

杨浦区 2022 学年度第二学期初三质量调研 (二)

数学试卷

(满分 150 分, 考试时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;

2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;

3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列各数中, 无理数是 ()

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{22}{7}$

C. $\sqrt{4}$

D. 0.101001000

【答案】A

【解析】

【分析】无理数就是无限不循环小数. 理解无理数的概念, 一定要同时理解有理数的概念, 有理数是整数与分数的统称. 即有限小数和无限循环小数是有理数, 而无限不循环小数是无理数. 由此即可判定选择项.

【详解】解: A、 $\frac{\pi}{2}$ 是无理数, 故此选项符合题意;

B、 $\frac{22}{7}$ 是分数, 属于有理数, 故此选项不符合题意;

C、 $\sqrt{4} = 2$ 是有理数, 故此选项不符合题意;

D、0.101001000 是有限小数, 属于有理数, 故此选项不符合题意.

故选: A.

【点睛】此题主要考查了无理数的定义, 其中初中范围内学习的无理数有: π , 2π 等; 开方开不尽的数; 以及像 0.1010010001..., 等有这样规律的数, 熟练掌握无理数的定义是解题关键.

2. 下列计算中, 正确的是 ()

A. $a^3 + a^3 = 2a^6$

B. $(a^3)^3 = a^6$

C. $a^3 \cdot a = a^4$

D. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

【答案】C

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法、幂的乘方、合并同类项以及完全平方公式逐项计算即可.

【详解】解: A. $a^3 + a^3 = 2a^3$, 故选项 A 不符合题意;

B. $(a^3)^3 = a^9$, 故选项 B 不符合题意;

C. $a^3 \cdot a = a^4$, 故选项 C 符合题意;

D. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, 故选项 D 不符合题意.

故选: C.

【点睛】本题主要考查了同底数幂的乘法、幂的乘方、合并同类项以及完全平方公式等知识, 熟练掌握相关运算法则是解答本题的关键.

3. 下列各统计量中, 表示一组数据波动程度的量是 ()

A. 方差

B. 众数

C. 平均数

D. 频数

【答案】A

【解析】

【分析】根据方差、众数、平均数、频数的意义即可求解.

【详解】解: 方差是表示一组数据波动程度的量, 众数、平均数是表示一组数据集中趋势的量, 频数是表示数据出现的次数,

故选 A.

【点睛】本题考查了方差、众数、平均数、频数的意义, 掌握以上知识是解题的关键.

4. 平面直角坐标系 xOy 中, 若点 $A(x_1, 2)$ 和 $B(x_2, 4)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 图像上, 则下列关系式正确的是 ()

A. $x_1 > x_2 > 0$

B. $x_2 > x_1 > 0$

C. $x_1 < x_2 < 0$

D. $x_2 < x_1 < 0$

【答案】A

【解析】

【分析】根据反比例函数图像的特点即可求解.

【详解】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$,

$\therefore$ 反比例函数图像经过第一、三象限, 在第一象限中, 函数值 y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 点 $A(x_1, 2)$ 和 $B(x_2, 4)$ 中, $2 < 4$,

$\therefore 0 < x_2 < x_1$, 即 $x_1 > x_2 > 0$,

故选：A.

【点睛】本题主要考查反比例函数图像的特点，掌握反比例函数图像的增减性是解题的关键.

5. 下列图形中，是中心对称但不是轴对称的图形是（ ）

- A. 角 B. 平行四边形 C. 等腰梯形 D. 正五边形

【答案】B

【解析】

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念，轴对称图形两部分沿对称轴折叠后可重合；中心对称图形是图形沿对称中心旋转 180 度后与原图重合. 根据两个定义即可作出判断.

【详解】A. 角是轴对称图形，不是中心对称图形，故不符合题意；

B. 平行四边形是中心对称图形，不是轴对称图形，故符合题意；

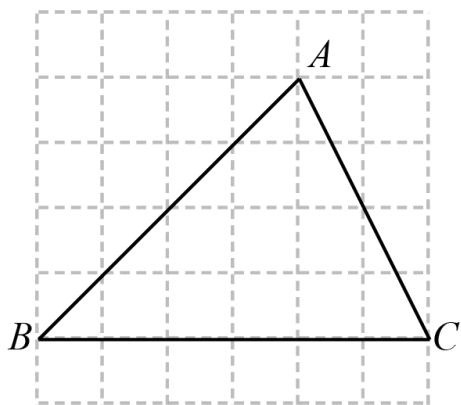
C. 等腰梯形是轴对称图形，不是中心对称图形，故不符合题意；

D. 正五边形是轴对称图形，不是中心对称图形，故不符合题意；

故选 B.

【点睛】题目主要考查轴对称图形、中心对称图形的判断，熟练掌握两种图形的定义是解题关键.

6. 新定义：由边长为 1 的小正方形构成的网格图中，每个小正方形的顶点称为格点，顶点都在格点上的三角形称为格点三角形. 如图，已知 $\triangle ABC$ 是 6×6 的网格图中的格点三角形，那么该网格中所有与 $\triangle ABC$ 相似且有一个公共角的格点三角形的个数是（ ）



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

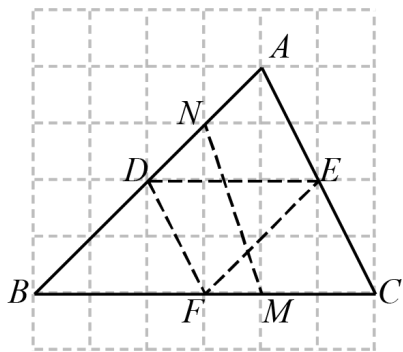
【答案】D

【解析】

【分析】取 AB, BC, AC 的中点 D, F, E ，再取网格点 M, N ，连接格点 DE, DF, EF, MN ，结合中位线的性质可证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ， $\triangle BDF \sim \triangle BAC$ ， $\triangle CEF \sim \triangle CAB$ ，再根据 $BN = 3\sqrt{2}$ ， $BM = 4$ ，

$BA = 4\sqrt{2}$ ， $BC = 6$ ，可得 $\frac{BN}{BM} = \frac{BC}{BA}$ ，结合 $\angle ABC = \angle MBN$ ，有 $\triangle ABC \sim \triangle MBN$ ，即可获得答案.

