

八年级数学

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列二次根式中, 属于最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{18}$

B. $\sqrt{\frac{x}{3}}$

C. $\sqrt{a^2 - b^2}$

D. $\sqrt{a^4 + a^6}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 将各选项化简, 不能化简的即为答案.

【详解】 因为 $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, 所以 A 不符合题意;

因为 $\sqrt{\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{3x}}{3}$, 所以 B 不符合题意;

因为 $\sqrt{a^2 - b^2}$ 不能化简, 所以 C 符合题意;

因为 $\sqrt{a^4 + a^6} = \sqrt{a^4(1 + a^2)} = a^2\sqrt{1 + a^2}$, 所以 D 不符合题意.

故选: C.

【点睛】 本题主要考查了最简二次根式, 即被开方数中不含能被开方的数或式子.

2. 下列各式运算正确的是 ()

A. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$

B. $\sqrt{(-4) \cdot (-9)} = \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = (-2) \cdot (-3) = 6$

C. $(2\sqrt{10} - \sqrt{5}) \div \sqrt{5} = 2\sqrt{2} - 1$

D. $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{5^2} - \sqrt{4^2} = 1$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据二次根式的相关运算法则进行计算作出判断即可.

【详解】 解: A. $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式, 不能合并, 故选项错误, 不符合题意;

B. $\sqrt{(-4) \cdot (-9)} = \sqrt{36} = 6$, 故选项错误, 不符合题意;

C. $(2\sqrt{10} - \sqrt{5}) \div \sqrt{5} = 2\sqrt{2} - 1$, 故选项正确, 符合题意;

D. $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$, 故选项错误, 不符合题意.

故选：C.

【点睛】此题考查了二次根式，熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

3. 方程 $x^2 + 6x - 9 = 0$ 的根的情况是 ()

- A. 有两个相等的实数根
- B. 有两个不相等的实数根
- C. 有一个根为 -1
- D. 没有实数根

【答案】B

【解析】

【分析】利用根的判别式可求得答案.

【详解】 $\because a = 1, b = 6, c = -9,$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 36 + 36 > 0,$$

$\therefore$ 该方程有两个不相等的实数根,

故选：B.

【点睛】本题主要考查了根的判别式，掌握方程根的情况与根的判别式的关系是解题的关键.

4. 下列问题中，两个变量成正比例的是 ()

- A. 等腰三角形的面积一定，它的底边和底边上的高
- B. 等边三角形的面积和它的边长
- C. 长方形的一边长确定，它的周长与另一边长
- D. 长方形的一边长确定，它的面积与另一边长

【答案】D

【解析】

【详解】试题解析：A. 等腰三角形的面积一定，它的底边和底边上的高成反比例，故本选项错误；

B. 等边三角形的面积是它的边长的二次函数，故本选项错误；

C. 长方形的一边长确定，它的周长与另一边长成一次函数，故本选项错误；

D. 长方形的一边长确定，它的面积与另一边长成正比例，故本选项正确.

故选 D.

5. 下列命题中，逆命题是假命题的是 ()

- A. 等边三角形的三个内角都等于 60°
- B. 如果两个三角形全等，那么这两个三角形的对应角相等
- C. 如果两个三角形全等，那么这两个三角形的对应边相等
- D. 相等的两个角是对顶角

【答案】B

【解析】

【分析】先分别确定各命题的逆命题，再判断真假即可.

【详解】A 选项的逆命题是“三个内角都等于 60° 的是等边三角形”，是真命题，所以不符合题意；

B 选项的逆命题是“如果两个三角形的对应角都相等，那么这两个三角形全等”，可知这两个三角形不一定全等，是假命题，所以符合题意；

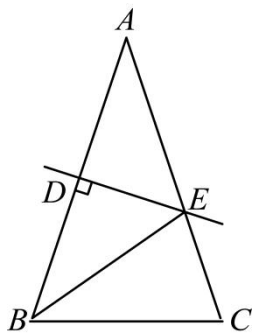
C 选项的逆命题是“如果两个三角形的对应边都相等，那么这两个三角形全等”，根据“SSS”可知两个三角形全等，是真命题，所以符合题意；

D 选项的逆命题是“对顶角相等”，是真命题，所以不符合题意.

故选：B.

【点睛】本题主要考查了逆命题，真假命题的判断，掌握性质定理及逆定理是解题的关键.

