

初二年级第一学期 12 月数学即时作业

一、选择题

1. 下列函数中, 当 $x > 0$ 时, 函数值 y 随 x 的增大而减小的是()

A. $y = \frac{2}{x}$

B. $y = \frac{x}{2}$

C. $y = \frac{2+x}{2}$

D. $y = -\frac{2}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】需根据函数的性质得出函数的增减性, 即可求出当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小的函数.

【详解】A、 $y = \frac{2}{x}$ 是反比例函数, 图象位于第一、三象限, 在每个象限 y 随 x 的增大而减小, 故本选项符合题意;

B、 $y = \frac{x}{2}$ 是正比例函数, $k = \frac{1}{2} > 0$, y 随 x 的增大而增大, 故本选项不符合题意;

C、 $y = \frac{2+x}{2} = \frac{x}{2} + 1$ 是一次函数, $k = \frac{1}{2} > 0$, y 随 x 的增大而增大, 故本选项不符合题意;

D、 $y = -\frac{2}{x}$ 是反比例函数, 图象位于第二、四象限, 在每个象限 y 随 x 的增大而增大, 故本选项不符合题意.

故选: A .

【点睛】本题综合考查了一次函数、反比例函数的性质, 熟练掌握函数的性质是解题的关键.

2. 下列命题中, 其逆命题是假命题的是 ()

A. 同旁内角互补, 两直线平行

B. 若 $a^2 = b^2$, 则 $a = b$

C. 锐角与钝角互为补角

D. 相等的角是对顶角

【答案】C

【解析】

【分析】先写出各选项的逆命题, 再逐个判断即可.

【详解】解: A、同旁内角互补, 两直线平行的逆命题为两直线平行, 同旁内角互补, 为真命题, 选项不符合题意;

B、若 $a^2 = b^2$, 则 $a = b$ 的逆命题为若 $a = b$, 则 $a^2 = b^2$, 为真命题, 选项不符合题意;

C、锐角与钝角互为补角的逆命题为若两个角互补, 则这两个角分别为锐角、钝角, 为假命题, 选项符合题意;

D、相等的角是对顶角的逆命题为对顶角相等, 为真命题, 选项不符合题意;

故选: C

【点睛】此题考查了命题的逆命题以及真假命题，解题的关键是正确写出命题的逆命题.

3. 下列说法错误的是 ()

- A. 到点 P 距离等于 1cm 的点的轨迹是以点 P 为圆心，半径长为 1cm 的圆
- B. 等腰 $\triangle ABC$ 的底边 BC 固定，顶点 A 的轨迹是线段 BC 的垂直平分线
- C. 到直线 l 距离等于 2cm 的点的轨迹是两条平行于 l 且与 l 的距离等于 2cm 的直线
- D. 在一个角的内部（包括顶点）到角的两边距离相等的点的轨迹是这个角的平分线

【答案】B

【解析】

【分析】根据圆的定义、线段垂直平分线的性质、等腰三角形的性质，角平分线的性质，对选项逐个判断即可.

【详解】解：A、到点 P 距离等于 1cm 的点的轨迹是以点 P 为圆心，半径长为 1cm 的圆，说法正确，不符合题意；

B、等腰 $\triangle ABC$ 的底边 BC 固定，顶点 A 的轨迹是线段 BC 的垂直平分线（线段 BC 中点除外），说法错误，符合题意；

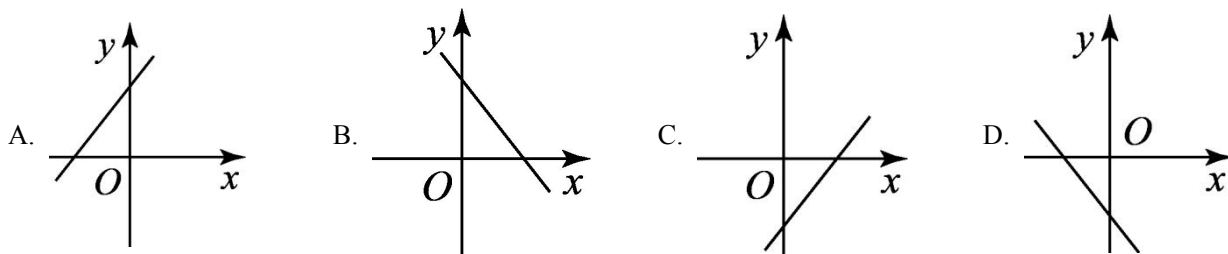
C、到直线 l 距离等于 2cm 的点的轨迹是两条平行于 l 且与 l 的距离等于 2cm 的直线，说法正确，不符合题意；

D、在一个角的内部（包括顶点）到角的两边距离相等的点的轨迹是这个角的平分线，说法正确，不符合题意；

故选：B

【点睛】本题考查了轨迹，圆的定义，线段垂直平分线的性质，等腰三角形的性质，角平分线的性质等知识，熟练运用这些性质进行推理是本题的关键.

4. 若直线 $y = kx + b$ 经过一、二、三象限，则直线 $y = -bx - k$ 的图像是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】根据直线 $y = kx + b$ 经过一、二、三象限，判定 $k > 0, b > 0$ ，从而判定 $-k < 0, -b < 0$ 即图像经过二、三、四象限，选择即可.

【详解】因为直线 $y = kx + b$ 经过一、二、三象限，

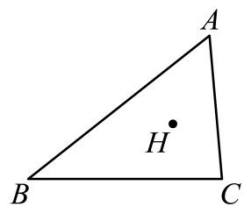
所以 $k > 0, b > 0$,

所以 $-k < 0, -b < 0$ 即直线 $y = -bx - k$ 的图像经过二、三、四象限，

故选 D.

【点睛】本题考查了一次函数图像的分布，正确掌握图像分布与 k, b 的关系是解题的关键.

