

2025 学年第一学期期末学情诊断初三数学试卷

(考试时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷共 23 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答;
 2. 除第一、二大题外, 其余各题都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.
- 一、选择题 (本大题共 5 题, 每题 4 分, 满分 20 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确的选项并填涂在答题纸的相应位置上. 】

1. 在抛物线 $y = x^2$ 上的一个点是 ()

- A. (1,2) B. (1,-1) C. (2,2) D. (0,0)

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查二次函数图象上的点, 根据二次函数图象上的点的横纵坐标满足函数解析式, 进行判断即可.

【详解】 解: $\because y = x^2$,

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, $y = 1$; 当 $x = 2$ 时, $y = 2^2 = 4$; 当 $x = 0$ 时, $y = 0$;

故只有 D 选项的点在抛物线上, 符合题意;

故选 D.

2. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 7$, 那么下列各式中, 正确的是 ()

- A. $\cos B = \frac{4}{7}$ B. $\sin B = \frac{3}{7}$
C. $\cot B = \frac{3}{4}$ D. $\tan B = \frac{4}{3}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了求角的正弦值, 求角的余弦值, 求角的正切值, 用勾股定理解三角形等知识点, 解题关键是掌握上述知识点并能熟练运用求解.

利用勾股定理求出 BC , 再根据三角函数的定义判断各选项.

【详解】 解: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 7$,

$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$,

$$\therefore \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{10}}{7}, \text{ 故 A 错误;}$$

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{7}, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{10}}{3}, \text{ 故 C 错误;}$$

$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{2\sqrt{10}}, \text{ 故 D 错误.}$$

故选: B.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于抛物线 $y = a(x+1)^2 + 2$ (其中 a 是常数, 且 $a \neq 0$), 下列叙述中正确的是 ()

- A. 当 $a > 0$ 时, 抛物线开口向下
- B. 抛物线与 y 轴交点坐标为 $(0, 2)$
- C. 顶点坐标是 $(-1, 2)$
- D. 当 $a < 0$ 时, 顶点是抛物线的最低点

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查二次函数图象与性质, 二次函数图象与系数的联系, 通过二次函数图象与性质, 以及二次函数图象与系数的联系, 逐项判断, 即可解题.

【详解】 解: A、当 $a > 0$ 时, 抛物线开口向上, 选项叙述错误, 不符合题意;

B、抛物线与 y 轴交点坐标为 $(0, a+2)$; 选项叙述错误, 不符合题意;

C、 $\because$ 抛物线解析式为 $y = a(x+1)^2 + 2$,

$\therefore$ 顶点坐标为 $(-1, 2)$, 正确, 符合题意;

D、当 $a < 0$ 时, 顶点是抛物线的最高点, 选项叙述错误, 不符合题意;

故选: C.

4. 下列命题中真命题是 ()

- A. 如果 $\vec{a} = k\vec{b} (k \neq 0)$, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
- B. 如果两个相等的向量相减, 那么结果为 0

C. 如果 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量, 那么 $\vec{a} = \vec{b}$

D. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 那么 $\vec{a} = \vec{b}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查向量的基本概念, 包括向量的平行、相等、单位向量和模长

【详解】对于 A: $\because \vec{a} = k\vec{b} (k \neq 0)$,

$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行, 命题真;

对于 B: $\because$ 两个相等向量相减结果为零向量 ($\vec{0}$), 而不是数量 0, 假命题;

对于 C: $\because$ 单位向量模长均为 1 但方向可能不同,

$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不一定相等, 命题假;

对于 D: $\because |\vec{a}| = |\vec{b}|$ 只表示模长相等方向可能不同,

$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不一定相等, 命题假.

$\therefore$ 真命题是 A.

故选: A.

5. 在等边 ABC 中, 点 E 、 F 分别在边 AB 、 AC 上, 将 ABC 沿 EF 折叠, 使得点 A 与 ABC 的重心 G 重合, EF 与 AG 交于点 O , 延长 AG 交 BC 于点 D , 那么 $EF:OD$ 的值为 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

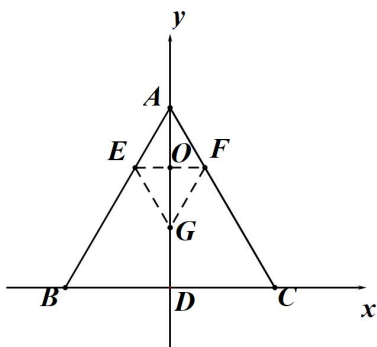
D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查折叠, 重心的性质, 平面直角坐标系的建立, 解题关键在于熟练掌握其相关知识点; 通过建立坐标系, 设等边 ABC 的边长为 $2\sqrt{3}$, 建立平面直角坐标系, 计算重心 G 、中点 O 、点 E 和 F 的坐标, 进而求出 EF 和 OD 的长度, 即可求解.

【详解】解: 如图; 设等边 ABC 的边长为 $2\sqrt{3}$, 建立平面直角坐标系:



则 $B(-\sqrt{3}, 0)$, $C(\sqrt{3}, 0)$, $A(0, 3)$

$\therefore BC$ 中点 $D(0, 0)$, 重心 $G(0, 1)$ ($AD = 3$, 根据重心性质, 重心 G 将 AD 分为 $2:1$)

$\therefore AG$ 中点 $O(0, 2)$ ($A(0, 3)$ 与 $G(0, 1)$ 的中点,

$\therefore$ 折叠后 EF 为 AG 的垂直平分线,

$\therefore EF$ 为水平线 $y = 2$ (垂直于 y 轴且过 O)

设直线 AB 解析式: $y = kx + b$ 过 $A(0, 3)$, $B(-\sqrt{3}, 0)$ 两点,

$$\therefore \begin{cases} 3 = b \\ 0 = -\sqrt{3}k + b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = \sqrt{3} \\ b = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AB 解析式 $y = \sqrt{3}x + 3$, 联立 $y = 2$ 得 $E\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 2\right)$,

设直线 AC 解析式: $y = mx + n$ 过 $A(0, 3)$, $C(\sqrt{3}, 0)$ 两点,

$$\therefore \begin{cases} 3 = n \\ 0 = \sqrt{3}m + n \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = -\sqrt{3} \\ n = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AC 解析式 $y = -\sqrt{3}x + 3$, 联立 $y = 2$ 得 $F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2\right)$,

$$\therefore EF = \left| \frac{\sqrt{3}}{3} - \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \right| = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore OD = |2 - 0| = 2,$$

$$\therefore EF : OD = \frac{2\sqrt{3}}{3} : 2 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

故选: C.