6. 如图，等腰三角形 ABC 的周长为 21，底边 $BC=5$ ， AB 的垂直平分线 DE 交 AB 于点 D ，交 AC 于点 E ，则 $\triangle BEC$ 的周长为（）



A. 13

B. 14

C. 15

D. 16

【答案】A

【解析】

【分析】根据题干信息可知，本题考查线段垂直平分线的性质和等腰三角形的性质，根据线段垂直平分线的性质与等腰三角形的性质，通过线段间的等量代换即可求解.

【详解】 $\because \triangle ABC$ 为等腰三角形，

$\therefore AB=AC$,

$\because BC=5$,

$\therefore 2AB=2AC=21-5=16$ ，即 $AB=AC=8$ ，

而 DE 是线段 AB 的垂直平分线，

$\therefore BE=AE$ ，故 $BE+EC=AE+EC=AC=8$ ，

$\therefore \triangle BEC$ 的周长 $=BC+BE+EC=5+8=13$ ，

故选 A.

【点睛】 本题考查线段垂直平分线的性质，等腰三角形的性质.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分)

7. 计算: $2\sqrt{3} \times (-\sqrt{6}) =$ _____.

【答案】 $-6\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的乘法法则求出即可.

【详解】 $2\sqrt{3} \times (-\sqrt{6})$
 $= -2\sqrt{3 \times 6}$
 $= -6\sqrt{2},$

故答案为 $-6\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了二次根式的乘法法则，能正确运用法则进行计算是解此题的关键，注意：结果化成最简根式.

8. 不等式 $\sqrt{3}x < \sqrt{2}x + 1$ 的解集是 _____.

【答案】 $x < \sqrt{3} + \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 先将不等式移项合并同类项得 $(\sqrt{3} - \sqrt{2})x < 1$ ，再系数化为 1 即可得.

【详解】 移项，得 $\sqrt{3}x - \sqrt{2}x < 1$,

合并同类项，得 $(\sqrt{3} - \sqrt{2})x < 1$,

系数化为 1 得， $x < \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \sqrt{3} + \sqrt{2},$

故不等式的解集是 $x < \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了一元一次不等式的解法，一般步骤包括：去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1.

9. 一元二次方程 $(x - 5)^2 = x - 5$ 的解为 _____.

【答案】 $x_1 = 5, x_2 = 6.$

【解析】

【分析】先移项得到 $(x-5)^2 - (x-5) = 0$ ，然后利用因式分解法解方程.

【详解】 $\because (x-5)^2 - (x-5) = 0$,

$\therefore (x-5)(x-6) = 0$,

则 $x-5=0$ 或 $x-6=0$,

解得 $x_1=5$, $x_2=6$,

故答案为 $x_1=5$, $x_2=6$.

【点睛】本题考查了解一元二次方程-因式分解法：因式分解法就是先把方程的右边化为0，再把左边通过因式分解化为两个一次因式的积的形式，那么这两个因式至少有一个为0，这就将问题转化为求两个一元一次方程的解，也就把原方程进行了降次，把解一元二次方程转化为解一元一次方程的问题了（数学转化思想）.

10. 在实数范围内分解因式： $x^2 - 2x - 2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$

【解析】

【分析】可将 x^2-2x 先配成一个完全平方式，再应用平方差公式进行分解即可.

【详解】原式 $= (x-1)^2 - 3$

$$= (x-1+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{3})$$

故填： $(x-1+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{3})$

【点睛】本题考查配方法的应用，用平方差公式因式分解.能想到分组因式分解是解决此题的关键.

11. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ，那么 $f(\sqrt{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{2}-1$

【解析】

【分析】根据函数的解析式，根据已知自变量的值求函数值即可，然后分母有理化.

【详解】解： $\because f(x) = \frac{1}{x+1}$

$$\therefore f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$

故答案为： $\sqrt{2}-1$

【点睛】本题考查了函数的定义，根据自变量的值，求函数值，分母有理化，理解函数的表示方法是解题的关键.

12. 为了降低药品的价格, 物价部门对原价是 a 元的某药品, 连续两次以相同的百分率 x 降价, 那么两次降价后的价格为 _____ 元 (用含 a 和 x 的代数式表示).

【答案】 $a(1-x)^2$

【解析】

【分析】 利用代数式先表示出第一次降价后的价格, 再在第一次的基础上表示出第二次降价后的价格, 整理后即可得出结论.

【详解】 解: 第一次降价后的价格为: $a(1-x)$ 元,

则第二次降价后的价格为: $a(1-x)(1-x) = a(1-x)^2$ 元,

故答案为: $a(1-x)^2$.