5. 如图所示，点 H 是 $\triangle ABC$ 内一点，要使点 H 到 AB 、 AC 的距离相等，且 $S_{\triangle ABH} = S_{\triangle BCH}$ ，点 H 是 ()



- A. $\angle BAC$ 的角平分线与 AC 边上中线的交点
- B. $\angle BAC$ 的角平分线与 AB 边上中线的交点
- C. $\angle ABC$ 的角平分线与 AC 边上中线的交点
- D. $\angle ABC$ 的角平分线与 BC 边上中线的交点

【答案】A

【解析】

【分析】根据点 H 到 AB 、 AC 的距离相等可得点 H 在 $\angle BAC$ 的角平分线上，由 $S_{\triangle ABH} = S_{\triangle BCH}$ 可得 AC 边上的中线上，即可求解.

【详解】解：由点 H 到 AB 、 AC 的距离相等可得点 H 在 $\angle BAC$ 的角平分线上，

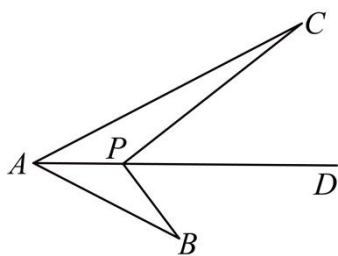
由 $S_{\triangle ABH} = S_{\triangle BCH}$ 可得 AC 边上的中线上，

则点 H 是 $\angle BAC$ 的角平分线与 AC 边上中线的交点，

故选：A

【点睛】此题考查了角平分线的判定以及三角形中线的性质，解题的关键是熟练掌握相关基础性质.

6. 如图，点 P 是 $\angle BAC$ 平分线 AD 上的一点， $AC = 9$ ， $AB = 5$ ， $PB = 3$ ，则 PC 的长不可能是 ()



A. 4

B. 5

C. 6

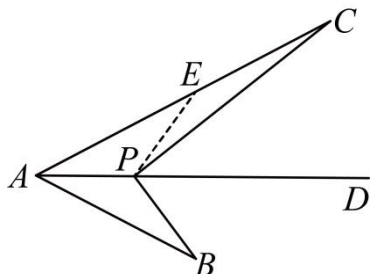
D. 7

【答案】D

【解析】

【分析】在 AC 上取 $AE = AB = 5$ ，然后证明 $\triangle AEP \cong \triangle ABP$ ，根据全等三角形对应边相等得到 $PE = PB = 3$ ，再根据三角形的任意两边之差小于第三边和任意两边之和大于第三边即可求解。

【详解】解：在 AC 上截取 $AE = AB = 5$ ，连接 PE ，



$$\because AC = 9,$$

$$\therefore CE = AC - AE = 9 - 5 = 4,$$

$\because$ 点 P 是 $\angle BAC$ 平分线 AD 上的一点，

$$\therefore \angle CAD = \angle BAD,$$

在 $\triangle APE$ 和 $\triangle APB$ 中，

$$\begin{cases} AE = AB \\ \angle CAP = \angle BAD, \\ AP = AP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle APE \cong \triangle APB \text{ (SAS)},$$

$$\therefore PE = PB = 3,$$

$$\because 4 - 3 < PC < 4 + 3,$$

解得 $1 < PC < 7$ ，

$\therefore PC$ 不可能为 7，

故选：D.

【点睛】本题主要考查了全等三角形的判定与性质、三角形的三边关系，通过作辅助线构造全等三角形是解题的关键。

二、填空题

7. 已知 $f(x) = \frac{6}{x-1}$ ，那么 $f(\sqrt{3}) =$ _____.

【答案】 $3\sqrt{3} + 3$

【解析】

【分析】将 $x = \sqrt{3}$ 代入 $f(x) = \frac{6}{x-1}$, 求解即可.

【详解】解: 将 $x = \sqrt{3}$ 代入 $f(x) = \frac{6}{x-1}$ 可得:

$$f(\sqrt{3}) = \frac{6}{\sqrt{3}-1} = \frac{6(\sqrt{3}+1)}{2} = 3\sqrt{3}+3,$$

故答案为: $3\sqrt{3}+3$

【点睛】此题考查了二次根式的运算, 解题的关键是熟练掌握二次根式的运算法则.

8. 化简: $\sqrt{a^2} + (\sqrt{-a})^2 =$ _____.

【答案】 $-2a$

【解析】

【分析】根据题意可得 $a \leq 0$, 由此判断即可.

【详解】解: 根据题意可得 $-a \geq 0$, 则 $a \leq 0$

$$\sqrt{a^2} + (\sqrt{-a})^2 = -a + (-a) = -2a,$$

故答案为: $-2a$

【点睛】此题考查了二次根式的性质, 解题的关键是根据二次根式的性质判断出 $a \leq 0$.

9. 在实数范围内因式分解: $3x^2 + 3x - 1 =$ _____.

【答案】 $3\left(x + \frac{3-\sqrt{21}}{6}\right)\left(x + \frac{3+\sqrt{21}}{6}\right)$

【解析】

【分析】求得方程 $3x^2 + 3x - 1 = 0$ 的两个根, 即可求解.

【详解】解: $3x^2 + 3x - 1 = 0$

$$a = 3, \quad b = 3, \quad c = -1,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 3 \times (-1) = 21 > 0,$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6},$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{6}, \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{6}$$

$$3x^2 + 3x - 1 = 3\left(x - \frac{-3 + \sqrt{21}}{6}\right)\left(x - \frac{-3 - \sqrt{21}}{6}\right) = 3\left(x + \frac{3 - \sqrt{21}}{6}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{21}}{6}\right),$$

故答案为: $3\left(x + \frac{3-\sqrt{21}}{6}\right)\left(x + \frac{3+\sqrt{21}}{6}\right)$

【点睛】此题考查了因式分解, 涉及了公式法求解一元二次方程, 解题的关键是正确求得一元二次方程的两个根.