【详解】解：如图，取 AB, BC, AC 的中点 D, F, E ，再取网格点 M, N ，连接格点 DE, DF, EF, MN ，



则 $DE \parallel BC$ ，且 $DE = \frac{1}{2}BC$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle B$ ， $\angle AED = \angle C$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ 。

同理可证： $\triangle BDF \sim \triangle BAC$ ， $\triangle CEF \sim \triangle CAB$ 。

$\because BN = 3\sqrt{2}$ ， $BM = 4$ ， $BA = 4\sqrt{2}$ ， $BC = 6$ ，

$$\therefore \frac{BN}{BM} = \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{4 \times \sqrt{2}} = \frac{BC}{BA}，$$

$$\therefore \frac{BN}{BM} = \frac{BC}{BA}，\angle ABC = \angle MBN，$$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle MBN$ ，

综上，满足条件的三角形有 4 个，

故选：D。

【点睛】本题主要考查了中位线的性质、相似三角形的判定等知识，熟练掌握相似三角形的判定条件是解答本题的关键。

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 计算： $-3-2=$ _____。

【答案】 -5

【解析】

【分析】根据有理数的减法进行计算即可求解。

【详解】解： $-3-2 = -3+(-2) = -5$ 。

故答案为：-5。

【点睛】本题考查了有理数的减法运算，掌握有理数的减法法则是解题的关键。

8. 函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的定义域为_____.

【答案】 $x \neq 1$

【解析】

【分析】 求函数的定义域就是找使函数有意义的自变量的取值范围.

【详解】 解：函数要有意义，则 $x-1 \neq 0$,

解得： $x \neq 1$,

故答案为： $x \neq 1$.

【点睛】 本题考查的知识点是函数的定义域，关键要知道函数有意义的自变量的取值范围.

9. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的其中一个有理化因式是_____.

【答案】 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

【解析】

【分析】 根据有理化因式的定义：两个根式相乘的积不含根号，可得答案.

【详解】 $a-b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$,

故 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的有理化因式可以是 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

故答案为 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

【点睛】 考查了分母有理化，正确选择两个二次根式，使它们的积符合平方差公式是解答问题的关键.

10. 不等式组 $\begin{cases} 2-x > 0 \\ 2x+3 > 1 \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 $-1 < x < 2$

【解析】

【分析】 分别解出不等式组中的每一个不等式，然后根据大小小大中间找得出原不等式组的解集即可.

【详解】 解： $\begin{cases} 2-x > 0 \text{①} \\ 2x+3 > 1 \text{②} \end{cases}$,

解不等式①，得： $x < 2$,

解不等式②，得： $x > -1$,

所以不等式组的解集为 $-1 < x < 2$,

故答案为： $-1 < x < 2$.

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式组，熟练掌握解一元一次不等式组的解集的确定方法“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小无处找”是解题的关键.

11. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 m 的值是_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 利用一元二次方程根的判别式求解即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4m = 0,$$

解得 $m = 1$

故答案为: 1.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 若

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 则方程有两个不相等的实数根, 若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 则方程有两个相等的实数根, 若

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 则方程没有实数根.

12. 如果抛物线 $y = ax^2$ 在对称轴左侧呈上升趋势, 那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < 0$

【解析】

【分析】 利用二次函数的性质得到抛物线开口向下, 则可得 a 的取值范围.

【详解】 解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2$ 在对称轴左侧呈上升趋势,

$\therefore$ 抛物线开口向下,

$\therefore a < 0$,

故答案为: $a < 0$.

【点睛】 本本题考查了二次函数图象与系数的关系: 二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小. 当 $a > 0$ 时, 抛物线开口向上; 当 $a < 0$ 时, 抛物线开口向下.

13. 一个不透明的盒子中装有 3 个红球, 2 个黄球, 这些球除了颜色外无其他差别, 从中随机摸出一个小球, 则摸到黄球的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】 先算出总的球的个数, 直接利用概率公式求解即可求得答案.

【详解】 解: 总的球数为: $3+2=5$ 个,

∴ 从中随机摸出一个球，恰好是黄球的概率为： $P = \frac{2}{5}$ ，

故答案为： $\frac{2}{5}$ 。

【点睛】本题主要考查了概率公式：随机事件 A 的概率 $P(A)$ = 事件 A 可能出现的结果数除以所有可能出现的结果数。

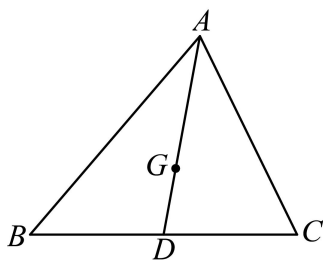
14. 已知一个 40 个数据的样本，把它分成 6 组，第一组到第四组的频数分别是 10、5、7、6，第五组的频率是 0.1，那么第六组的频数是_____。