【点睛】 本题主要考查增长率问题, 利用已知条件表示出第一次降价后价格是解题的关键.

13. 如果正比例函数 $y = (m-3)x$ 中, y 的值随自变量 x 的增大而减小, 那么实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < 3$

【解析】

【分析】 根据正比例函数图象的增减性性质与系数的关系, 即正比例函数 $y=kx$ 中, y 随 x 的增大而增大, 则 $k > 0$; 正比例函数 $y=kx$ 中, y 随 x 的增大而减小, 则 $k < 0$, 列式解答.

【详解】 解: $\because$ 正比例函数 $y = (m-3)x$ 中, y 的值随自变量 x 的增大而减小,

$\therefore m-3 < 0$,

$\therefore m < 3$.

故答案为: $m < 3$

【点睛】 本题考查正比例函数图象的增减性性质与系数 k 的关系, 根据性质得出数量关系是解答此题的关键.

14. “两直线平行, 内错角相等”的逆命题是_____.

【答案】 内错角相等, 两直线平行

【解析】

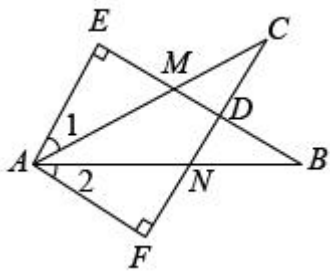
【详解】 解: “两直线平行, 内错角相等”的条件是: 两条平行线被第三条直线所截, 结论是: 内错角相等.

将条件和结论互换得逆命题为: 两条直线被第三条直线所截, 如果内错角相等, 那么这两条直线平行, 可简说成 “内错角相等, 两直线平行”.

故答案为: 内错角相等, 两直线平行.

15. 如图, $\angle E = \angle F = 90^\circ$, $\angle B = \angle C$, $AE = AF$. 给出下列结论: ① $\angle 1 = \angle 2$; ② $BE = CF$; ③ $\triangle ACN \cong \triangle ABM$;

④ $CD=DN$. 其中符合题意结论的序号是_____.



【答案】①②③

【解析】

【分析】此题考查的是全等三角形的判定和性质的应用，只要先找出图中的全等三角形就可判断题中结论是否正确.

【详解】 $\because \angle E = \angle F = 90^\circ$, $\angle B = \angle C$, $AE = AF$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF$ (AAS),

$\therefore AC = AB$, $BE = CF$, 即结论②正确;

$\because AC = AB$, $\angle B = \angle C$, $\angle CAN = \angle BAM$,

$\therefore \triangle ACN \cong \triangle ABM$ (ASA), 即结论③正确;

$\therefore \angle BAE = \angle CAF$,

$\therefore \angle 1 = \angle BAE - \angle BAC$, $\angle 2 = \angle CAF - \angle BAC$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$, 即结论①正确;

$\therefore \triangle AEM \cong \triangle AFN$ (ASA),

$\therefore AM = AN$,

$\therefore CM = BN$,

$\because \angle CDM = \angle BDN$, $\angle C = \angle B$,

$\therefore \triangle CDM \cong \triangle BDN$,

$\therefore CD = BD$,

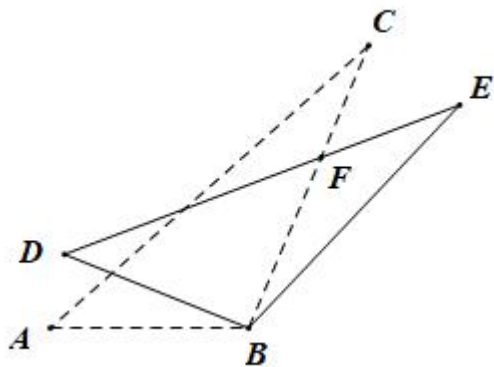
无法判断 $CD = DN$, 故④错误,

$\therefore$ 题中正确的结论应该是①②③.

故答案为: ①②③.

【点睛】此题考查了三角形全等的判定和性质; 对图中的全等三角形作出正确判断是正确解答本题的关键.

16. 如图, 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 22° 得 $\triangle DBE$, 若 $\angle C = 28^\circ$, DE 边与 BC 边交于点 F , 则 $\angle CFE$ = _____ 度.



【答案】 50

【解析】

【分析】 根据题意可知旋转角 $\angle CBE = 22^\circ$ ，再根据旋转的性质可知 $\angle E = \angle C = 28^\circ$ ，然后根据三角形的外角的性质得出答案.