10. 函数 $y = \frac{x}{\sqrt{3x+1}}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x > -\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】根据二次根式的被开方数不小于零, 分母不为零即可求解.

【详解】由题意得: $3x+1 > 0$

解得: $x > -\frac{1}{3}$

故答案为: $x > -\frac{1}{3}$.

【点睛】考查了函数自变量的取值范围, 自变量的取值范围必须使含有自变量的表达式都有意义.

11. 某公司 5 月份的营业额为 25 万, 7 月份的营业额为 36 万, 已知 6、7 月的增长率相同, 则增长率为_____.

【答案】 20%

【解析】

【分析】根据该公司 6、7 两个月营业额的月均增长率为 x , 结合 5 月、7 月营业额即可得出关于 x 的一元二次方程, 解此方程即可得解.

【详解】解: 设该公司 6、7 两个月营业额的月均增长率为 x , 根据题意得,

$$25(1+x)^2 = 36$$

解得, $x_1 = 0.2, x_2 = -2.2$ (舍去)

所以, 增长率为 20%

故答案为: 20%

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程, 根据数量关系列出关于 x 的一元二次方程是解题的关键.

12. 已知关于 x 的方程 $mx^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < 1$ 且 $m \neq 0$

【解析】

【分析】由二次项系数非零及根的判别式 $\Delta > 0$, 即可得出关于 m 的一元一次不等式组, 解之即可得出 m 的

取值范围.

【详解】 $\because$ 关于 x 的方程 $mx^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (-2)^2 - 4m > 0 \end{cases},$$

解得: $m < 1$ 且 $m \neq 0$.

故答案为: $m < 1$ 且 $m \neq 0$.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式, 但要注意二次项系数非零.

13. 直角三角形斜边上的高与中线分别是 5cm 和 7cm, 则它的面积是_____ cm^2 .

【答案】35

【解析】

【详解】已知直角三角形斜边上的中线 7cm, 根据直角三角形斜边的中线等于斜边的一半可得斜边 $= 2 \times 7 = 14\text{cm}$, 所以直角三角形的面积 $= \frac{1}{2} \times 14 \times 5 = 35\text{cm}^2$.

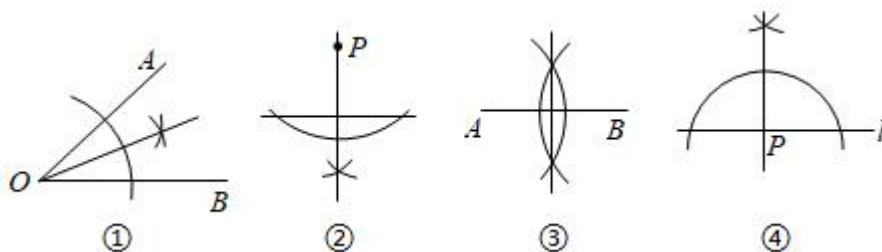
14. 尺规作图要求:

a、过直线外一点作这条直线的垂线;

b、作线段的垂直平分线;

c、过直线上一点作这条直线的垂线;

d、作角的平分线.



其中与 a、b、c、d 四个作图要求依次对应的图形是_____. (填序号)

【答案】②③④①

【解析】

【分析】根据基本作图进行判断.

【详解】解: a, 过直线外一点作这条直线的垂线, 如图②;

b, 作线段的垂直平分线, 如图③;

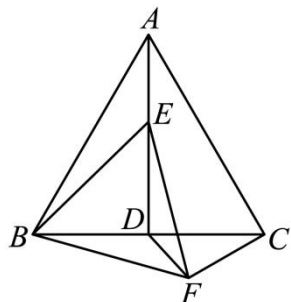
c, 过直线上一点作这条直线的垂线, 如图④;

d, 作角的平分线. 如图①.

故答案为：②③④①.

【点睛】本题考查了作图-复杂作图：复杂作图是在五种基本作图的基础上进行作图，一般是结合了几何图形的性质和基本作图方法．解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质，结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图，逐步操作．也考查了线段垂直平分线的性质．

15. 如图，等边 $\triangle ABC$ 中，点 E 为高 AD 上的一动点；以 BE 为边作等边 $\triangle BEF$ ，连接 DF ， E ，则 $\angle BCF =$ _____.



【答案】 30° ## 30 度

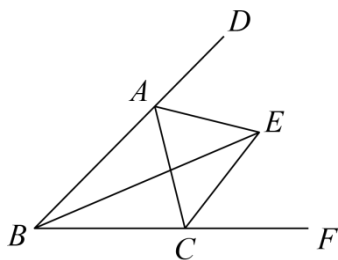
【解析】

【分析】通过 SAS 证明 $\triangle ABE \cong \triangle CBF$ ，即可求解．

【详解】解：在等边 $\triangle ABC$ 中， AD 为高，
则 $AB = BC$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle BAE = 30^\circ$ ，
在等边 $\triangle BEF$ 中， $BE = BF$ ， $\angle EBF = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABE = \angle CBF$ ，
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBF$ (SAS)，
 $\therefore \angle BAE = \angle BCF = 30^\circ$
故答案为： 30° .

【点睛】此题考查了全等三角形的判定与性质，等边三角形的性质，解题的关键是熟练掌握相关基础性质．

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 50^\circ$ ，三角形的两个外角 $\angle DAC$ 和 $\angle ACF$ 的平分线交于点 E ，则 $\angle ABE =$ _____ 度.