【答案】8

【解析】

【详解】解：根据题意，得：第一组到第四组的频率和是 $\frac{28}{40} = 0.7$ 。又 ∵ 第五组的频率是 0.10，∴ 第六组的频率为 $1 - (0.7 + 0.1) = 0.2$ ，∴ 第六组的频数为： $40 \times 0.2 = 8$ 。故答案为 8。

15. 如图，已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，设 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{AG}$ 用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 可表示为_____。



【答案】 $\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】根据三角形重心的性质得出 D 点是 BC 边的中点，求出 $\overrightarrow{CD}$ ，再由向量的加法法则求出 $\overrightarrow{AD}$ ，然后根据 G 是 $\triangle ABC$ 的重心即可求出 $\overrightarrow{AG}$ 。

【详解】如图，D 点是 AB 边的中点，G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

∵ $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ ，D 点是 AB 边的中点，

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

∵ G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}.$$

故答案为： $\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$ 。

【点睛】 本题考查三角形的重心，向量的计算等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

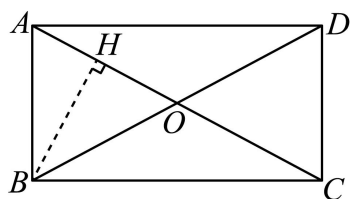
16. 如果一个矩形的面积是 40，两条对角线夹角的余切值是 $\frac{3}{4}$ ，那么它的一条对角线长是_____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 作 $BH \perp AC$ 于 H . 由四边形 $ABCD$ 是矩形，推出 $OA = OC = OD = OB$ ，设 $OA = OC = OD = OB = 5a$ ，由余切函数，可得 $BH = 4a$ ， $OH = 3a$ ，由题意： $2 \times \frac{1}{2} \times 10a \times 4a = 40$ ，求出 a 即可解决问题.

【详解】 解：如图，作 $BH \perp AC$ 于 H .



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore OA = OC = OD = OB$ ，

设 $OA = OC = OD = OB = 5a$ ，则 $AC = 10a$.

$\because$ 根据题意得： $\cot \angle BOH = \frac{3}{4} = \frac{OH}{BH}$ ，

$\therefore BH = 4a$ ， $OH = 3a$ ，

由题意： $2 \times \frac{1}{2} \times 10a \times 4a = 40$ ，

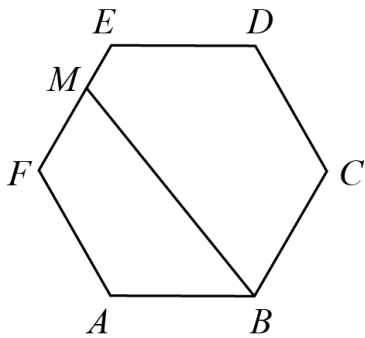
$\therefore a = 1$ ，

$\therefore AC = 10$.

故答案为 10.

【点睛】 本题考查了矩形的性质、解直角三角形等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题，学会利用参数构建方程解决问题.

17. 如图，已知点 M 在正六边形 $ABCDEF$ 的边 EF 上运动，如果 $AB = 1$ ，那么线段 BM 的长度的取值范围是_____.

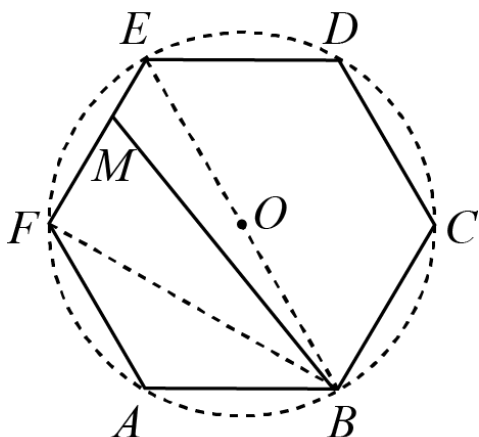


【答案】 $\sqrt{3} \leq BM \leq 2$

【解析】

【分析】根据题意，作出正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆为圆 O ，连接 BE, BF ，则点 O 在 BE 上，根据正多边形的性质及内角和得出 $\angle A = \angle AFE = 120^\circ$ 。再由各角之间的关系得出 $\angle BFE = 90^\circ$ ，然后在 $Rt\triangle BEF$ 中，利用含 30° 度角的直角三角形的性质求解即可。

【详解】解：如图，正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆为圆 O ，连接 BE, BF ，则点 O 在 BE 上，



$\because$ 正六边形 $ABCDEF$

$$\therefore AB = AF = EF = 1, \angle A = \angle AFE = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle AFB = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BFE = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle BEF \text{ 中, } BE = 2AB = 2, \angle EBF = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

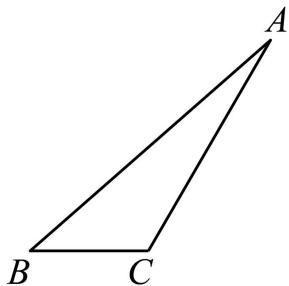
$$\therefore BF = \cos \angle EBF \cdot EB = \sqrt{3},$$

$\therefore$ 点 M 在正六边形 $ABCDEF$ 的边 EF 上运动时线段 BM 的长度的取值范围是 $\sqrt{3} \leq BM \leq 2$,

故答案为: $\sqrt{3} \leq BM \leq 2$.

【点睛】本题主要考查了正多边形的性质，含 30° 度角的直角三角形的性质及解三角形，理解题意，作出临界图形是解题关键.

18. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 7, \angle ACB = 120^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 60° ，点 A, C 分别落在点 D, E 处，联结 DC ，如果 $DC \perp AC$ ，那么边 BC 的长_____.

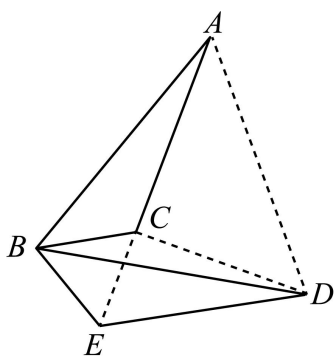


【答案】 $\sqrt{7}$

【解析】

【分析】由旋转变换易证 $DE = AC$ ， $DE = AC$ ， $\angle BED = \angle BCA = 120^\circ$ ， $\angle DEC = 60^\circ$ ，由 $DC \perp AC$ ，得 $\angle ACD = \angle ECD = 90^\circ$ ；设 $CE = x$ ，由三角函数得 $DE = 2x$ ， $CD = \sqrt{3}x$ ；在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，运用勾股定理求解得 $x = \sqrt{7}$ ，所以 $BC = \sqrt{7}$ 。

【详解】如图，由旋转知， $DE = AC$ ， $\angle BED = \angle BCA = 120^\circ$ ， $\triangle ABD$ ， $\triangle BCE$ 为等边三角形，
 $\therefore \angle BEC = \angle BCE = 60^\circ$ ， $CE = BC$ ， $AD = AB = 7$ ，



$$\therefore \angle ACE = 180^\circ, \angle DEC = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore DC \perp AC$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ECD = 90^\circ$$

$$\text{设 } CE = x, \text{ 则 } DE = 2x, CD = \sqrt{3}x$$

$$\text{Rt}\triangle ACD \text{ 中, } AD^2 = AC^2 + CD^2$$

$$\therefore 7^2 = (2x)^2 + (\sqrt{3}x)^2, \text{ 解得 } x = \sqrt{7} \text{ (负值舍去),}$$

故答案为： $\sqrt{7}$

【点睛】本题主要考查旋转变换、全等三角形的性质、等边三角形的性质、勾股定理及特殊角三角函数；能够灵活运用相关知识导出线段间的数量关系是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $8^{\frac{1}{2}} + |1 - \sqrt{2}| - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (\pi - \sqrt{3})^0$

【答案】 $3\sqrt{2} - 2$

【解析】

【分析】先计算分数指数幂及零指数与负整数指数幂, 绝对值化简, 然后进行二次根式的加减法即可.

【详解】解: $8^{\frac{1}{2}} + |1 - \sqrt{2}| - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (\pi - \sqrt{3})^0$
 $= 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 - 2 + 1$
 $= 3\sqrt{2} - 2.$

【点睛】题目主要考查分数指数幂及零指数与负整数指数幂, 绝对值化简, 二次根式的加减法等, 熟练掌握各个运算法则是解题关键.

20. 解方程组: $\begin{cases} x - 2y = 5 \text{ ①} \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \text{ ②} \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = -5 \end{cases}$

【解析】

【分析】先将②式因式分解为 $(x + 3y)(x - y) = 0$, 则可得 $(x + 3y) = 0$ 或 $(x - y) = 0$, 再分别与①式联立求解即可.

【详解】解: 由②得: $(x + 3y)(x - y) = 0$,

$$\therefore \begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x - 2y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = -5 \end{cases}$,

$$\therefore \text{原方程组的解为: } \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = -5 \end{cases}.$$

【点睛】本题主要考查了解二元二次方程组, 解题的关键是将②式进行因式分解, 把原方程组转化为两个

二元一次方程组.

21. 某商店购进了一种生活用品, 进价为每件 8 元, 销售过程中发现, 该商品每天的销售量 y (件) 与每件售价 x (元) 之间存在一次函数关系 (其中 $8 \leq x \leq 15$, 且 x 为整数), 部分对应值如下表:

每件售价 x (元)	9	11	13
每天的销售量 y (件)	105	95	85

(1) 求 y 与 x 的函数解析式;

(2) 如果该商店打算销售这种生活用品每天获得 425 元的利润, 那么每件生活用品的售价应定为多少元?

【答案】 (1) $y = -5x + 150$ ($8 \leq x \leq 15$) (2) 13 元

【解析】

【分析】 (1) 待定系数法求解即可;

(2) 由题意知, 利润 $w = (x - 8)(-5x + 150) = -5(x - 19)^2 + 605$, 令 $w = 425$, 则 $-5(x - 19)^2 + 605 = 425$, 计算求解满足要求的 x 值即可.

【小问 1 详解】

解: 设 y 与 x 的函数关系式为 $y = kx + b$, ($8 \leq x \leq 15$),

将 $(9, 105)$, $(11, 95)$ 代入得 $\begin{cases} 105 = 9k + b \\ 95 = 11k + b \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} k = -5 \\ b = 150 \end{cases}$,

$\therefore y = -5x + 150$,

$\therefore y$ 与 x 的函数关系式为 $y = -5x + 150$ ($8 \leq x \leq 15$);

【小问 2 详解】

解: 由题意知, 利润 $w = (x - 8)(-5x + 150) = -5(x - 19)^2 + 605$,

令 $w = 425$, 则 $-5(x - 19)^2 + 605 = 425$,

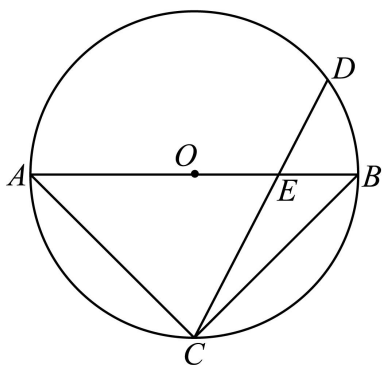
解得 $x = 13$ 或 $x = 25$ (不合题意, 舍去),

$\therefore$ 每件消毒用品的售价为 13 元;

【点睛】 本题考查了一次函数的应用, 二次函数的应用, 二次函数图象与性质. 解题的关键在于对知识的

熟练掌握与灵活运用.