二、填空题 (本大题共 10 题, 每题 4 分, 满分 40 分)

6. 如果 $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$, 那么 $\frac{a+b}{a} = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的求值, 分式化简求值等知识点, 解题关键是掌握上述知识点并能熟练运用求解.

将 $\frac{a+b}{a}$ 拆分为 $1 + \frac{b}{a}$, 然后代入已知条件 $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ 进行计算.

【详解】 解: $\frac{a+b}{a}$

$$= \frac{a}{a} + \frac{b}{a}$$

$$= 1 + \frac{b}{a},$$

$$\text{因为 } \frac{b}{a} = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{2}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{5}{2},$$

故答案为: $\frac{5}{2}$.

7. 已知 $f(x) = x^2 - 1$, 那么 $f(\sqrt{6}) = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】

5

【解析】

【分析】 本题考查了新定义运算, 函数解析式的运用, 读懂题意是解题的关键. 将 $\sqrt{6}$ 代入函数 $f(x) = x^2 - 1$ 中, 直接计算即可.

【详解】 解: 由函数定义, $f(\sqrt{6}) = (\sqrt{6})^2 - 1 = 6 - 1 = 5$.

故答案为: 5.

8. 将抛物线 $y = 2x^2$ 向左平移 3 个单位后, 得到的新抛物线的表达式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $y = 2(x + 3)^2$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象的平移，解题关键是掌握函数图象平移的规律.

根据函数图象平移的规律：左加右减，可得答案.

【详解】 解：抛物线 $y = 2x^2$ 向左平移 3 个单位可得 $y = 2(x + 3)^2$,

故答案为： $y = 2(x + 3)^2$.

9. 小海周末到漕泾镇沙积村游览，发现村内的高宅基冈身遗址，藏有兰蛤、毛蚶等近二十种 6400 年前的远古贝类化石，他了解一个毛蚶化石的长度，在化石旁放了一支笔拍下照片. 回家后量出照片上笔和化石的长度分别为 7cm 和 2cm，笔的实际长度为 14cm，那么该化石的实际长度为 ____ cm.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了比例的性质，设化石的实际长度为 x cm，根据照片上的长度与实际长度成比例，建立比例方程求解.

【详解】 解：设化石的实际长度为 x cm,

由题意得： $\frac{7}{14} = \frac{2}{x}$,

解得： $x = 4$.

故答案为： 4.

10. 为提升街区环境美观度，环卫工人需给形状相同的三角形绿化标牌表面涂环保漆. 大标牌的涂漆厚度与小标牌的涂漆厚度完全一致, 两块标牌对应边的长度比为 1:2, 如果其中一块小标牌涂满漆用了半听环保漆, 那么一块大标牌涂满漆需要环保漆 ____ 听.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的应用，根据题意，易得两个三角形相似，根据相似三角形的面积比等于相似比的平方，进行求解即可.

【详解】 解： $\because$ 形状相同的两个三角形绿化标牌，

$\therefore$ 两个三角形相似，

$\because$ 两块标牌对应边的长度比为 1:2，

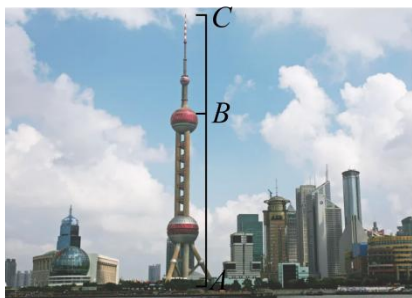
$\therefore$ 两块标牌的面积比为 1:4，

$\because$ 小标牌涂满漆用了半听环保漆，

∴大标牌涂满漆需要环保漆 $0.5 \times 4 = 2$ 听环保漆；

故答案为：2

11. 数学在生活中的许多应用，都能给人以美感，也造就了人类建筑史上的无数经典．如图，著名的上海东方明珠广播电视塔，塔高 AC 为 468 米，其上球体点 B 位于塔身的黄金分割点处，使塔体显得挺拔俊美，具有审美效果，且 $AB > BC$ ．那么上球体到塔底的距离 AB 为_____米．（结果保留根号的形式）



【答案】 $234\sqrt{5} - 234$

【解析】

【分析】 本题考查了黄金分割，解题关键是掌握黄金分割比．

根据黄金分割比求解即可．

【详解】 解： ∵ 点 B 是线段 AC 上的一个黄金分割点，且 $AC = 468$ 米， $AB > BC$ ，

$$\therefore AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 468 = 234\sqrt{5} - 234 \text{ (米)}.$$

故答案为： $234\sqrt{5} - 234$ ．

12. 对于抛物线 $y = 2x^2 + bx + c$ ，沿着 x 轴正方向看，抛物线在直线 $x = 2$ 左侧的部分是下降的，写出一个符合条件的 b 的值是_____．

【答案】 -8 （答案不唯一）

【解析】

【分析】 此题考查了二次函数的性质，首先判断出抛物线开口向上，然后根据题意得到 $-\frac{b}{2 \times 2} \geq 2$ ，求出 $b \leq -8$ ，进而求解即可．

【详解】 解： ∵ 抛物线 $y = 2x^2 + bx + c$ 中二次项系数 $2 > 0$ ，

∴ 抛物线开口向上，

∵ 沿着 x 轴正方向看，抛物线在直线 $x = 2$ 左侧的部分是下降的，

$$\therefore -\frac{b}{2 \times 2} \geq 2$$

$$\therefore b \leq -8$$

$\therefore$ 写出一个符合条件的 b 的值是 -8 .

故答案为: -8 (答案不唯一).

13. 在 ABC 中, 设 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}$, 点 M 是 ABC 的边 AB 的中点, 如果用 $\vec{a}, \vec{b}$ 的线性组合表示向量 $\overrightarrow{CM} = x\vec{a} + y\vec{b}$, 那么 $x + y$ 的值为_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题主要考查了平面向量的简单计算问题, 熟练掌握平面向量的简单计算是解题的关键.

点 M 是边 AB 的中点, 根据中点公式, 向量 $\overrightarrow{CM}$ 可以表示为向量 $\overrightarrow{CA}$ 和 $\overrightarrow{CB}$ 的线性组合, 且系数之和为 1.