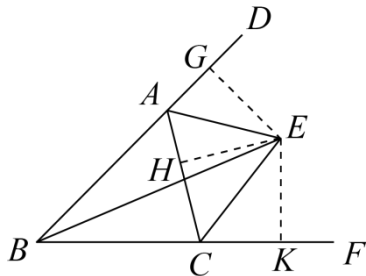


【答案】 25

【解析】

【分析】根据题意过点 E 作 $\triangle ABC$ 三边的垂线段 EG, EH, EK ，根据角平分线的性质可得， $EG = EK$ ，进而判定 BE 是 $\angle ABC$ 的角平分线，根据角平分线的定义即可求得 $\angle ABE$ 。

【详解】解：如图，过点 E 作 $\triangle ABC$ 三边的垂线段 EG, EH, EK ，



$\therefore$ 三角形的两个外角 $\angle DAC$ 和 $\angle ACF$ 的平分线交于点 E

$$\therefore EG = EH, EH = EK$$

$$\therefore EG = EK$$

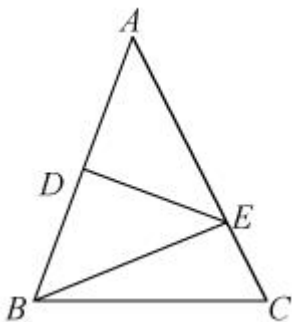
$\therefore E$ 在 $\angle ABC$ 的角平分线上，即 BE 是 $\angle ABC$ 的角平分线

$$\therefore \angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABC = 25^\circ$$

故答案为：25

【点睛】本题考查了角平分线的性质与判定，证明 BE 是 $\angle ABC$ 的角平分线是解题的关键。

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AB 的垂直平分线 DE 与边 AB ， AC 交于点 D ， E ，已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCE$ 的周长分别是 26cm 和 14cm，则 BD 的长为_____cm。



【答案】6

【解析】

【分析】由题意可得 $AE = BE$ ， $AD = BD$ ，再根据 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCE$ 的周长分别是 26cm 和 14cm，求得 AB ，即可求解。

【详解】解： $\because DE$ 垂直平分线 AB ，

$$\therefore AE = BE, AD = BD,$$

$\triangle ABC$ 与 $\triangle BCE$ 的周长分别是 26cm 和 14cm,

$$\text{即 } AB + AE + EC + BC = 26\text{cm}, BE + CE + BC = 14\text{cm}$$

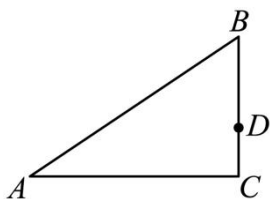
$$\therefore AB = 12\text{cm},$$

$$BD = \frac{1}{2}AB = 6\text{cm},$$

故答案为: 6

【点睛】此题考查了线段垂直平分线的性质, 解题的关键是掌握线段垂直平分线的性质.

18. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 55^\circ$, 点 D 在边 BC 上, $BD = 2CD$. 把 $\triangle ABC$ 绕着点 D 逆时针旋转 m ($0 < m < 180$) 度后, 如果点 B 恰好落在初始 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的边上, 那么 $m =$ _____.

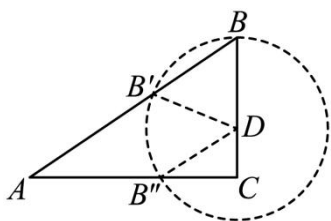


【答案】 70° 或 120°

【解析】

【分析】本题可以图形的旋转问题转化为点 B 绕 D 点逆时针旋转的问题, 故可以 D 点为圆心, DB 长为半径画弧, 第一次与原三角形交于斜边 AB 上的一点 B' , 交直角边 AC 于 B'' , 此时 $DB' = DB$, $DB'' = DB = 2CD$, 由等腰三角形的性质求旋转角 $\angle BDB'$ 的度数, 在 $\text{Rt}\triangle B''CD$ 中, 解直角三角形求 $\angle CDB''$, 可得旋转角 $\angle BDB''$ 的度数.

【详解】解: 如图, 在线段 AB 取一点 B' , 使 $DB = DB'$, 在线段 AC 上取一点 B'' , 使 $DB = DB''$,



$$\textcircled{1} \text{ 旋转角 } m = \angle BDB' = 180^\circ - \angle DB'B - \angle B = 180^\circ - 2\angle B = 70^\circ,$$

$$\textcircled{2} \text{ 在 } \text{Rt}\triangle B''CD \text{ 中},$$

$$\because DB'' = DB = 2CD,$$

$$\therefore \angle CDB'' = 60^\circ,$$

$$\text{旋转角 } \angle BDB'' = 180^\circ - \angle CDB'' = 120^\circ.$$

故答案为: 70° 或 120° .

【点睛】本题考查了旋转的性质, 关键是将图形的旋转转化为点的旋转, 求旋转角.

三、简答题

19. 计算: $2\sqrt{\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{8} + \sqrt{8\frac{1}{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + 27^{\frac{1}{3}}$.

【答案】 $3 - 3\sqrt{3}$

【解析】

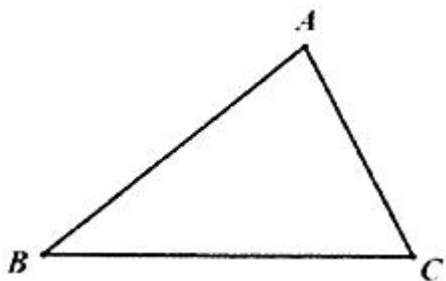
【分析】 根据二次根式的性质，二次根式的混合运算，分数指数幂进行计算即可求解.

【详解】 $2\sqrt{\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{8} + \sqrt{8\frac{1}{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + 27^{\frac{1}{3}}$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} - \left(2\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} + 3$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - \frac{5}{3}\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 3$$
$$= 3 - 3\sqrt{3}$$

【点睛】 本题考查了实数的混合运算，掌握二次根式的性质，二次根式的混合运算，分数指数幂是解题的关键.

20. 如图，已知 $\triangle ABC$.