22. 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 CD 与 AB 相交于点 E , $AC = BC$, $AB = 4\sqrt{5}$, $CD = 8$.



(1) 求 $\sin \angle AEC$ 的值;

(2) 求点 A 到弦 CD 的距离.

【答案】(1) $\sin \angle AEC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (2) 6

【解析】

【分析】(1) 连接 OC 、 OD , 过点 O 作 $OF \perp CE$, 根据圆周角定理及直角三角形斜边中线的性质与垂径定理得出 $CF = DF = 4$, 再由相似三角形的判定和性质确定 $EF = 1$, $OE = \sqrt{5}$, 由正弦函数的定义求解即可;

(2) 过点 A 作 $AH \perp CE$, 利用相似三角形的判定和性质即可求解.

【小问 1 详解】

解: 如图, 连接 OC 、 OD , 过点 O 作 $OF \perp CE$,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $AC = BC$,

$\therefore \angle ACB = \angle BOC = 90^\circ$, $AO = BO = CO = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{5}$,

$\because OF \perp CE$,

$\therefore CF = DF = \frac{1}{2}CD = 4$,

$\therefore OF = \sqrt{OC^2 - CF^2} = 2$,

$\because \angle OEF + \angle EOF = 90^\circ$, $\angle OEF + \angle OCE = 90^\circ$,

$\therefore \angle EOF = \angle OCE$,

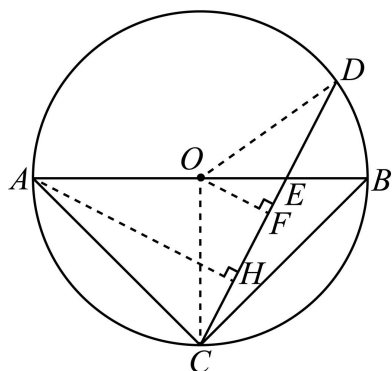
$\therefore \angle OFE = \angle OFC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle OEF \sim \triangle COF$,

$$\therefore \frac{OF}{CF} = \frac{EF}{OF} = \frac{OE}{OC} = \frac{2}{4},$$

$$\therefore EF = 1, OE = \sqrt{5},$$

$$\therefore \sin \angle AEC = \frac{OF}{OE} = \frac{2\sqrt{5}}{5};$$



【小问 2 详解】

过点 A 作 $AH \perp CE$,

$$\therefore AH \parallel OF,$$

$$\therefore \triangle OEF \sim \triangle AEH,$$

$$\therefore \frac{OE}{AE} = \frac{OF}{AH},$$

$$\text{由 (1) 得 } OE = \sqrt{5}, AE = 3\sqrt{5},$$

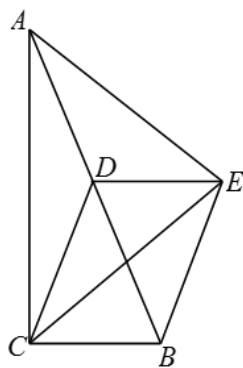
$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{AH},$$

$$\therefore AH = 6,$$

$\therefore$ 求点 A 到弦 CD 的距离为 6.

【点睛】 本题考查圆周角定理、垂径定理、相似三角形的判定与性质、勾股定理，熟练掌握圆周角定理和垂径定理，会利用相似三角形的判定与性质求线段长是解答的关键.

23. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 是边 AB 的中点, $DE \parallel BC, BE \parallel CD$, 联结 AE, CE .



(1) 求证: $\triangle ADE \cong \triangle CDE$;

(2) 如果 CE 平分 $\angle ACB$, 求证: $AC = 3BC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据直角三角形斜边上的中线的性质得出 $CD = AD = BD$, 再由平行线的性质及各角之间的关系得出 $\angle CDE = \angle ADE$, 利用全等三角形的判定证明即可;

(2) 延长 CB 交 AE 的延长线于点 F , 根据角平分线的性质及全等三角形的性质得出 $\angle DAE = \angle DCE$, 再由等边对等角及等腰三角形的判定和性质得出 $\angle DAC = \angle DCA$, 由全等三角形的判定和性质得出 $AE = FE, AC = FC$, 最后由中位线的性质及平行四边形的判定和性质即可证明

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle ACB = 90^\circ$, 点 D 是边 AB 的中点,

$$\therefore CD = AD = BD,$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle DBC, \angle CDE + \angle DCB = 180^\circ,$$

$$\because CD = BD,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DCB,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle DCB,$$

$$\because \angle ADE + \angle BDE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle ADE,$$

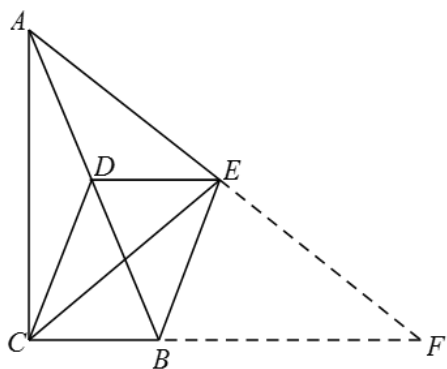
在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDE$ 中,