【详解】 解: $\because M$ 是 AB 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}),$$

$$\text{因此 } x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2},$$

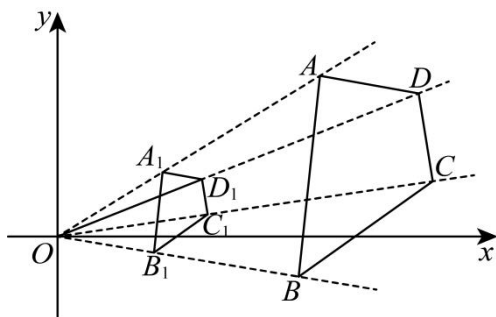
$$\therefore x + y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

故答案为: 1.

14. 如果一个图形上的点 $A, B, \dots, P, \dots$ 和另一个图形上的点 $A', B', \dots, P', \dots$ 分别对应, 并且它们的连线 $AA', BB', \dots, PP', \dots$ 都经过同一点 $O, \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \dots = \frac{OP'}{OP} = \dots$, 那么这两个图形叫做位似图形,

点 O 是位似中心. 如图, 四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是位似图形, 点 D, D_1 的坐标分别为 $(5, 2)$ 、

$(2, \frac{4}{5})$, 如果 AD 的长为 $\sqrt{3}$, 那么 A_1D_1 的长为_____.



【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查坐标系下的位似. 理解并掌握位似图形的定义, 是解题的关键.

根据位似图形的定义, 得到 $\frac{OD_1}{OD} = \frac{\sqrt{2^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2}}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{\frac{116}{25}}}{\sqrt{29}} = \frac{2}{5}$, 求出位似比, 即可得 $\frac{A_1D_1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{5}$, 求解即可.

【详解】 解: $\because$ 点 D 、 D_1 的坐标分别为 $(5, 2)$ 、 $\left(2, \frac{4}{5}\right)$,

$$\therefore \frac{OD_1}{OD} = \frac{\sqrt{2^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2}}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{\frac{116}{25}}}{\sqrt{29}} = \frac{2}{5},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是以坐标原点 O 为位似中心的位似图形,

$$\therefore \frac{A_1D_1}{AD} = \frac{OD_1}{OD}, \text{ 即 } \frac{A_1D_1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore A_1D_1 = \frac{2\sqrt{3}}{5},$$

故答案为: $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

15. 在矩形 $ABCD$ 中, 过点 C 作 $CE \perp BD$, 垂足为 E , 以 CE 为斜边作直角三角形 CEF , AF 与 BD 交于点 P . 如果 $\frac{AP}{AF} = k$, 那么 k 的取值范围是_____.

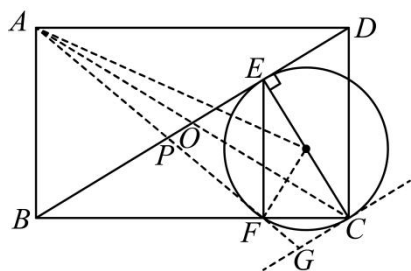
【答案】 $\frac{1}{2} < k < 1$

【解析】

【分析】 本题考查了根据矩形的性质求线段长, 相似三角形的判定与性质综合等知识点, 解题关键是掌握上述知识点.

通过作平行线构造相似三角形, 列出比例式求解, 结合点 F 的运动路径求解即可得出 k 取值范围.

【详解】 解: 过点 C 作 $CG \parallel BD$ 交 AF 的延长线于点 G , 连接 AC 交 BD 于点 O ,



则 $\triangle APO \sim \triangle AGC$,

$$\text{所以 } \frac{AP}{AG} = \frac{AO}{AC},$$

因为四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\text{所以 } AC = 2AO,$$

$$\text{所以 } \frac{AP}{AG} = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\text{而 } \frac{AP}{AG} < \frac{AP}{AF},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} < \frac{AP}{AF},$$

因为以 CE 为斜边作直角三角形 CEF ,

所以点 F 在以 CE 为直径的圆上运动,

当点 F 与点 E 重合时, P 与 F 重合, 此时 $\frac{AP}{AF} = 1$, 但不存在直角三角形,

$$\text{故 } \frac{AP}{AF} < 1,$$

$$\text{综上所述, } \frac{1}{2} < \frac{AP}{AF} < 1.$$

$$\text{因为 } \frac{AP}{AF} = k,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} < k < 1,$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{2} < k < 1.$$

三、解答题 (本大题共 8 题, 满分 90 分)

$$16. \text{ 计算: } \frac{\cos 30^\circ - \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ - \cos 45^\circ} + \tan^2 60^\circ - \cot 30^\circ.$$

【答案】 $4 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了特殊角的三角函数值的计算, 掌握相关知识点是解题的关键.

先将特殊角的三角函数值化简, 再按无理数的运算法则计算, 即可求解.

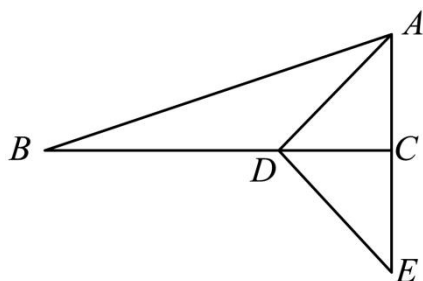
【详解】解： $\frac{\cos 30^\circ - \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ - \cos 45^\circ} + \tan^2 60^\circ - \cot 30^\circ$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} + (\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}$$

$$= 1 + 3 - \sqrt{3}$$

$$= 4 - \sqrt{3}.$$

17. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\tan B = \frac{5}{12}$ ，点 D 在边 BC 上， $BD = 8$ ， $CD = 4$ ，过点 D 作 $DE \perp AD$ 交 AC 的延长线于点 E 。



(1) 求 AD 的长；

(2) 求 $\sin E$ 的值。

【答案】(1) $\sqrt{41}$

(2) $\frac{5\sqrt{41}}{41}$

【解析】

【分析】本题考查解直角三角形，熟练掌握锐角三角函数的定义，是解题的关键：

(1) 线段的和差求出 BC 的长，正切值求出 AC 的长，勾股定理求出 AD 的长即可；

(2) 同角的余角相等，得到 $\angle E = \angle ADC$ ，根据正弦的定义求出 $\sin \angle ADC$ 即可。

【小问 1 详解】

解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\tan B = \frac{5}{12}$ ， $BC = BD + CD = 8 + 4 = 12$ ，

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12},$$

$$\therefore AC = 5,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，由勾股定理，得 $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{41}$ ；