(1) 根据要求作图：在边 BC 上求作一点 D ，使得点 D 到 AB 、 AC 的距离相等，在边 AB 上求作一点 E ，使得点 E 到点 A 、 D 的距离相等；（不需要写作法，但需要保留作图痕迹和结论）

(2) 在第 (1) 小题所作出的图中，求证： $DE \parallel AC$.

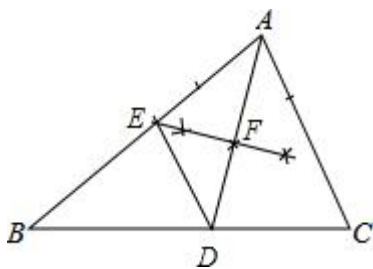
【答案】 (1) 作图见解析；(2) 证明见解析.

【解析】

【分析】 (1) 到 AB 、 AC 的距离相等，则点 D 在 $\angle BAC$ 的角平分线上，作 $\angle BAC$ 的角平分线与 BC 的交点即为点 D ；到点 A 、 D 的距离相等，则点 E 在 AD 的垂直平分线上，作 AD 的垂直平分线与 AB 的交点即为点 E ；

(2) 根据角平分线的性质和线段垂直平分线的性质可得 $\angle CAD = \angle ADE$ ，再根据平行线的判定即可求解.

【详解】 (1) 解： 如图所示：



(2) 证明: $\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线,

$\therefore \angle CAD = \angle BAD$,

$\because EF$ 是 AD 的中垂线,

$\therefore ED = EA$,

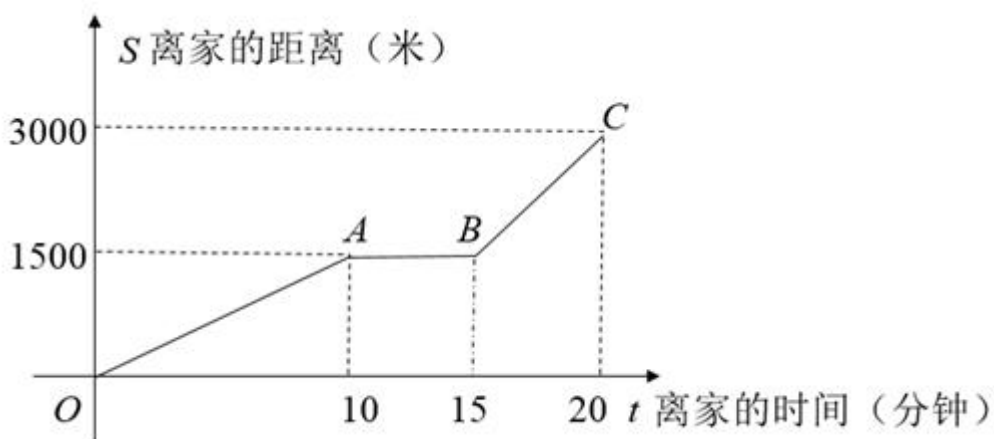
$\therefore \angle ADE = \angle BAD$,

$\therefore \angle CAD = \angle ADE$,

$\therefore DE \parallel AC$.

【点睛】 本题考查了角平分线的性质、垂直平分线的性质、等腰三角形的定义和性质、以及两条直线平行的判定定理, 判定直线平行的常用方法有: (1) 同位角相等, 两直线平行; (2) 内错角相等, 两直线平行; (3) 同旁内角互补, 两直线平行.

21. 初二年级小王同学坚持环保理念, 每天骑自行车上学, 学校离家 3000 米. 某天, 小王上学途中因自行车发生故障, 修车耽误了一段时间后继续骑行, 还是按时赶到了学校, 如图描述的是他离家的距离 S 和离家的时间 t 之间的函数图像, 根据图像解决下列问题:



(1) 修车时间为_____分钟;

(2) 到达学校时共用时间_____分钟;

(3) 小王从离家时到自行车发生故障时, 离家的距离 S 和离家的时间 t 之间的函数关系式为_____定义域为_____;

(4) 自行车故障排除后他的平均速度是每分钟_____米.

【答案】(1) 5 分钟；(2) 20 分钟；(3) $S = 150t$ ； $0 \leq x \leq 10$ ；(4) 300.

【解析】

【分析】(1) 线段 AB 表示修车时段，时间为 5 分钟；

(2) 根据 C 点横坐标为 20，得出到达学校时共用时间；

(3) 观察图象，获取有关信息：线段 OA 表示故障前行使情况：10 分钟行使了 1500 米；

(4) 根据线段 BC 表示修车后行使情况：5 分钟行使了 1500 米，即可求出行驶速度.

【详解】解：(1) 线段 AB 表示修车时段，时间为 5 分钟；

故答案为：5；

(2) 利用 C 点横坐标为 20，得出从家到学校用时 20 分钟；

故答案为：20；

(3) 由图象可知：小王从离家时到自行车发生故障时，10 分钟行使了 1500 米，故速度为 150 米/分，图象过原点，所以函数关系式为 $S = 150t$ ($0 \leq t \leq 10$)；

故答案为： $S = 150t$ ； $0 \leq t \leq 10$ ；

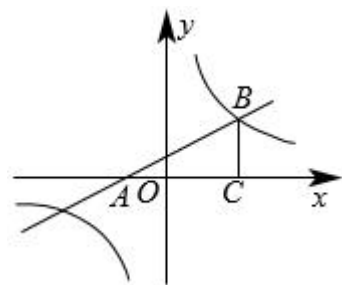
(4) 线段 BC 表示修车后行使情况：5 分钟行使了 1500 米，

故速度为 $1500 \div 5 = 300$ (米/分)；

故答案为：300.

【点睛】此题考查一次函数及其图象的应用，同学们要注意分析其中的“关键点”，还要善于分析各图象的变化趋势，能够从图象中获取相关信息是关键.