$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADE = \angle CDE \\ DE = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDE (\text{SAS});$$

【小问 2 详解】

延长 CB 交 AE 的延长线于点 F ,



$\because \angle ACB = 90^\circ$, CE 平分 $\angle ACB$,

$\therefore \angle ACE = \angle BCE = 45^\circ$

$\because \triangle ADE \cong \triangle CDE$

$\therefore \angle DAE = \angle DCE$

$\because AD = CD$,

$\therefore \angle DAC = \angle DCA$,

$\therefore \angle EAC = \angle ACE = 45^\circ$,

$\therefore \angle AEC = \angle FEC = 90^\circ$,

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle FCE$ 中,

$$\begin{cases} \angle ACE = \angle BCE \\ CE = CE \\ \angle AEC = \angle FEC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle FCE (\text{ASA})$

$\therefore AE = FE, AC = FC$,

$\because$ 点 D 是 AB 的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABF$ 的中位线,

$\therefore DE = \frac{1}{2}BF$,

$\because DE \parallel BC, BE \parallel CD$

$\therefore$ 四边形 $DCBE$ 是平行四边形,

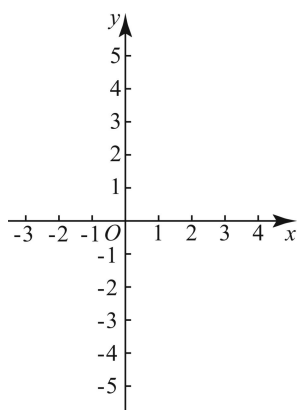
$\therefore DE = BC$,

$\therefore BC = \frac{1}{2}BF$,

$\therefore AC = CF = 3BC$.

【点睛】题目主要考查直角三角形斜边中线的性质，全等三角形的判定和性质，平行四边形的判定和性质及中位线的性质，理解题意，作出辅助线，综合运用这些知识点是解题关键.

24. 已知抛物线 $y = -\frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(3,0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 $C(0,2)$ ，顶点为点 D .



- (1) 求抛物线的表达式和顶点 D 的坐标;
- (2) 点 P 是线段 AB 上的一个动点，过点 P 作 x 轴的垂线交抛物线于点 E ，如果 $PE = PB$ ，求点 P 的坐标;
- (3) 在第 (2) 小题的条件下，点 F 在 y 轴上，且点 F 到直线 EC 、 ED 的距离相等，求线段 EF 的长.

【答案】(1) $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$; $\left(1, \frac{8}{3}\right)$

(2) $P\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

(3) $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】(1) 将点 A 和点 B 的坐标代入抛物线，即可得出其表达式;

(2) 令 $y = 0$ ，确定 $B(-1, 0)$ ，设点 $P(x, 0)$ ， $(-1 < x < 3)$ ，则 $E(x, -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2)$ ，根据题意得出一元二次方程求解即可;

(3) 由 (2) 得: $P\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ，确定 $E\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ，利用待定系数法确定直线 EC 、 ED 的解析式分别为: $y = \frac{1}{3}x + 2$ ， $y = -\frac{1}{3}x + 3$ ，再由等腰三角形的判定和性质及一次函数的性质确定点 F 的坐标，即可求解.

【小问 1 详解】

将点 $C(0, 2)$ 代入抛物线，得 $c = 2$

将点 $A(3, 0)$ 代入抛物线，得 $b = \frac{4}{3}$

∴ 抛物线的解析式为: $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$;

$$\therefore y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 = -\frac{2}{3}(x-1)^2 + \frac{8}{3},$$

∴ 顶点 D 的坐标为 $\left(1, \frac{8}{3}\right)$;

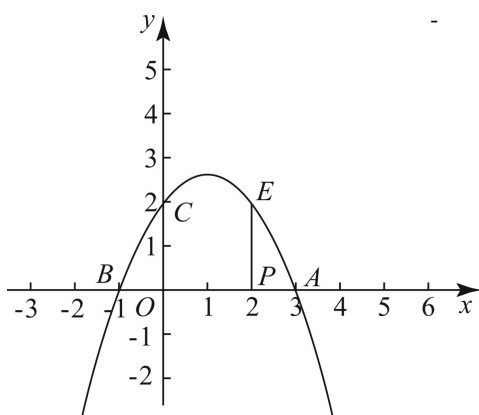
【小问 2 详解】

解: 令 $y = 0$ 得 $0 = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$,

∴ $x = 3$ 或 $x = -1$

∴ $B(-1, 0)$,

设点 $P(x, 0)$, $(-1 < x < 3)$, 则 $E(x, -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2)$, 如图所示:



$$\therefore PE = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2, \quad PB = x - (-1) = x + 1,$$

$$\because PE = PB,$$

$$\therefore -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 = x + 1,$$

解得: $x_1 = -1$ (舍去) 或 $x_2 = \frac{3}{2}$,

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, 0\right);$$

【小问 3 详解】

由 (2) 得: $P\left(\frac{3}{2}, 0\right)$,

∴ 当 $x = \frac{3}{2}$ 时, $y = \frac{5}{2}$,

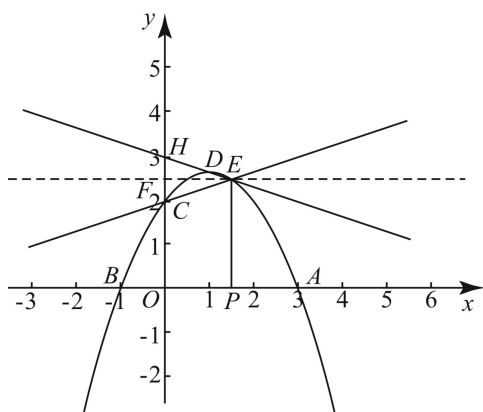
$$\therefore E\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right),$$