【小问 2 详解】

解：由 (1) 知： $AC = 5$ ， $AD = \sqrt{41}$ ，

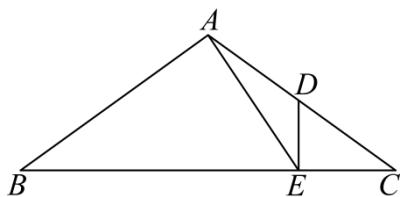
$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, DE \perp AD,$$

$$\therefore \angle CAD + \angle E = \angle CAD + \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle E = \angle ADC,$$

$$\therefore \sin E = \sin \angle ADC = \frac{AC}{AD} = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5\sqrt{41}}{41}.$$

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 E 、 D 分别在边 BC 、 AC 上， $\angle AED = \angle B$ 。



(1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle ECD$ ；

(2) 若 $AB = 10$ ， $BC = 16$ ， $BE = 12$ ，求 CD 的长。

【答案】 (1) 见解析 (2) $CD = 4.8$

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定和性质，熟练掌握相似三角形的判定方法是解题的关键：

(1) 等边对等角，得到 $\angle B = \angle C$ ，三角形的外角的性质结合角的和差关系求出 $\angle BAE = \angle DEC$ ，即可得证；

(2) 根据相似三角形的性质，列出比例式，进行求解即可。

【小问 1 详解】

证明： $\because AB = AC$ ，

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle B + \angle BAE = \angle AED + \angle CED, \angle AED = \angle B,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DEC,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ECD;$$

【小问 2 详解】

解：由 (1) 知： $\triangle ABE \sim \triangle ECD$ ，

$$\therefore \frac{CE}{AB} = \frac{CD}{BE},$$

$$\therefore \frac{BC-BE}{AB} = \frac{CD}{BE}, \text{ 即 } \frac{16-12}{10} = \frac{CD}{12},$$

$$\therefore CD = 4.8.$$

19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 把抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 向下平移 1 个单位长度, 所得的新抛物线顶点坐标为 $A(-2, 1)$.

(1) 求原抛物线的表达式;

(2) 若新抛物线与 y 轴交于点 C , 原抛物线顶点为 B , 求 $\angle ACB$ 的正切值.

【答案】 (1) $y = x^2 + 4x + 6$

$$(2) \frac{1}{8}$$

【解析】

【分析】 (1) 利用平移规律结合新抛物线的顶点坐标, 利用顶点式得出原抛物线解析式;

(2) 先求出新抛物线的解析式为 $y = x^2 + 4x + 6 - 1 = x^2 + 4x + 5$, 再求得 $C(0, 5)$, 从而可求得 AB , AC , 得出 $AB \perp x$ 轴, 进而求得 BC , 从而可得出点 C 到 AB 的距离为 2, 再求得 $S_{\triangle ABC}$, 然后利用三角形面积求得 AD , 再利用勾股定理求得 CD , 从而可求得 $\tan \angle ACB$.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 把抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 向下平移 1 个单位长度, 所得的新抛物线顶点坐标为 $A(-2, 1)$,

$\therefore$ 原抛物线顶点坐标为 $B(-2, 2)$,

$\therefore$ 原抛物线的解析式为 $y = (x + 2)^2 + 2 = x^2 + 4x + 6$,

即原抛物线的解析式为 $y = x^2 + 4x + 6$;

【小问 2 详解】

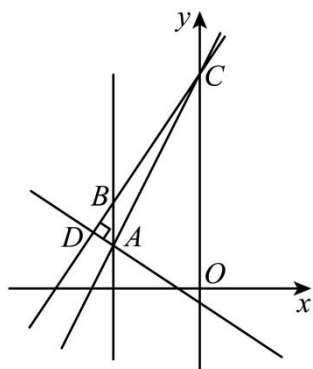
解: $\because$ 原抛物线的解析式为 $y = x^2 + 4x + 6$, 把抛物线 $y = x^2 + 4x + 6$ 向下平移 1 个单位长度得到新抛物线,

$\therefore$ 新抛物线的解析式为 $y = x^2 + 4x + 6 - 1 = x^2 + 4x + 5$,

令 $x = 0$, 则 $y = 5$,

$\therefore C(0, 5)$,

又 $A(-2, 1)$, $B(-2, 2)$, 在平面直角坐标系上描点 A , B , C 三点, 如图,



$$\therefore AB = 2 - 1 = 1, \quad AC = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (1 - 5)^2} = 2\sqrt{5}, \quad AB \perp x \text{ 轴},$$

$$BC = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{13},$$

$\therefore$ 点 C 到 AB 的距离为 2,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \cdot AB = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1,$$

过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D ,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AD \cdot BC = \frac{1}{2} \times AD \times \sqrt{13} = 1,$$

$$\therefore AD = \frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$\therefore CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2} = \frac{16}{\sqrt{13}},$$

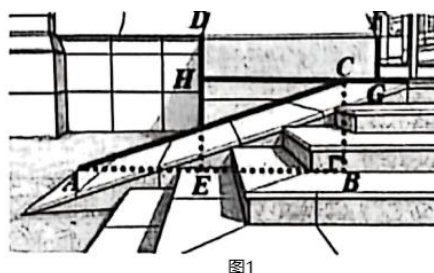
$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AD}{CD} = \frac{\frac{2}{\sqrt{13}}}{\frac{16}{\sqrt{13}}} = \frac{1}{8}.$$

【点睛】本题考查了把 $y = ax^2 + bx + c$ 化成顶点式，待定系数法求二次函数解析式，二次函数图象的平移，用勾股定理解三角形，求角的正切值等知识点，解题关键是掌握上述知识点并能熟练运用求解.

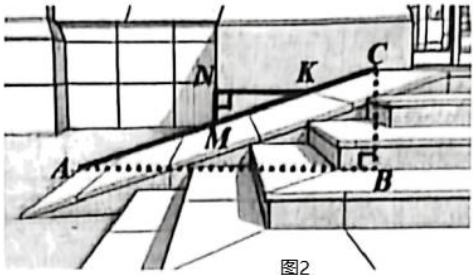
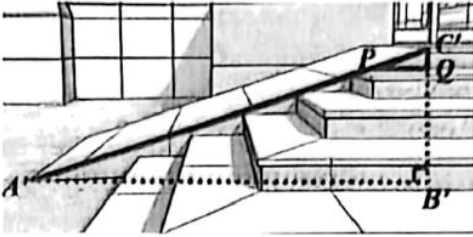
20.

