

2024 年度杨浦区第二学期第三次模拟考试数学学科

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列分数中, 能化为有限小数的是 ()

A. $\frac{1}{12}$

B. $\frac{3}{12}$

C. $\frac{1}{15}$

D. $\frac{5}{15}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查分数和小数的互化, 解题的关键是运用有理数的除法法则分别计算即可判断.

【详解】解: A. $\frac{1}{12} = 0.08\dot{3}$, 故此选项不符合题意;

B. $\frac{3}{12} = 0.25$, 故此选项符合题意;

C. $\frac{1}{15} = 0.0\dot{6}$, 故此选项不符合题意;

D. $\frac{5}{15} = 0.\dot{3}$, 故此选项不符合题意.

故选: B.

2. 下列关于 x 的方程, 有实数根的是 ()

A. $x^4 + 1 = 0$

B. $x^2 + mx - 2 = 0$

C. $\frac{x}{x^2 - 4} = \frac{2}{x^2 - 4}$

D. $\sqrt{x+1} + 2 = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程根的判断式, 解分式方程, 偶数次方及二次根式非负性, 解题的关键是根据偶数次方的非负性判断选项 A; 根据一元二次方程根的判断式判断选项 B; 解分式方程可判断选项 C; 根据二次根式非负性判断选项 D.

【详解】解: A. $\because x^4 \geq 0$, 则 $x^4 + 1 \geq 1$,

$\therefore$ 方程 $x^4 + 1 = 0$ 没有实数根, 故此选项不符合题意;

B. $\because \Delta = m^2 - 4 \times 1 \times (-2) = m^2 + 8 > 0$,

$\therefore$ 方程 $x^2 + mx - 2 = 0$ 有实数根, 故此选项符合题意;

C. 在方程两边同乘以 $(x^2 - 4)$, 得: $x = 2$,

检验：把 $x=2$ 代入 (x^2-4) ，得： $2^2-4=0$ ，

$\therefore x=2$ 不是原方程的根，

$\therefore$ 方程 $\frac{x}{x^2-4} = \frac{2}{x^2-4}$ 无解，故此选项不符合题意；

D. $\because \sqrt{x+1} \geq 0$ ，

$\therefore \sqrt{x+1} + 2 \geq 2$ ，

$\therefore$ 方程 $\sqrt{x+1} + 2 = 0$ 无解，故此选项不符合题意.

故选：B.

3. 体育课上，甲、乙两名同学分别进行了6次立定跳远测试，经计算他们的平均成绩相同. 若要比 较这两名同学的成绩哪一个更为稳定，通常 需要比较他们成绩的（ ）

A. 平均数 B. 众数 C. 中位数 D. 方差

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查方差，方差是反映一组数据的波动大小的一个量. 方差越大，则各数据与其平均值的离散程度越大，稳定性也越小；反之，则各数据与其平均值的离散程度越小，稳定性越好.

【详解】由于方差能反映数据的稳定性，需要比较这两名学生立定跳远成绩的方差.

故选 D.

4. 关于抛物线 $y = ax^2 - 2ax + a - 4$ ($a < 0$)，下列说法错误的是（ ）

- A. 该抛物线的对称轴是直线 $x = 1$
- B. 该抛物线的顶点坐标是 $(1, -4)$
- C. 该抛物线与 x 轴有两个交点
- D. 该抛物线在对称轴的左侧部分， y 随 x 的增大而增大

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数的图象和性质. 根据二次函数的图象和性质，逐项判断即可求解.