【详解】 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 22° 得 $\triangle DBE$ ，

$$\therefore \angle CBE = 22^\circ.$$

$$\because \angle C = 28^\circ,$$

$$\therefore \angle E = \angle C = 28^\circ.$$

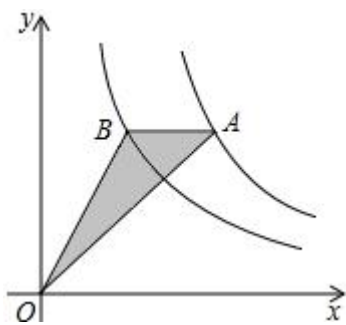
$\because \angle CFE$ 是 $\triangle BEF$ 的外角，

$$\therefore \angle CFE = \angle CBE + \angle E = 22^\circ + 28^\circ = 50^\circ.$$

故答案为：50.

【点睛】 本题主要考查了旋转的性质，三角形外角的性质等，确定旋转角是解题的关键. 即对应点和旋转中心连线的夹角是旋转角.

17. 如图，是反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ 和 $y = \frac{k_2}{x} (k_1 > k_2)$ 在第一象限的图象，直线 AB 平行于 x 轴，并分别交两条曲线于 A 、 B 两点，若 $S_{\triangle AOB} = 4$ ，则 $k_1 - k_2$ 的值是_____.



【答案】 8

【解析】

【分析】由 $k_1 > k_2$ 知，点 A 在 $y = \frac{k_1}{x}$ 上，点 B 在 $y = \frac{k_2}{x}$ 上，因直线 AB 平行于 x 轴，则点 A 和点 B 的纵

坐标相等，设 A 和 B 坐标为 $A(x_1, y), B(x_2, y)$ ，则有
$$\begin{cases} y = \frac{k_1}{x_1} \\ y = \frac{k_2}{x_2} \end{cases}$$
 可得 $\frac{k_1}{x_1} = \frac{k_2}{x_2}$ ，又根据 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)y = 4$ ，

将 $y = \frac{k_1}{x_1}$ 代入即可得 $\frac{x_1 - x_2}{2} \cdot \frac{k_1}{x_1} = 4$ ，联立上面的式子即可得。

【详解】 $\because k_1 > k_2$ ，则点 A 在 $y = \frac{k_1}{x}$ 上，点 B 在 $y = \frac{k_2}{x}$ 上，

又因直线 AB 平行于 x 轴，

$\therefore$ 点 A 和点 B 的纵坐标相等，因此可设 A 和 B 坐标为 $A(x_1, y), B(x_2, y)$ ，

则有
$$\begin{cases} y = \frac{k_1}{x_1} \\ y = \frac{k_2}{x_2} \end{cases}$$
，即 $\frac{k_1}{x_1} = \frac{k_2}{x_2}$ ，可化为 $\frac{x_2}{x_1} = \frac{k_2}{k_1}$ ，

根据图可得 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|AB|y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)y = 4$ ，

将 $y = \frac{k_1}{x_1}$ 代入即可得 $\frac{x_1 - x_2}{2} \cdot \frac{k_1}{x_1} = 4$ ，

$$\therefore \frac{k_1}{2} \cdot (1 - \frac{x_2}{x_1}) = 4$$

将 $\frac{x_2}{x_1} = \frac{k_2}{k_1}$ 代入得 $\frac{k_1}{2} \cdot (1 - \frac{k_2}{k_1}) = 4$

$$\text{即 } \frac{k_1}{2} \cdot \frac{k_1 - k_2}{k_1} = 4$$

可得 $k_1 - k_2 = 8$ 。

【点睛】本题考查了反比例函数的图象和性质，并结合三角形的面积，判断出 A、B 点具体在哪条反比例函数上和 A、B 点的纵坐标相等是解题关键。

18. 在 $\triangle ABC$ 中，AB、AC 的垂直平分线分别交 BC 于 D、E， $\angle DAE = 20^\circ$ ，则 $\angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。

【答案】80 或 100。

【解析】

【分析】根据线段的垂直平分线的性质得到 $DA = DB$ ， $EA = EC$ ，根据等腰三角形的性质得到 $\angle DAB = \angle B$ ，