22. 已知，如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 与 x 轴交于点 A ，在第一象限内与反比例函数图像交于点 B ， BC 垂直于 x 轴，垂足为点 C ，且 $OC = 2AO$ ，设点 P 是该反比例函数图像上一点，若 $\triangle BCP$ 的面积是 6，求点 P 的坐标.



【答案】 $P\left(10, \frac{3}{10}\right)$ 或 $P\left(-6, -\frac{1}{2}\right)$

【解析】

【分析】设反比例函数为 $y = \frac{k}{x}$ ，根据题意求得点 C 、 B 的坐标，求得反比例函数的解析式 $y = \frac{3}{x}$ ，设 $P\left(t, \frac{3}{t}\right)$ ，

根据 $\triangle BCP$ 的面积是 6, 即可求解.

【详解】解: 设反比例函数为 $y = \frac{k}{x}$,

直线 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 与 x 轴交于点 A , 则 $A(-1, 0)$, $AO = 1$

由 $OC = 2AO = 2$ 可得 $C(2, 0)$,

$y = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 即 $B\left(2, \frac{3}{2}\right)$, $BC = \frac{3}{2}$

则 $k = 2 \times \frac{3}{2} = 3$, 即 $y = \frac{3}{x}$,

设 $P\left(t, \frac{3}{t}\right)$, P 到 BC 的距离为 $|t - 2|$,

由 $\triangle BCP$ 的面积是 6 可得 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times |t - 2| = 6$,

解得 $t = 10$ 或 $t = -6$,

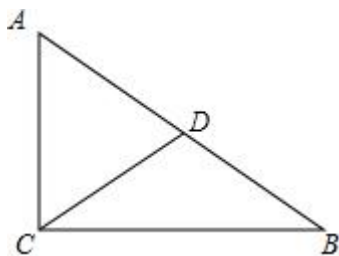
即 $P\left(10, \frac{3}{10}\right)$ 或 $P\left(-6, -\frac{1}{2}\right)$

【点睛】此题考查了反比例函数与一次函数的综合, 涉及了三角形面积, 解题的关键是熟练掌握一次函数和反比例函数的性质, 正确求得反比例函数的解析式.

23. 我们知道定理“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”, 这个定理的逆命题也是真命题.

(1) 请你写出这个定理的逆命题是_____;

(2) 下面我们来证明这个逆命题: 如图, CD 是 $\triangle ABC$ 的中线, $CD = \frac{1}{2}AB$. 求证: $\triangle ABC$ 为直角三角形. 请你写出证明过程.



【答案】(1) 如果一个三角形一边上的中线等于这条边的一半, 那么这个三角形是直角三角形; (2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 直接得出它的逆命题;

(2) 先判断出 $\angle A = \angle ACD$, $\angle B = \angle DCB$, 最后用三角形的内角和定理, 即可求出 $\angle A + \angle B = 90^\circ$, 即可得出结论.

【详解】解: (1) $\because$ “直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”,

$\therefore$ 它逆命题是: 如果一个三角形一边上的中线等于这条边的一半, 那么这个三角形是直角三角形,

故答案为: 如果一个三角形一边上的中线等于这条边的一半, 那么这个三角形是直角三角形;

(2) $\because$ CD 是 $\triangle ABC$ 的中线

$$\therefore AD = BD = \frac{1}{2} AB,$$

$$\because CD = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore AD = CD = BD$$

$$\therefore \angle A = \angle ACD, \angle B = \angle DCB,$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \angle A + \angle B + \angle ACD + \angle DCB = 180^\circ$$

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ,$$

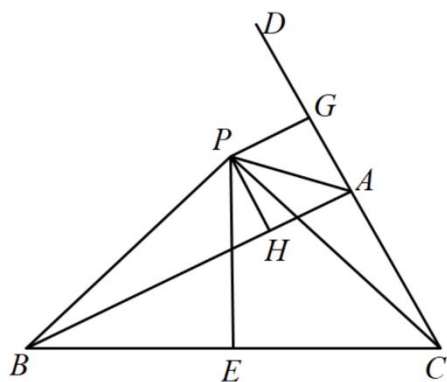
$$\therefore \angle ACB = \angle ACD + \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为直角三角形.}$$

【点睛】主要考查了直角三角形的性质, 等腰三角形的性质, 根据命题得出逆命题是解本题的关键.

四、解答题

24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, PE 垂直平分边 BC , 交 BC 于点 E , AP 平分 $\angle BAC$ 的外角 $\angle BAD$, $PG \perp AD$, 垂足为点 G , $PH \perp AB$, 垂足为点 H .



(1) 求证: $\angle PBH = \angle PCG$;

(2) 如果 $\angle BAC = 90^\circ$, 求证: 点 E 在 AP 的垂直平分线上.

【答案】(1) 见解析;

(2) 见解析.

【解析】

【分析】(1) 通过 HL 证明 $\triangle PHB \cong \triangle PGC$ ，即可求证；

(2) 通过四边形内角和的性质得到 $\angle HPG = 90^\circ$ ，从而得到 $\angle BPC = 90^\circ$ ，利用直角三角形斜边中线等于斜边一半即可求解。

【小问 1 详解】

证明： $\because PE$ 垂直平分边 BC ，

$$\therefore PB = PC,$$

$\because AP$ 平分 $\angle BAC$ 的外角 $\angle BAD$ ， $PG \perp AD$ ， $PH \perp AB$ ，

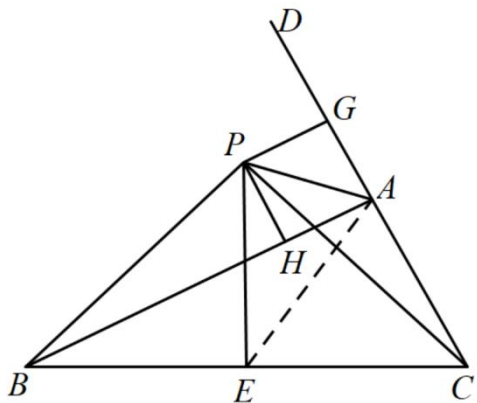
$$\therefore PH = PG, \angle PHB = \angle PGC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PHB \cong \triangle PGC (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle PBH = \angle PCG;$$