坡道改良：某教学楼门口的坡道上下坡困难，乘坐轮椅的学生无法独立通过，由同伴推行也比较吃力．为确保轮椅能够安全、自如的通行，坡道设计需满足以下关键要求：最大坡度为 $1:12$ ，这是国际通用标准．每段坡道垂直升高不宜超过 75cm ，

甲
组



$$FG = 39\text{cm}, \quad DE = 109\text{cm}, \quad AC = 250\text{cm}.$$

超过时需设置休息平台。为此，几个学习小组经过测量，收集了坡道的相关数据，如图 1、图 2、图 3. 同学发现坡道左侧有连廊，为了安全又不影响连廊通行，可将坡道设计为折返形，如图 4. 折返形坡道（坡道 OV—休息平台 VR—坡道 VC'）设计需满足以下关键要求：折返形坡道单段坡道最大坡度为 1:10，水平长度最大 560cm，休息平台宽度最小 150cm，轮椅入口宽度最小 150cm.	乙组  图2 $NK = 91.2\text{cm}$, $NM = 26.6\text{cm}$
	丙组  图3 $C'Q = 9.8\text{cm}$, $PQ = 33.6\text{cm}$

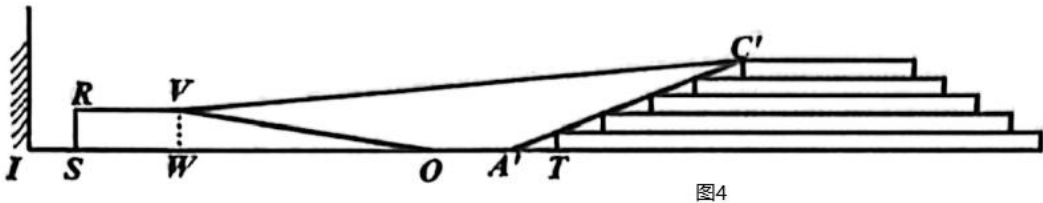


图4

休息平台宽为 VR ，轮椅入口宽为 OT ， $A'T = 30\text{cm}$ ，点 T 到连廊的距离 TI 为 520cm .

- (1) 根据三组同学收集的数据，求原坡道的坡度和坡高（ BC 或 $B'C'$ ），并判断是否安全；
- (2) 为了安全又不影响连廊通行，请您设计一种折返形坡道的方案，写出折返形坡道单段坡道（坡道 OV 、坡道 VC' ）的坡度和坡高以及设计过程.

【答案】 (1) 坡度 $i = 7:24$ ，坡高 $BC = 70\text{cm}$ ，不安全

(2) 坡道 OV 的坡高为 22cm ，坡度为 1:10，坡道 VC' 的坡高为 48cm ，坡度为 48:580

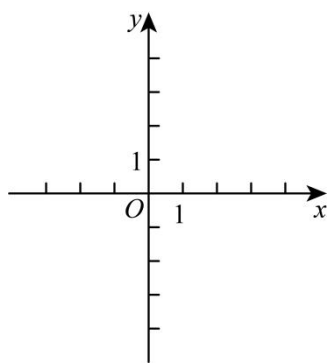
【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理理解直角三角形，矩形的性质，坡度，掌握相关知识点是解题的关键.

(1) 根据题意可知 $DH = 39\text{cm}$ ， $BC = 70\text{cm}$ ，由勾股定理可得 $AB = 240\text{cm}$ ，即可求出坡度，再跟通用标准作比较，即可求解；

(2) 当休息平台位于连廊最左段，即点 I 和点 S 重合时，过点 V 作 $VJ \perp B'C'$ ，可知四边形 $VWB'J$ 为矩

$B(-1,1)$ 、 $C(3,1)$.



- (1) 若抛物线经过点 B 和 C ，求 a 的值；
- (2) 如果 $\triangle ABC$ 的面积小于 3，求 n 的取值范围；
- (3) 点 A 关于原点的对称点 D ，连接 AC 、 CD ，且 $AC \perp CD$ ，直线 BC 与抛物线交于点 E 、 F （点 E 在点 C 右侧），当 $\triangle ACE$ 与 $\triangle CDE$ 相似时，求抛物线的表达式。

- 【答案】(1) $-\frac{1}{2}$
- (2) $-\frac{3}{4} < n < \frac{3}{4}$
- (3) $y = -\frac{1}{18}(x-1)^2 + 3$

【解析】

【分析】(1) 根据抛物线的对称轴可得 $n=1$ ，再将点 $B(-1,1)$ 代入抛物线，即可求出 a 的值；

(2) 根据抛物线的对称轴为直线 $x=n$ ，可得 $A(n, 2n+1)$ ，再根据点 A 与 BC 的位置关系，分两种情况表示 $\triangle ABC$ 的面积求解即可；

(3) 由中心对称的性质可知， $D(-n, -2n-1)$ ， $OA=OD$ ，再根据直角三角形斜边中线等于斜边一半，得到 $OC = \frac{1}{2}AD = OA$ ，根据坐标两点的距离公式，求出 n 的值，再根据抛物线的开口方向以及与线 BC 有两个交点，可知抛物线顶点在 BC 上方，则 $2n+1 > 1$ ，从而确定 $n=1$ ，得出 $y = a(x-1)^2 + 3$ ， $A(1,3)$ ， $D(-1,-3)$ ， $M(1,1)$ ，证明 $\triangle AMC$ 是等腰直角三角形，进而得出 $\angle DCM = \angle ACM$ ，再根据边角关系，推出当 $\triangle ACE$ 与 $\triangle CDE$ 相似时，只能 $\angle AEC = \angle EDC$ ，得到 $CE^2 = AC \cdot CD = 16$ ，从而得出 $E(7,1)$ ，再代入抛物线解析式求出 a 的值，即可得解。

【小问 1 详解】

解： $\because y = ax^2 - 2anx + an^2 + 2n + 1 (a < 0)$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{-2an}{2a} = n$,

$\because$ 抛物线经过点 $B(-1,1)$ 、 $C(3,1)$,

$\therefore \therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{-1+3}{2} = 1$,

$\therefore n = 1$,

$\therefore$ 抛物线为 $y = ax^2 - 2ax + a + 2 + 1 = ax^2 - 2ax + a + 3$,

将点 $B(-1,1)$ 代入抛物线可得 $a + 2a + a + 3 = 1$,

解得: $a = -\frac{1}{2}$;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 点 $B(-1,1)$ 、 $C(3,1)$,