$\angle EAC = \angle C$ ，根据三角形内角和定理分两种情形分别计算即可．

【详解】解：如图 1，

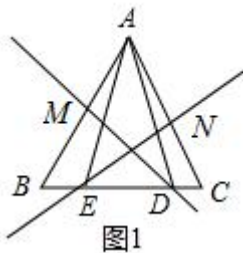


图1

$\because DM, EN$ 分别垂直平分 AB 和 AC ,

$\therefore DA = DB, EA = EC$,

$\therefore \angle DAB = \angle B, \angle EAC = \angle C$,

$\angle DAB + \angle B + \angle EAC + \angle C - \angle DAE = 180^\circ$,

则 $2(\angle B + \angle C) = 200^\circ$,

解得, $\angle B + \angle C = 100^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 80^\circ$,

如图 2 中,

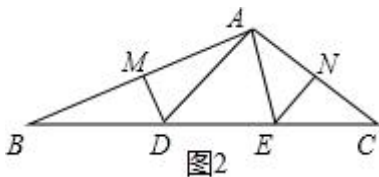


图2

$\because DM, EN$ 分别垂直平分 AB 和 AC ,

$\therefore DA = DB, EA = EC$,

$\therefore \angle DAB = \angle B, \angle EAC = \angle C$,

$\angle DAB + \angle B + \angle EAC + \angle C + \angle DAE = 180^\circ$,

则 $2(\angle B + \angle C) = 160^\circ$,

解得, $\angle B + \angle C = 80^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 100^\circ$,

故答案为: 80 或 100.

【点睛】 本题考查的是线段的垂直平分线的性质, 掌握线段的垂直平分线上的点到线段的两个端点的距离相等是解题的关键.

三、简答题 (本大题共 4 大题, 每题 6 分, 满分 24 分)

19. 计算: $\sqrt{27x} - 3\sqrt{\frac{x}{3}} + 2x\sqrt{\frac{3}{x}}$.

【答案】 $4\sqrt{3x}$

【解析】

【分析】 把二次根式化简成最简二次根式后，再合并即可.

【详解】 解：原式 $= 3\sqrt{3x} - \sqrt{3x} + 2\sqrt{3x}$
 $= 4\sqrt{3x}$

【点睛】 此题考查了二次根式的加减法，熟练掌握运算法则是解题的关键.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx - 2 = 0 \dots \textcircled{1}$

(1) 若 $x = -1$ 是方程 $\textcircled{1}$ 的一个根，求 m 的值和方程 $\textcircled{1}$ 的另一根；

(2) 对于任意实数 m ，判断方程 $\textcircled{1}$ 的根的情况，并说明理由.

【答案】 (1) $m=1$ ，方程的另一根为 $x=2$ ；(2) 方程总有两个不等的实数根，理由见解析.

【解析】

【分析】 (1) 直接把 $x=-1$ 代入方程即可求得 m 的值，然后解方程即可求得方程的另一个根；

(2) 利用一元二次方程根的情况可以转化为判别式 Δ 与 0 的关系进行判断.

【详解】 解：(1) 把 $x=-1$ 代入得 $1+m-2=0$ ，解得 $m=1$ ，

$$\therefore x^2 - x - 2 = 0.$$

解得， $x_1 = 2, x_2 = -1$

$\therefore$ 另一根是 2；

$$(2) \because b^2 - 4ac = m^2 - 4 \times (-2) = m^2 + 8 > 0,$$

$\therefore$ 方程 $\textcircled{1}$ 有两个不相等的实数根.

【点睛】 本题考查的是根的判别式，一元二次方程的解的定义，解一元二次方程；解答本题的关键是熟练掌握一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系和熟练地解方程.

21. 先化简： $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \sqrt{ab}$ ，再求当 $a = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ， $b = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ 时的值.

【答案】 原式 $= ab$ ，当 $a = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ， $b = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ 时，原式 $= 1$

【解析】

【分析】 根据二次根式的运算法则，将代数式进行化简，再代入求值即可.

【详解】 解：原式 $= \frac{a\sqrt{b} \cdot \sqrt{ab} + b\sqrt{a} \cdot \sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

$$= \frac{a\sqrt{ab^2} + b\sqrt{a^2b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$= \frac{ab\sqrt{a} + ab\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$= \frac{ab(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$= ab,$$

$$\text{当 } a = \frac{1}{\sqrt{2}+1}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \text{ 时,}$$

$$\text{原式} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

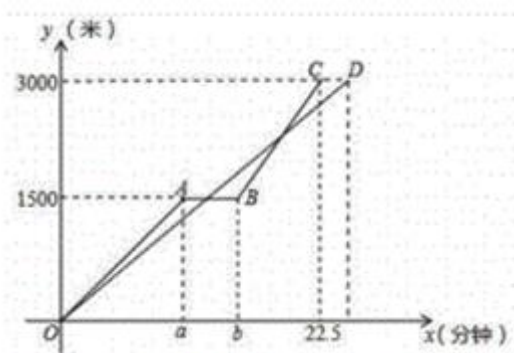
$$= \frac{1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$= 1.$$

【点睛】 本题主要考查了二次根式的化简求值，解题的关键是掌握二次根式的混合运算法则和运算顺序，以及运用平方差公式.