【小问 2 详解】

证明：连接 AE ，如下图：



由 (1) 可得 $\angle PHA = \angle PGA = 90^\circ$ ， $\angle BPH = \angle CPG$ ，

又 $\because \angle BAC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle HPG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BPC = \angle BPH + \angle HPC = \angle CPG + \angle HPC = \angle HPG = 90^\circ,$$

由题意可得：E 为 BC 的中点，

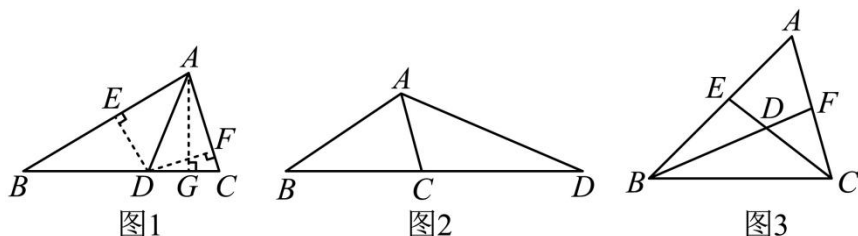
$$\therefore PE = \frac{1}{2}BC, \quad AE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore PE = AE,$$

$\therefore$ 点 E 在 AP 的垂直平分线上。

【点睛】此题考查了全等三角形的判定与性质，垂直平分线的性质，角平分线的性质，直角三角形的性质，解题的关键是熟练掌握相关基础性质。

25. 已知 $\triangle ABC$ ， AD 是一条角平分线。



(1) 【探究发现】如图1所示，若 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，可得到结论： $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ 。

小红的解法如下：

过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ， $DF \perp AC$ 于点 F ，过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G ，

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线，且 $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，

$\therefore$ _____，(_____)

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times DE}{\frac{1}{2} AC \times DF} = \frac{AB \times DE}{AC \times DF}, \because \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times AG}{\frac{1}{2} CD \times AG} = \frac{BD}{CD}, \therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

(2) 【类比探究】如图2所示，若 AD 是 $\angle BAC$ 的外角平分线， AD 与 BC 的延长线交于点 D 。

求证： $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

(3) 【拓展应用】如图3所示，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 60^\circ$ ， BF 、 CE 分别是 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的角平分线且相交于点 D ，若 $\frac{ED}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，直接写出 $\frac{FC}{BC}$ 的值是_____。

【答案】(1) $DE = DF$ ，角平分线的性质； $\frac{AB}{AC}$

(2) 见解析 (3) $2 - \sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据三角形的面积公式以及角平分线的性质求解即可；

(2) 过点 D 作 $DN \perp BA$ 于 N ，过点 D 作 $DM \perp AC$ 于 M 。过点 A 作 $AP \perp BD$ 于点 P 。利用角平分线的性质及等面积法证明即可；

(3) 在 BC 上取点 G ，使得 $BG = BE$ ，连接 DG ，先利用全等三角形的判定得出 $\triangle BDE \cong \triangle BDG$ ， $\triangle DCG \cong \triangle DCF$ 再由其性质及前面的结论求解即可。

【小问1详解】

解：过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ， $DF \perp AC$ 于点 F ，过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G ，

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线，且 $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，

$\therefore DE = DF$ (角平分线的性质)

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times DE}{\frac{1}{2}AC \times DF} = \frac{AB}{AC},$$

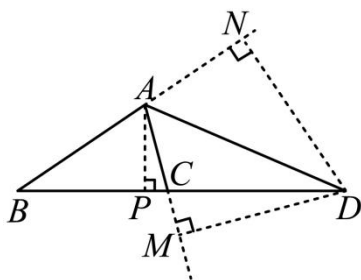
$$\text{又} \therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}BD \times AG}{\frac{1}{2}CD \times AG} = \frac{BD}{CD},$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD},$$

故答案为: $DE = EF$, 角平分线的性质; $\frac{AB}{AC}$;

【小问 2 详解】

证明: 过点 D 作 $DN \perp BA$ 于 N , 过点 D 作 $DM \perp AC$ 于 M . 过点 A 作 $AP \perp BD$ 于点 P .



$\therefore AD$ 平分 $\angle MAN$,

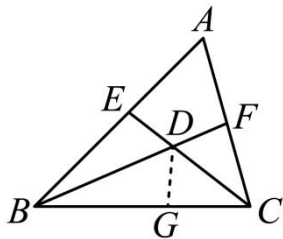
$\therefore DN = DM$.

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times DN}{\frac{1}{2}AC \times DM} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}BD \times AP}{\frac{1}{2}CD \times AP} = \frac{BD}{CD},$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD};$$

【小问 3 详解】

在 BC 上取点 G , 使得 $BG = BE$, 连接 DG ,



$\therefore BF$ 、 CE 分别是 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的角平分线且相交于点 D ,

$$\therefore \angle DBE = \angle DBG, \quad \angle DCG = \angle DCF, \quad \angle BDC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC - \frac{1}{2}\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$\therefore BD = BD$,

$$\therefore \triangle BDE \cong \triangle BDG,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle BDG = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDG = \angle CDG = 60^\circ,$$

$\therefore DG$ 是 $\angle BDC$ 的角平分线,

$$\therefore \angle CDF = 180^\circ - \angle BDC = 60^\circ,$$

在 $\triangle DCG$ 与 $\triangle DCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle CDF = \angle CDG \\ DC = DC \\ \angle DCG = \angle DCF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DCG \cong \triangle DCF,$$

$$\therefore FC = GC,$$

由 (1) 知, $\frac{DE}{DC} = \frac{BE}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2},$

设 $BE = x$, $BC = \sqrt{2}x$, 则 $BG = BE = x$, $FC = CG = BC - BG = (\sqrt{2} - 1)x$,

$$\therefore \frac{FC}{BC} = \frac{(\sqrt{2} - 1)x}{\sqrt{2}x} = 2 - \sqrt{2},$$

故答案为: $2 - \sqrt{2}$.