【详解】解： $y = ax^2 - 2ax + a - 4$

$$= a(x^2 - 2x + 1) - 4$$

$$= a(x-1)^2 - 4,$$

∴ 该抛物线的对称轴是直线 $x=1$ ，顶点坐标是 $(1, -4)$ ，故 A，B 选项正确，不符合题意；

∵ $a < 0$ ，

∴ $\Delta = (-2a)^2 - 4a(a-4) = 16a < 0$ ，该抛物线在对称轴的左侧部分， y 随 x 的增大而增大，

∴ 该抛物线与 x 轴没有交点，故 C 选项错误，符合题意；D 选项正确，不符合题意；

故选：C

5. 已知点 A 在半径为 3 的圆 O 上，如果点 A 到直线 a 的距离是 6，那么圆 O 与直线 a 的位置关系是 ()

- A. 相交 B. 相离 C. 相切 D. 以上答案都不对

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了直线与圆的位置关系，若 $d < r$ ，则直线与圆相交；若 $d = r$ ，则直线与圆相切；若 $d > r$ ，则直线与圆相离；根据圆心到直线的距离 d 与半径 r 的大小关系解答即可；

【详解】∵ A 在半径为 3 的圆 O 上，如果点 A 到直线 a 的距离是 6，

∴ 圆 O 与直线 a 的位置关系可能是相切或相离，

故选：D.

6. 在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AB = BC$ ，添加下列条件后仍然不能推得四边形 $ABCD$ 为菱形的是 ()

- A. $AB = CD$ B. $AD \parallel BC$ C. $AB = AD$ D. $AD = CD$

【答案】C

【解析】

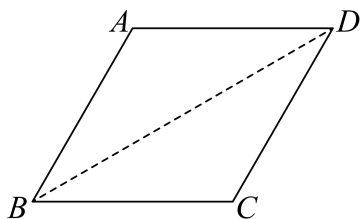
【分析】本题主要考查了平行四边形和菱形的判定，以及全等三角形的判定和性质，利用平行四边形的判定和性质以及全等三角形的判定和性质判定逐项判断是否为菱形即可.

【详解】解：A. 添加 $AB = CD$ ，∵ $AB \parallel CD$ ，∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∵ $AB = BC$ ，∴ $ABCD$ 是菱形，故该选项不符合题意；

B. 添加 $AD \parallel BC$ ，∵ $AB \parallel CD$ ，∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∵ $AB = BC$ ，∴ $ABCD$ 是菱形，故该选项不符合题意；

C. 添加 $AB = AD$ ，∵ $AB = BC$ ，∴ $AD = BC$ ，不能得出四边形 $ABCD$ 是菱形，故该选项符合题意；

D. 添加 $AD = CD$ ，连接 DB ，如图，



$$\therefore AB = BC, AC = CA,$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle BCD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD, \angle ADB = \angle CDB, \angle A = \angle C,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CDB,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ADC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

则 $ABCD$ 是菱形,

故该选项不符合题意;

故选 : C.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 单项式 $-2x^3y$ 的次数是_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题主要考查了单项式次数的定义, 在单项式中所有字母的指数之和叫做单项式的次数, 据此求解即可.

【详解】 解: 单项式 $-2x^3y$ 的次数 $3+1=4$,

故答案为: 4.

8. 今年春节黄金周上海共接待游客约 16750000 人, 16750000 这个数用科学记数法表示为_____.

【答案】 1.675×10^7

【解析】

【分析】 此题考查了正整数指数科学记数法, 对于一个绝对值大于 10 的数, 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为比原数的整数位数少 1 的正整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

【详解】解： $16750000 = 1.675 \times 10^7$.

故答案为： 1.675×10^7 .

9. 已知 $f(x) = \sqrt{x+12}$ ，那么 $f(4) =$ _____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了函数、二次根式，把 $x=4$ 代入 $f(x) = \sqrt{x+12}$ 中计算即可求解，理解函数值的计算方法是解题的关键.

【详解】解： $\because f(x) = \sqrt{x+12}$,

$$\therefore f(4) = \sqrt{4+12} = 4,$$

故答案为： 4.

10. 已知方程 $\frac{x}{x^2-4} - \frac{x^2-4}{x} = 2$ ，如果设 $y = \frac{x}{x^2-4}$ ，那么原方程转化为关于 y 的整式方程为_____.