22. 为了响应“低碳环保，绿色出行”的公益活动，小燕和妈妈决定周日骑自行车去图书馆借书.她们同时从家出发，小燕先以 150 米/分的速度骑行一段时间，休息了 5 分钟，再以 m 米/分钟的速度到达图书馆，而妈妈始终以 120 米/分钟的速度骑行，两人行驶的路程 y (米) 与时间 x (分钟) 的关系如图，请结合图像，解答下列问题：

- (1) 图书馆到小燕家的距离是_____米；
- (2) a =_____, b =_____, m =_____；
- (3) 妈妈行驶的路程 y (米) 关于时间 x (分钟) 的函数解析式是_____；定义域是_____.



【答案】 (1) 3000 (2) 10 15 200 (3) $y=120x$, $0 \leq x \leq 25$

【解析】

【分析】(1) 根据函数图象中的数据可以直接写出图书馆到小燕家的距离;

(2) 根据题意和函数图象中的数据可以得到 a 、 b 、 m 的值;

(3) 根据函数图象中的数据可以得到妈妈行驶的路程 y (米) 关于时间 x (分钟) 的函数解析式以及定义域.

【详解】(1) 由图象可得,

图书馆到小燕家的距离是 3000 米,

故答案为 3000;

(2) $a=1500 \div 150=10$,

$b=a+5=10+5=15$,

$m=(3000-1500) \div (22.5-15)=200$,

故答案为 10, 15, 200;

(3) 妈妈行驶的路程 y (米) 关于时间 x (分钟) 的函数解析式是 $y=kx$,

当 $y=3000$ 时, $x=3000 \div 120=25$,

则 $3000=25k$, 得 $k=120$,

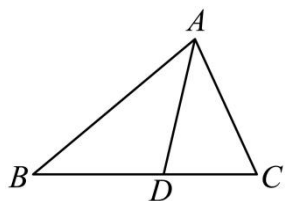
即妈妈行驶的路程 y (米) 关于时间 x (分钟) 的函数解析式是 $y=120x$, 定义域是 $0 \leq x \leq 25$,

故答案为 $y=120x$, $0 \leq x \leq 25$.

【点睛】此题考查一次函数的应用, 解题关键是明确题意, 利用一次函数的性质和数形结合的思想解答.

四、解答题 (本大题共 3 大题, 每题 8 分, 满分 24 分)

23. 如图, 在已知 $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线.



(1) 根据要求作图: 在边 AB 上求作一点 E , 使得点 E 到 A 、 D 的距离相等. (不要求写作法, 但需要保留作图痕迹和结论)

(2) 在第 (1) 小题所作的图中, 求证: $DE \parallel AC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

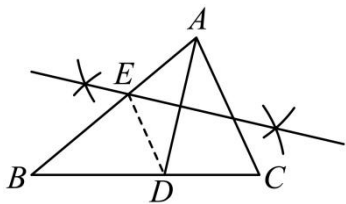
【解析】

【分析】(1) 分别以点 A 和点 D 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}AD$ 长为半径画弧相交于两点, 经过这两点作直线交 AB 于点 E 即可;

(2) 连结 DE ，由 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，得到 $\angle CAD = \angle BAD$ ，由 EF 是线段 AD 的垂直平分线，得到 $ED = EA$ ，则 $\angle ADE = \angle BAD$ ，得到 $\angle CAD = \angle ADE$ ，即可得到结论.

【小问 1 详解】

解：如图所示，



$\therefore$ 点 E 在线段 AD 的垂直平分线上，

$\therefore$ 点 E 到 A 、 D 的距离相等.

【小问 2 详解】

证明：连结 DE ，

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

$\therefore \angle CAD = \angle BAD$ ，

$\because EF$ 是线段 AD 的垂直平分线，

$\therefore ED = EA$ ，

$\therefore \triangle ADE$ 是等腰三角形，

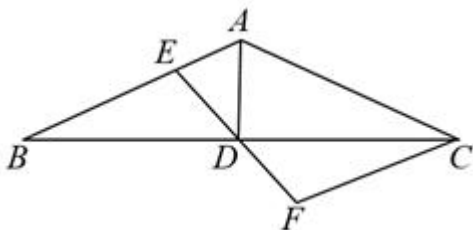
$\therefore \angle ADE = \angle BAD$ ，

$\therefore \angle CAD = \angle ADE$ ，

$\therefore DE \parallel AC$.