【点睛】题目主要考查角平分线的性质及全等三角形的判定和性质, 三角形等面积法等, 理解题意, 熟练掌握运算角平分线的性质是解题关键.

26. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 是直线 BC 上的一点 (不与点 B 、 C 重合), 以 AD 为腰右侧作等腰三角形 ADE , 且 $AD = AE$, $\angle BAC = \angle DAE$, 连接 CE .

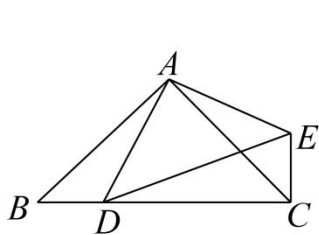


图 1

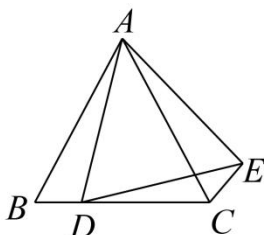


图 2

(1) 如图 1, 当点 D 在线段 BC 上,

①求证: $\triangle ABD \cong \triangle ACE$.

②设 $\angle BAC = x$, $\angle BCE = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出它的定义域.

(2) 当点 D 在直线 BC 上 (不与点 C 重合), 且 $\angle BAC = 40^\circ$, 如图 2, 直线 DE 与射线 AC 相交于点 F ,

$\triangle AEF$ 能否成为等腰三角形, 如果能, 请直接写出 $\angle ADC$ 的大小; 如果不能, 请说明理由.

【答案】(1) ①见解析; ② $y = 180^\circ - x$, $0^\circ < x < 180^\circ$;

(2) $\angle ADC$ 为 40° , 55° , 35° .

【解析】

【分析】(1) ①通过 SAS 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$, 即可; ②利用全等的性质可得 $\angle ACE = \angle B$, $\angle BCE = \angle ACB + \angle ACE = 2\angle B$, 即可求解;

(2) 分三种情况, 点 D 在点 B 的左边, 在线段 BC 上, 在 C 点的右边, 根据等腰三角形的性质, 分别求解即可.

【小问 1 详解】

①证明: $\because \angle BAC = \angle DAE$,

$$\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

又 $\because AB = AC$, $AD = AE$,

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS}),$$

②由①可得: $\angle ACE = \angle B$,

$$\therefore \angle BCE = \angle ACE + \angle ACB = \angle B + \angle ACB = 180^\circ - \angle BAC$$

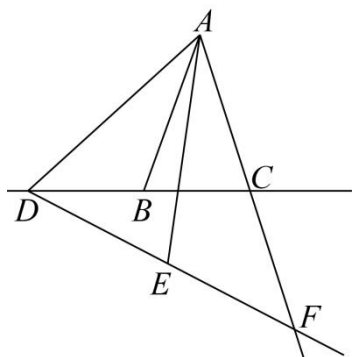
即 $y = 180^\circ - x$, $0^\circ < x < 180^\circ$

【小问 2 详解】

$$\because \angle BAC = \angle DAE = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \angle ADE = \angle AED = 70^\circ,$$

当点 D 在点 B 的左边, 如下图:



则 $\angle AEF = 110^\circ$,

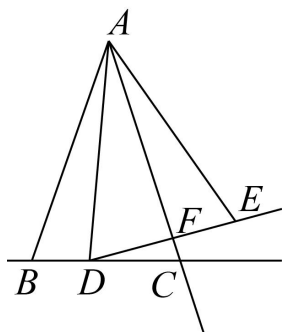
$\triangle AEF$ 为等腰三角形, 只有 $AE = EF$ 一种情况,

此时 $\angle EAF = \angle AFE = 35^\circ$,

$$\therefore \angle DAC = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle DAC - \angle ACD = 35^\circ$$

在线段 BC 上, 如下图:



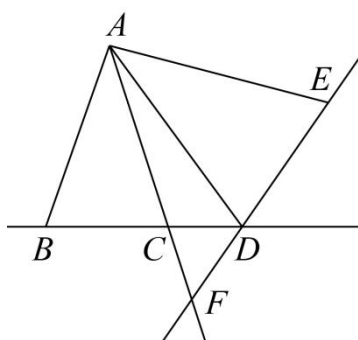
显然 AE 不可能等于 AF ,

若 $AE = EF$, 则 $\angle AFE = \angle EAF = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 70^\circ) = 55^\circ < 70^\circ$, 与 $\angle AFE = \angle ADF + \angle DAF > 70^\circ$ 矛盾, 舍去

盾, 舍去

若 $AF = FE$, 则 $\angle FAE = \angle FEA = 70^\circ > 40^\circ$ 与 $\angle FAE < 40^\circ$ 矛盾, 舍去

在 C 点的右边, 如下图:



显然 $AE \neq AF$,

当 $AE = EF$ 时, $\angle AFE = \angle EAF = 55^\circ$,

$$\therefore \angle CAD = \angle EAF - \angle EAD = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = 180^\circ - \angle BAD - \angle B = 55^\circ,$$

当 $FA = FE$ 时, $\angle FAE = \angle AEF = 70^\circ$,

$$\therefore \angle CAD = \angle EAF - \angle EAD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = 180^\circ - \angle BAD - \angle B = 40^\circ,$$

综上, $\angle ADC$ 为 40° , 55° , 35° .

【点睛】此题考查了全等三角形的判定与性质, 等腰三角形的性质, 解题的关键是熟练掌握相关基础性质,

利用分类讨论的思想求解问题.