triangle COD$ 的周长；若变化，请说明理由.

【答案】(1) 12 (2) 不变， $\sqrt{2}a$

【解析】

【分析】(1) 由勾股定理求出 CD 即可；

(2) 作 $PE \perp OA$ 于 E ， $PF \perp OB$ 于 F ，先得到四边形 $OEFP$ 为正方形，根据正方形的性质得

$$OE = OF = PE = PF = \frac{\sqrt{2}}{2} OP = \frac{\sqrt{2}}{2} a, \quad \angle EPF = \angle PFO = 90^\circ, \quad \text{则可把 } \triangle PEC \text{ 绕点 } P \text{ 逆时针旋转 } 90^\circ$$

得到 $\triangle PFG$ ，根据旋转的性质得 $\angle PFG = \angle PEC = 90^\circ$ ， $FG = EC$ ， $\angle COG = 90^\circ$ ，则 FG 在 OF 的延长线上，所以 $DG = DF + FG$ ，然后证明 $CPD \cong DPG$ ，得到 $CD = DG$ ，进一步可得结论

【小问 1 详解】

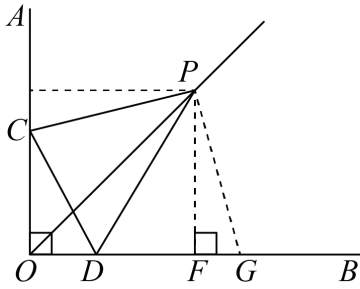
在 $\text{Rt}\triangle COD$ 中， $OD = 3$ ， $OC = 4$ ，

$$\therefore CD = \sqrt{OD^2 + OC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore \triangle COD \text{ 的周长} = OC + OD + CD = 4 + 3 + 5 = 12$$

【小问 2 详解】

作 $PE \perp OA$ 于 E , $PF \perp OB$ 于 F , 如图,



$\because \angle AOB = 90^\circ$, OP 平分 $\angle AOB$,

$\therefore$ 四边形 $OEPF$ 为正方形,

$$\therefore OE = OF = PE = PF = \frac{\sqrt{2}}{2} OP = \frac{\sqrt{2}}{2} a, \quad \angle EPF = \angle PFO = 90^\circ,$$

$\therefore$ 把 $\triangle PEC$ 绕点 P 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle PFG$, 如图,

$\therefore \angle PFG = \angle PEC = 90^\circ$, $FG = EC$, $\angle COG = 90^\circ$,

$\therefore FG$ 在 OF 的延长线上,

$\therefore DG = DF + FG$,

$\because \angle CPD = 45^\circ$,

$\therefore \angle DPG = 45^\circ$,

在 $\triangle CPD$ 和 $\triangle DPG$ 中,

$$\begin{cases} PC=PG \\ \angle CPD=\angle GPD, \\ PD=PD \end{cases}$$

$\therefore \triangle CPD \cong \triangle DPG$ (SAS),

$\therefore CD = DG$,

$\therefore \triangle COD$ 的周长 $= OC + OD + CD$

$$= OC + OD + DG$$

$$= OC + OD + DF + FG$$

$$= OC + FC + OD + DF$$

$$= OE + OF$$

$$= 2OE$$

$$= \sqrt{2}a$$

【点睛】 本题考查了旋转的性质: 对应点到旋转中心的距离相等; 对应点与旋转中心所连线段的夹角等于

旋转角；旋转前、后的图形全等．也考查了正方形的性质和全等三角形的判定与性质．