$\therefore BC = 4$,

$\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x = n$,

$\therefore A(n, 2n+1)$,

当点 A 在 BC 上方时, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4(2n+1-1) = 4n$,

$\because \triangle ABC$ 的面积小于 3,

$\therefore 4n < 3$,

解得: $n < \frac{3}{4}$;

当点 A 在 BC 下方时, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4[1 - (2n+1)] = -4n$,

$\because \triangle ABC$ 的面积小于 3,

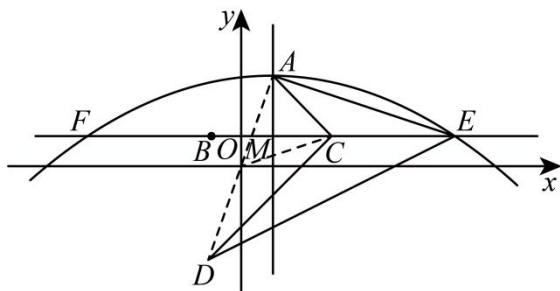
$\therefore -4n < 3$,

解得: $n > -\frac{3}{4}$;

综上所述, n 的取值范围为 $-\frac{3}{4} < n < \frac{3}{4}$;

【小问 3 详解】

解: 如图, 连接 AD , OC , 令 BC 与抛物线对称轴的交点为 M ,



$\because A(n, 2n+1)$, 点 A 关于原点的对称点 D ,

$\therefore D(-n, -2n-1)$, $OA = OD$,

$\because AC \perp CD$, O 是 AD 的中点,

$\therefore OC = \frac{1}{2} AD = OA$,

$\therefore \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{n^2 + (2n+1)^2}$,

$\therefore 5n^2 + 4n - 9 = 0$,

解得: $n = 1$ 或 $n = -\frac{9}{5}$,

$\because a < 0$,

$\therefore$ 抛物线开口向下,

$\because$ 直线 BC 与抛物线交于点 E 、 F ,

$\therefore 2n+1 > 1$,

$\therefore n > 0$,

$\therefore n = 1$,

$\therefore y = ax^2 - 2ax + a + 2 + 1 = a(x-1)^2 + 3$, $A(1, 3)$, $D(-1, -3)$, $M(1, 1)$,

$\therefore AM = CM = 2$,

$\therefore \triangle AMC$ 是等腰直角三角形,

$\angle ACM = \angle CAM = 45^\circ$,

$\therefore \angle DCM = 90^\circ - \angle ACM = 45^\circ = \angle ACM$,

$\therefore 180^\circ - \angle ACM = 180^\circ - \angle DCM$, 即 $\angle ACE = \angle DCE$,

$\because AC = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$, $CD = \sqrt{(-1-3)^2 + (-3-1)^2} = 4\sqrt{2}$,

$\therefore AC \neq CD$,

$\therefore \angle AEC \neq \angle DEC$,

∴当 $\triangle ACE$ 与 $\triangle CDE$ 相似时, 只能 $\angle AEC = \angle EDC$,

$$\therefore \frac{AC}{CE} = \frac{CE}{CD},$$

$$\therefore CE^2 = AC \cdot CD = 2\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 16,$$

$$\therefore CE = 4,$$

∵ E 在点 C 右侧,

$$\therefore E(7,1),$$

将 $E(7,1)$ 代入抛物线 $y = a(x-1)^2 + 3$, 得 $a(7-1)^2 + 3 = 1$,

$$\text{解得: } a = -\frac{1}{18},$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式为 } y = -\frac{1}{18}(x-1)^2 + 3.$$

【点睛】 本题考查了二次函数的图象和性质, 待定系数法求函数解析式, 中心对称的性质, 勾股定理, 直角三角形的斜边中线, 等腰三角形的判定和性质, 相似三角形的判定和性质等知识, 利用数形结合的思想是解题关键.

22. 某数学学习小组成员对“重差”开展了深入探究.

重差汉代天文学家测量太阳的高和远的方法. 最早见于《周髀算经》. 刘徽《九章算术注》序说: “凡望极高、测绝深而兼知其远者必用重差, 勾股则必以重差为率, 故曰重差也.” 如图 1, “日去地” 减去表高与

表高之比 $\left(\frac{BE}{CE}\right)$ 或 “南戴日下” 与南影之比 $\left(\frac{CM}{MK}\right)$, 等于两表到 “日下” 距离之差与两表影长差之比

$\left(\frac{CD-CM}{DA-MK}\right)$. 后者是两个差数, 故有“重差”的称谓. 下面作简要介绍.

如图 1, 为了测量海岛的高度, 设 B 为岛的顶点, 过点 B 的铅垂线与地面的交点为 C , 则岛的高度即为 BC . 接下来要进行两次操作, 第一次把一根木杆 (算经中称之为“表”, 下文称为“测量杆”) 竖立立在地面上距离点 C 较近的点 M 处, 从点 M 处透过测量杆的上端 Q 望岛顶 B , BQ 的连线 (把它叫做测量线) 延长后交地面于点 K . 第二次, 把测量杆竖立立在地面上距离点 C 较远的点 D 处 (M 、 D 、 C 三点在一条直线上), 同样地, 从点 D 处透过测量杆的上端 P 望岛顶 B , BP (即测量线) 的连线延长后交地面于点 A . 连接 PQ 并延长交 BC 于点 E .

$$\text{求证: } \frac{BE}{CE} = \frac{CD-CM}{DA-MK} \text{ ① 或 } \frac{CM}{MK} = \frac{CD-CM}{DA-MK} \text{ ②}.$$

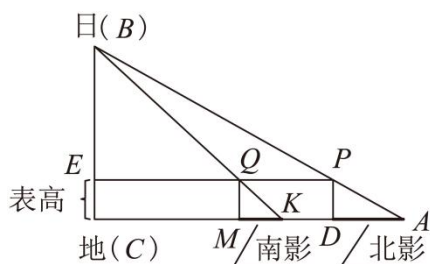


图1

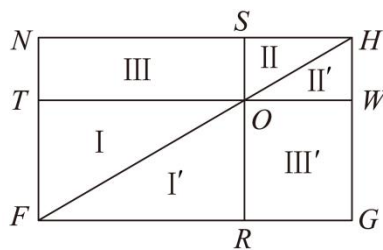


图2

学习小组的成员经探究后都认为：要想证明①和②都成立，只需证明 $\frac{BE}{CE} = \frac{CM}{MK}$ 和①或②成立．大家分别提出了自己的分析或证明思路．