设直线 EC 、 ED 的解析式分别为: $y = kx + b$, $y = mx + n$,

$$\text{将点代入得: } \begin{cases} \frac{3}{2}k + b = \frac{5}{2}, \\ b = 2 \end{cases}, \begin{cases} \frac{3}{2}m + n = \frac{5}{2}, \\ m + n = \frac{8}{3} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = \frac{1}{3}, \\ b = 2 \end{cases}, \begin{cases} m = -\frac{1}{3}, \\ n = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 EC 、 ED 的解析式分别为: $y = \frac{1}{3}x + 2$, $y = -\frac{1}{3}x + 3$,



$\therefore$ 直线 EC 、 ED 与 y 轴的交点分别为 $C(0, 2)$, $H(0, 3)$,

$$\therefore EC = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad EH = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 3\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore EC = EH,$$

$\therefore \triangle ECH$ 为等腰三角形,

$\therefore$ 点 F 到直线 EC 、 ED 的距离相等, 且点 F 在 y 轴上,

$\therefore$ 点 F 为 $\triangle ECH$ 的角平分线及高线, 即直线 $y = \frac{5}{2}$ 与 y 轴的交点,

$$\therefore F\left(0, \frac{5}{2}\right),$$

$$\therefore EF = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}.$$

【点睛】 此题主要考查二次函数的综合应用, 包括待定系数确定函数解析式, 线段相等问题及一次函数的性质, 理解题意, 作出相应图象, 综合运用这些知识点是解题关键.

25. 已知在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $AD = 3$, 点 O 是边 AB 上的一点 (不与点 A 重合), 以点 O 为圆心,

OA 长为半径作圆，交射线 AB 于点 G .

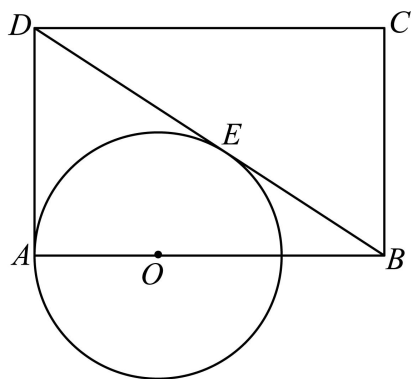


图1

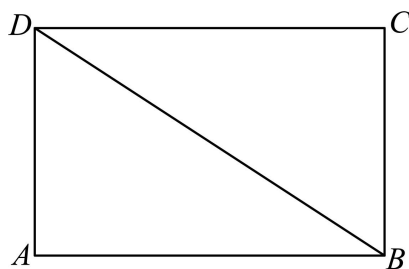


图2

- (1) 如图 1，当 $\odot O$ 与直线 BD 相切时，求半径 OA 的长；
- (2) 当 $\odot O$ 与 $\triangle BCD$ 的三边有且只有两个交点时，求半径 OA 的取值范围；
- (3) 连接 OD ，过点 A 作 $AH \perp OD$ ，垂足为点 H ，延长 AH 交射线 BC 于点 F ，如果以点 B 为圆心， BF 长为半径的圆与 $\odot O$ 相切，求 $\angle ADO$ 的正切值.

【答案】 (1) $\frac{3}{2}$

(2) $\frac{3}{2} < OA < 3$ 或 $\frac{25}{8} < OA \leq 4$

(3) $\frac{2}{5}$ 或 1

【解析】

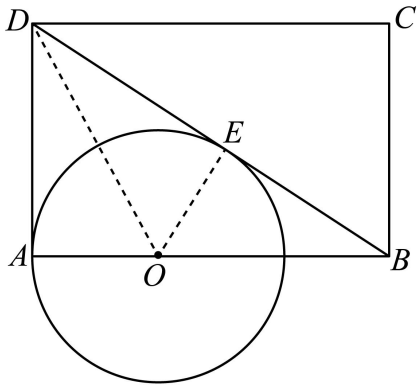
【分析】 (1) 设 $\odot O$ 与直线 BD 的切点为点 E ，连接 OE, OD ，根据全等三角形的判定和性质及勾股定理求解即可；

(2) 分三种临界情况：①当 $\odot O$ 与边 CD 的切点为点 E ，连接 OE ，此时恰好有三个交点，②当 $\odot O$ 恰好经过点 C 时，连接 OC ，③当点 O 与点 B 重合时，作出相应图形求解即可；

(3) 根据题意，分两种情况：①两个圆外切时，②两个圆内切时，作出图形，然后利用相似三角形的判定和性质及正切函数的定义求解即可.