【点睛】此题考查线段垂直平分线的作图和性质、等腰三角形的判定和性质、平行线的判定等知识，熟练掌握线段垂直平分线的作图和性质是解题的关键.

24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 垂直平分 BC ， E 是 AB 边上一点，连接 ED ， F 是 ED 延长线上一点，连接 CF ，若 BC 平分 $\angle ACF$ ，求证： $BE = CF$.



【答案】证明见解析.

【解析】

【分析】根据线段垂直平分线的性质得到 $AB = AC$ ，证明 $\triangle BDE \cong \triangle CDF$ ，根据全等三角形的性质得到 $BE = CF$.

【详解】证明：∵ AD 垂直平分 BC ,

$$\therefore AB = AC, \quad BD = DC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore BC \text{ 平分 } \angle ACF,$$

$$\therefore \angle FCB = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle FCB,$$

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} \angle EDB = \angle FDC \\ BD = CD \\ \angle EBD = \angle FCD \end{cases},$$

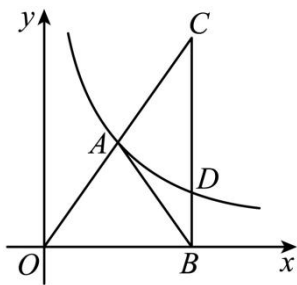
$$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDF \quad (\text{ASA}),$$

$$\therefore BE = CF.$$

【点睛】本题考查全等三角形的判定与性质及线段垂直平分线的性质，掌握线段的垂直平分线上的点到线段的两个端点的距离相等是解题的关键。

25. 如图，反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图像上的一点 $A(m, n)$ 在第一象限内，点 B 在 x 轴的正半轴上，且 $AB = AO$,

过点 B 作 $BC \perp x$ 轴，与线段 OA 的延长线相交于点 C ，与反比例函数的图像相交于点 D .



(1) 用含 m 的代数式表示点 D 的坐标;

(2) 求证: $CD = 3BD$.

【答案】(1) $D(2m, \frac{3}{m})$

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据 $AB = AO$ 得出点 D 的横坐标为 $2m$ ，将 $x = 2m$ 代入 $y = \frac{6}{x}$ 得到对应的 y 值，即可得出点 D 的坐标;

(2) 先求出直线 AO 的解析式为 $y = \frac{6}{m^2}x$ ，将 $x = 2m$ 代入 $y = \frac{6}{m^2}x$ ，求出 $C(2m, \frac{12}{m})$ ，进而求出 CD ，

BD ，即可证明 $CD = 3BD$.

【小问 1 详解】

解： $\because AB = AO$,

$\therefore$ 点 A 在线段 OB 的垂直平分线上,

$\because A(m, n)$, $O(0, 0)$,

$\therefore$ 点 D 的横坐标为 $2m$,

将 $x = 2m$ 代入 $y = \frac{6}{x}$, 得 $y = \frac{6}{2m} = \frac{3}{m}$,

$\therefore D(2m, \frac{3}{m})$;

【小问 2 详解】

证明： 设直线 AO 的解析式为 $y = kx (k \neq 0)$,

$\because$ 点 $A(m, \frac{6}{m})$,

$\therefore \frac{6}{m} = km$,

$\therefore k = \frac{6}{m^2}$,

$\therefore$ 直线 AO 的解析式为 $y = \frac{6}{m^2}x$,

$\because$ 点 C 在直线 AO 上, 且横坐标为 $2m$,

$\therefore C(2m, \frac{12}{m})$,

$\therefore CD = \frac{12}{m} - \frac{3}{m} = \frac{9}{m}$,

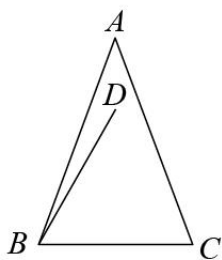
$\therefore BD = \frac{3}{m}$,

$\therefore CD = 3BD$.

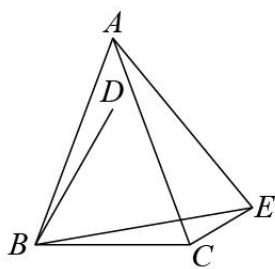
【点睛】 本题考查反比例函数和一次函数的综合应用，熟练掌握反比例函数的图象及性质是解题的关键.