小海同学：针对问题及求证结论的数学结构特征自然想到应用三角形一边的平行线、合比性质、等比性质有关知识加以解决；

小明同学：锐角三角比是沟通边角关系的一座桥梁，记 $\angle BKC = \alpha$ ， $\angle A = \beta$ ；

欢欢同学：利用相似三角形的性质；

乐乐同学：过点 P 作 BK 的平行线……；

请根据同学们提出的分析或思路完成 (1) 和 (2)．

- (1) 求证： $\frac{BE}{CE} = \frac{CM}{MK}$ ；
- (2) 求证： $\frac{BE}{CE} = \frac{CD - CM}{DA - MK}$ ①；

(3) 在课本阅读材料二《漫谈“出入相补原理”》中，如图2，设 O 是矩形 $FGHN$ 的对角线 FH 上任意一点，过点 O 分别作一组邻边的平行线 TW 、 SR ，直线 TW 分别与边 FN 、 GH 交于点 T 、 W ，直线 SR 分别与边 FG 、 NH 交于点 R 、 S ，那么矩形 $TOSN$ 的面积等于矩形 $ROWG$ 的面积．说理如下：如果把图形看作由 $\triangle FHN$ 移置到 $\triangle FHG$ 处，同时 I 、 II 各移到 I' 、 II' ，那么依据出入相补原理，得 $III = III'$ （指面积相等）．请利用这个结论证明①成立．

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 证明见解析 (3) 证明见解析

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的性质和判定，矩形的性质，合比的性质，等比的性质；

- (1) 利用 $\triangle KMQ \sim \triangle KCB$ 得 $\frac{KM}{CK} = \frac{QM}{BC}$ ，再利用合比的性质可将 $\frac{KM}{CK} = \frac{QM}{BC}$ 转化为 $\frac{BE}{CE} = \frac{CM}{MK}$ ；
- (2) 由 (1) 可得 $\frac{BE}{CE} = \frac{CD}{DA} = \frac{CM}{KM}$ ，再利用等比的性质可得 $\frac{BE}{CE} = \frac{CD - CM}{DA - MK}$ ；
- (3) 在图1上分别以 BC 、 CM 为邻边构建矩形 $BCM N$ ，以 BC 、 CK 为邻边构建矩形 $BCKS$ ，以 BC 、

CD 为邻边构建矩形 $BCDR$, 以 BC 、 CA 为邻边构建矩形 $BCAG$, 由出入相补原理得: $S_{\text{矩形}CMQE} = S_{\text{矩形}QTSN}$,

$S_{\text{矩形}CDPE} = S_{\text{矩形}PFGR}$ 得出 $QE \times QM = QT \times QN$, $PE \times PD = PF \times PR$, 进而得出 $\frac{BE}{CE} = \frac{CD}{AD} = \frac{CM}{MK}$, 再

由等比的性质可得 $\frac{BE}{CE} = \frac{CD - CM}{DA - MK}$.

【小问 1 详解】

证明: $\because QM \perp AC$, $BC \perp AC$,

$\therefore QM \parallel BC$,

$\therefore \triangle KMQ \sim \triangle KCB$,

$\therefore \frac{KM}{CK} = \frac{QM}{BC}$,

$\therefore \frac{KM}{CM + MK} = \frac{QM}{BE + CE}$,

$\therefore \frac{CM + MK}{KM} = \frac{BE + CE}{QM}$,

$\therefore \frac{CM}{KM} + \frac{MK}{KM} = \frac{BE}{QM} + \frac{CE}{QM}$,

$\therefore KM = MK$, $CE = QM$,

$\therefore \frac{CM}{KM} + 1 = \frac{BE}{CE} + 1$,

$\therefore \frac{CM}{KM} = \frac{BE}{CE}$.

【小问 2 详解】

证明: $\because PD \perp AC$, $BC \perp AC$,

$\therefore PD \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADP \sim \triangle ACB$,

$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{PD}{BC}$,

$\therefore \frac{AD}{AD + CD} = \frac{PD}{BE + CE}$,

$\therefore \frac{AD + CD}{AD} = \frac{BE + CE}{PD}$,

$\therefore \frac{CD}{AD} + \frac{AD}{AD} = \frac{BE}{PD} + \frac{CE}{PD}$,

$\therefore AD = AD$, $CE = PD$,

$$\therefore \frac{CD}{AD} + 1 = \frac{BE}{CE} + 1,$$

$$\therefore \frac{CD}{AD} = \frac{BE}{CE},$$

$$\text{由 (1) 得: } \frac{CM}{KM} = \frac{BE}{CE},$$

$$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{CD}{DA} = \frac{CM}{KM},$$

$$\therefore \text{由等比的性质得: } \frac{BE}{CE} = \frac{CD - CM}{DA - MK}.$$

【小问 3 详解】

证明: 如图所示, 在图 1 上分别以 BC 、 CM 为邻边构建矩形 $BCMN$, 以 BC 、 CK 为邻边构建矩形 $BCKS$, 以 BC 、 CD 为邻边构建矩形 $BCDR$, 以 BC 、 CA 为邻边构建矩形 $BCAG$,

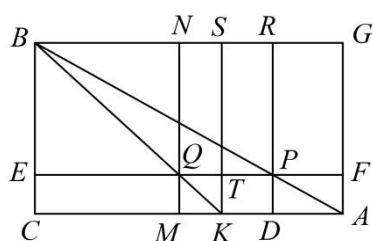


图1

由出入相补原理得: $S_{\text{矩形}CMQE} = S_{\text{矩形}QTSN}$, $S_{\text{矩形}CDPE} = S_{\text{矩形}PFGR}$,

$$\therefore QE \times QM = QT \times QN, \quad PE \times PD = PF \times PR,$$

将上述等积式写成比例式得: $\frac{QN}{QM} = \frac{QE}{QT}, \quad \frac{PR}{PD} = \frac{PE}{PF},$

$$\therefore PR = QN = BE, \quad PD = QM = CE,$$

$$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{QE}{QT}, \quad \frac{BE}{CE} = \frac{PE}{PF},$$

$$\therefore QE = CM, \quad QT = MK, \quad PE = CD, \quad PF = AD,$$

$$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{CM}{MK}, \quad \frac{BE}{CE} = \frac{CD}{AD},$$

$$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{CD}{AD} = \frac{CM}{MK},$$

$$\therefore \text{由等比的性质得: } \frac{BE}{CE} = \frac{CD - CM}{DA - MK}.$$

23. 在四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AB 上, $BE = 3AE$, 点 F 在边 BC 上.