【小问 1 详解】

解：设 $\odot O$ 与直线 BD 的切点为点 E ，连接 OE, OD ，如图所示：



$$\therefore OE \perp BD, OA = OE,$$

$\because$ 矩形 $ABCD$,

$$\therefore \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle DEO = 90^\circ,$$

$$\because OD = OD,$$

$$\therefore \triangle ADO \cong \triangle EDO (\text{HL}),$$

$$\therefore DE = AD = 3,$$

$$\because AB = 4, AD = 3,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5,$$

$$\therefore BE = 5 - 3 = 2,$$

设 $AO = OE = r$, 则 $BO = 4 - r$,

$$\because OE^2 + BE^2 = OB^2,$$

$$\therefore r^2 + 2^2 = (4 - r)^2,$$

$$\text{解得: } r = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{半径 } OA \text{ 的长为 } \frac{3}{2};$$

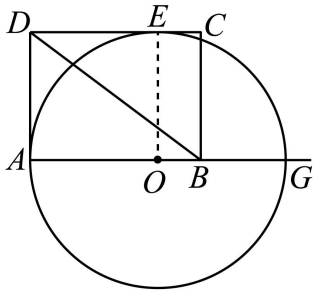
【小问 2 详解】

①如图所示: 当 $\odot O$ 与边 CD 的切点为点 E , 连接 OE , 此时恰好有三个交点,

$$\therefore OE \perp AB,$$

$\therefore$ 四边形 $BOEC$ 为矩形,

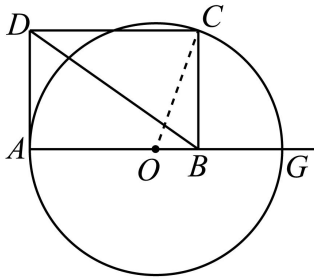
$$\therefore OE = BC = AO = 3,$$



∴由 (1) 得半径 OA 的长为 $\frac{3}{2}$ ，恰好有一个交点，

∴当 $\frac{3}{2} < OA < 3$ 时，满足条件；

②当 $\odot O$ 恰好经过点 C 时，连接 OC ，如图所示：



设 $AO = OC = r$ ，则 $BO = 4 - r$ ，

$$\because OB^2 + BC^2 = OC^2,$$

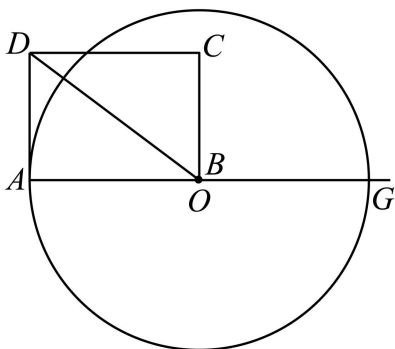
$$\therefore (4 - r)^2 + 3^2 = r^2,$$

$$\text{解得：} r = \frac{25}{8},$$

∴半径 OA 的长为 $\frac{25}{8}$ ；

∴当 $3 \leq OA < \frac{25}{8}$ 时， $\odot O$ 与 $\triangle BCD$ 的三边的交点多于 2 个，不满足条件；

③当点 O 与点 B 重合时，如图所示，满足条件，

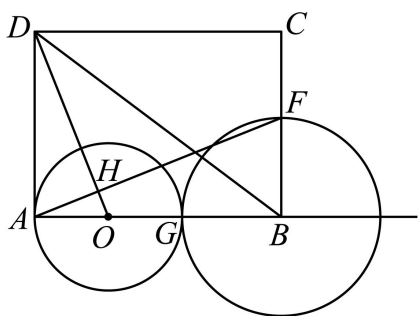


∴当 $\frac{25}{8} < OA \leq 4$ 时，满足条件；

综上所述可得： $\frac{3}{2} < OA < 3$ 或 $\frac{25}{8} < OA \leq 4$ 时，满足条件；

【小问 3 详解】

①当两个圆外切时，如图所示：



$$\because AH \perp OD,$$

$$\therefore \angle AOD + \angle BAF = 90^\circ,$$

$$\because \angle ADO + \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle ADO,$$

$$\because \angle DAO = \angle ABF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADO \sim \triangle BAF,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AO}{BF} = \frac{3}{4},$$

$$\text{设 } AO = r, \quad BF = r_1,$$

$$\therefore \frac{r}{r_1} = \frac{3}{4}, \quad \text{即 } r_1 = \frac{4r}{3},$$

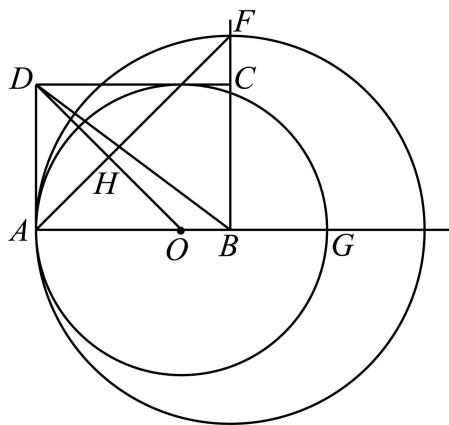
$\because$ 两个圆相切,

$$\therefore r_1 + 2r = 4, \quad \text{即 } \frac{4r}{3} + 2r = 4,$$

$$\text{解得: } r = \frac{6}{5} = OA,$$

$$\therefore \tan \angle ADO = \frac{AO}{AD} = \frac{2}{5};$$

②当两个圆内切时，如图所示：



$$\therefore BF = BA = 4,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle AFB = 45^\circ,$$

$$\because AH \perp OD,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle AOH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle AOD = 45^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle ADO = \tan 45^\circ = 1;$$

综上所述： $\angle ADO$ 的正切值为 $\frac{2}{5}$ 或 1.

【点睛】 题目主要考查切线的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，矩形的性质及勾股定理解三角形，正切函数的定义等，理解题意，作出辅助线，综合运用这些知识点是解题关键.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>)
致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群
出品的《老师请开讲》私享直播课等
增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>)
是学科网旗下智能题库，拥有小初高全
学科超千万精品试题，提供智能组卷、
拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能