五、综合题 (本大题第 (1) 小题 2 分, 第 (2) 小题 6 分, 第 (3) 小题 2 分, 满分 10 分)

26. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 60^\circ$), 将线段 BC 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到线段 BD .



(图1)



(图2)

- (1) 如图 1, 直接写出 $\angle ABD$ 的大小 (用含 α 的式子表示);
- (2) 如图 2, $\angle BCE=150^\circ$, $\angle ABE=60^\circ$, 判断 $\triangle ABE$ 的形状并加以证明;
- (3) 在 (2) 的条件下, 连接 DE , 若 $\angle DEC=45^\circ$, 求 α 的值.

【答案】 (1) $30^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ (2) 见解析 (3) $\alpha = 30^\circ$

【解析】

【分析】 (1) 利用三角形内角和为 180° , 求出 $\angle ABC$ 的度数, 即可求出答案;

(2) 连接 AD , CD , ED , 根据旋转性质得出 $BC=BD$, $\angle DBC=60^\circ$, 求出 $\angle ABD=\angle EBC=30^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, 且 $\triangle BCD$ 为等边三角形, 证 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, 推出 $\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\alpha$, 求出 $\angle BEC=\frac{1}{2}\alpha=\angle BAD$, 证 $\triangle ABD \cong \triangle EBC$, 推出 $AB=BE$ 即可;

(3) 求出 $\angle DCE=90^\circ$, $\triangle DEC$ 为等腰直角三角形, 推出 $DC=CE=BC$, 求出 $\angle EBC=15^\circ$, 得出方程 $30^\circ - \frac{1}{2}\alpha=15^\circ$, 求出即可.

【详解】 (1) 解: $\because AB=AC$, $\angle A=\alpha$,

$$\therefore \angle ABC=\angle ACB, \quad \angle ABC+\angle ACB=180^\circ-\angle A,$$

$$\therefore \angle ABC=\angle ACB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=90^\circ-\frac{1}{2}\alpha,$$

$$\therefore \angle ABD=\angle ABC-\angle DBC, \quad \angle DBC=60^\circ,$$

$$\text{即 } \angle ABD=30^\circ-\frac{1}{2}\alpha;$$

(2) $\triangle ABE$ 为等边三角形.

证明: 如图, 连接 AD , CD , ED ,

$\therefore$ 线段 BC 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到线段 BD ,

$$\therefore BC=BD, \quad \angle DBC=60^\circ.$$

$$\text{又 } \because \angle ABE=60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD=60^\circ-\angle DBE=\angle EBC=30^\circ-\frac{1}{2}\alpha \text{ 且 } \triangle BCD \text{ 为等边三角形.}$$

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 中,

$$\because AB=AC, AD=AD, BD=CD,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD \text{ (SSS)}.$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \alpha.$$

$$\because \angle BCE = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = 180^\circ - (30^\circ - \frac{1}{2} \alpha) - 150^\circ = \frac{1}{2} \alpha.$$

$$\therefore \angle BEC = \angle BAD.$$

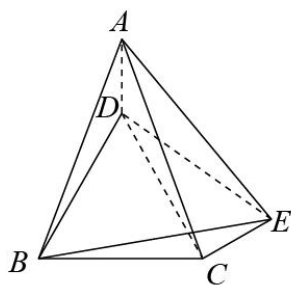
在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EBC$ 中,

$$\because \angle BEC = \angle BAD, \angle EBC = \angle ABD, BC=BD,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle EBC \text{ (AAS)}.$$

$$\therefore AB=BE.$$

$$\therefore \triangle ABE \text{ 为等边三角形}.$$



$$(3) \because \angle BCD = 60^\circ, \angle BCE = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle DEC = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle DCE \text{ 为等腰直角三角形}.$$

$$\therefore DC=CE=BC.$$

$$\because \angle BCE = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = \frac{(180^\circ - 150^\circ)}{2} = 15^\circ.$$

$$\text{而 } \angle EBC = 30^\circ - \frac{1}{2} \alpha = 15^\circ.$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ.$$

【点睛】 本题考查了旋转的性质、全等三角形的性质和判定，等边三角形的性质和判定，等腰直角三角形的判定和性质的应用，其中，理解与掌握相关概念并能正确运用作辅助线构造全等三角形与等边三角形是解决本题的关键，本题综合性较强，对学生的能力要求较高.