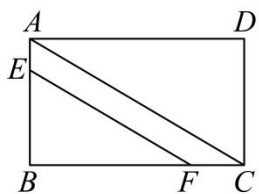


图1

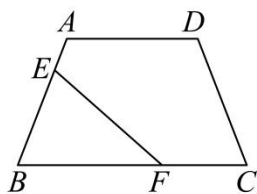


图2

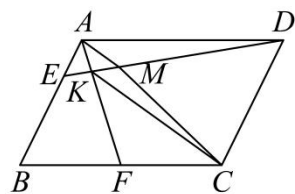


图3

(1) 如图 1, 若四边形 $ABCD$ 为矩形, 且 $BF = 3CF$, 连接 EF 、 AC , 求证: $\triangle BEF \sim \triangle DCA$;

(2) 如图 2, 若四边形 $ABCD$ 为等腰梯形, $AD \parallel BC$. 请连接 FE 并延长, 交 DA 的延长线于点 G , 连接 BG , 如果 $BG \perp GD$, $\angle EFB = 2\angle GBA$, $AG = 6$, 求 CD 的长;

(3) 如图 3, 若四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 点 F 是 BC 中点, 连接 DE 、 AF 交于点 K , 连接 CK , 过点 A 作 $AM \parallel CK$ 交 DK 于点 M , 连接 CM , 求 $S_{\triangle KMC} : S_{\triangle KFC}$ 值.

【答案】(1) 见解析 (2) $CD = 12\sqrt{2}$

(3) $2:7$

【解析】

【分析】(1) 矩形的性质, 得到 $BC \parallel AD$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, 进而得到 $\angle BCA = \angle CAD$, 易得 $\frac{BE}{AE} = \frac{BF}{CF}$, 推出 $\triangle BEF \sim \triangle BAC$, 进而得到 $\angle BFE = \angle BCA$, 推出 $\angle BFE = \angle CAD$, 即可得证;

(2) 取 AB 的中点 H , 连接 HG , 斜边上的中线, 得到 $GH = \frac{1}{2}AB = AH = BH$, 等边对等角, 结合三角形的外角, 推出 $\angle AHG = \angle ABG + \angle BGH = 2\angle ABG$, 进而得到 $\angle AHG = \angle BFE$, 证明 $\triangle AGE \sim \triangle AHG$, 得到 $AG^2 = \frac{1}{2}AB \cdot AE$, 设 $AB = x$, 求出 AE , 根据 $BE = 3AE$, 得到 $AB = 4AE$, 求出 x 的值, 再根据等腰梯形的两腰相等, 即可得出结果;

(3) 延长 CB 、 DE , 交于点 H , 连接 AC , 证明 $\triangle DAE \sim \triangle HBE$, $\triangle AKD \sim \triangle FKH$, 得到 $\frac{AD}{BH} = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{3}$, $\frac{AK}{FK} = \frac{AD}{HF}$, 进而推出 $\frac{AK}{FK} = \frac{2}{7}$, 根据同高三三角形的面积比等于底边比, 以及平行面积转化, 即可得出结果.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$\therefore AB = CD, BC = AD, BC \parallel AD, \angle B = \angle D = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCA = \angle CAD$,

$\because BE = 3AE, BF = 3CF$,

$$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{BF}{BC},$$

$$\therefore \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \angle BFE = \angle BCA,$$

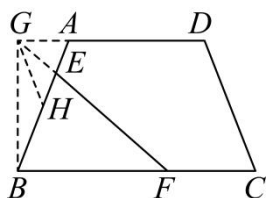
$$\therefore \angle BFE = \angle CAD,$$

$$\text{又} \because \angle B = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle DCA;$$

【小问2详解】

解：取 AB 的中点 H ，连接 HG ，则 $AH = BH = \frac{1}{2}AB$ ，



$$\therefore BG \perp DG,$$

$$\therefore GH = \frac{1}{2}AB = AH = BH,$$

$$\therefore \angle BGH = \angle ABG,$$

$$\therefore \angle AHG = \angle ABG + \angle BGH = 2\angle ABG,$$

$$\therefore \angle BFE = 2\angle ABG,$$

$$\therefore \angle AHG = \angle BFE,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BFG = \angle AGE,$$

$$\therefore \angle AHG = \angle AGE,$$

$$\text{又} \because \angle GAE = \angle GAH,$$

$$\therefore \triangle AGE \sim \triangle AHG,$$

$$\therefore \frac{AG}{AE} = \frac{AH}{AG},$$

$$\therefore AG^2 = AE \cdot AH,$$

$$\therefore AG^2 = \frac{1}{2}AB \cdot AE,$$

$$\text{设 } AB = x, \text{ 则 } 6^2 = \frac{1}{2}x \cdot AE,$$

$$\therefore AE = \frac{72}{x},$$

$$\therefore BE = 3AE,$$

$$\therefore AB = 4AE, \text{ 即 } x = 4 \cdot \frac{72}{x},$$

解得 $x = 12\sqrt{2}$ (负值舍去),

$$\therefore AB = 12\sqrt{2},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形, $AD \parallel BC$,

$$\therefore CD = AB = 12\sqrt{2};$$

【小问 3 详解】

解: 延长 CB, DE , 交于点 H , 连接 AC ,



$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore AD \parallel BC, \quad AD = BC,$$

$$\therefore \triangle DAE \sim \triangle HBE, \triangle AKD \sim \triangle FKH,$$

$$\therefore \frac{AD}{BH} = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{3}, \quad \frac{AK}{FK} = \frac{AD}{HF},$$

$$\therefore BH = 3AD,$$

$\therefore F$ 为 BC 的中点,

$$\therefore BF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore HF = 3AD + \frac{1}{2}AD = \frac{7}{2}AD,$$

$$\therefore \frac{AK}{FK} = \frac{AD}{HF} = \frac{2}{7},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AKC}}{S_{\triangle CFK}} = \frac{AK}{FK} = \frac{2}{7},$$

$$\therefore AM \parallel CK,$$

$$\therefore S_{\triangle ACK} = S_{\triangle MCK},$$

$$\therefore S_{\triangle KMC} : S_{\triangle KFC} = 2 : 7 .$$

【点睛】 本题考查矩形的性质，等腰梯形的性质，平行四边形的性质，斜边上的中线，等边对等角，相似三角形的判定和性质等知识点，熟练掌握相关知识点，合理添加辅助线，构造相似三角形，是解题的关键.