【答案】 $y^2 - 2y - 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了换元法解分式方程，熟练掌握换元法是解题的关键；根据还原法求解即可；

【详解】 方程 $\frac{x}{x^2-4} - \frac{x^2-4}{x} = 2$ ，如果设 $y = \frac{x}{x^2-4}$ ，

$$\text{则 } y - \frac{1}{y} = 2,$$

$$\therefore y^2 - 2y - 1 = 0,$$

故答案为： $y^2 - 2y - 1 = 0$;

11. 在四张完全相同的卡片上分别印有等边三角形、圆、平行四边形、等腰梯形的图案，现将印有图案的一面朝下，混合后随机抽取一张，则抽到的卡片上印有的图案是中心对称图形的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ ##0.5

【解析】

【分析】 本题考查了中心对称图形，概率的求法，掌握概率公式：概率=所求情况数与总情况数之比是解题关键；直接利用概率公式计算即可；

【详解】解：4个图案中，中心对称图形的有2个，分别是平行四边形、圆，

∴抽到的卡片上印有的图案是中心对称图形的概率是 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ，

故答案为： $\frac{1}{2}$ ；

12. 一个正多边形的中心角是 40° ，则这个正多边形的边数为_____.

【答案】九##9

【解析】

【分析】根据正多边形的每个中心角相等，且所有中心角的度数和为 360° 进行求解即可.

【详解】解：设这个正多边形的边数为 n ，

∴这个正多边形的中心角是 40° ，

$$\therefore 40^\circ \cdot n = 360^\circ,$$

$$\therefore n = 9,$$

∴这个正多边形是九边形，

故答案为：九.

【点睛】本题主要考查了正多边形的性质，熟知正多边形中心角的度数和为 360° 是解题的关键.

13. 已知在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点， $BC = 2AD$ ，设 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ，那么 $\overrightarrow{EF} =$ _____。（用含 $\vec{a}$ 的式子表示）

【答案】 $\frac{3}{2}\vec{a}$

【解析】

【分析】本题考查了平面向量，梯形中位线定理；由梯形中位线定理即可求解.

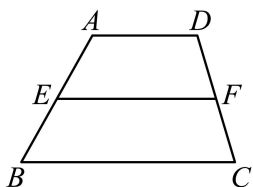
【详解】解：∵ $AD \parallel BC$ ，点 E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}(AD + BC),$$

$$\therefore BC = 2AD,$$

$$\therefore EF = \frac{3}{2}AD,$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\vec{a};$$



故答案为: $\frac{3}{2}\vec{a}$.

14. 如果函数 $y = (x-1)^2 + m$ 的图像向左平移 2 个单位后经过原点, 那么 $m =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题主要考查二次函数图象平移规律, 待定系数法求二次函数解析式, 解决本题的关键是要熟练掌握二次函数平移规律; 根据二次函数平移规律: 上加下减, 左加右减, 进行求解即可;

【详解】 把函数 $y = (x-1)^2 + m$ 的图像向左平移 2 个单位后得 $y = (x-1+2)^2 + m = (x+1)^2 + m$,

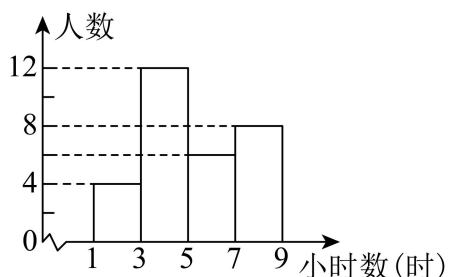
$\therefore$ 平移后的图像经过原点,

$$\therefore 0 = (0+1)^2 + m,$$

解得: $m = -1$,

故答案为: -1;

15. 4月23日是世界读书日, 某校为了解该校 210 名六年级学生每周阅读课外书籍的时间, 随机抽取了该校 30 名六年级学生, 调查了他们每周阅读课外书籍的时间, 并制作成如图所示的频数分布直方图, 那么估计该校六年级学生每周阅读课外书籍的时间不少于 5 小时的学生约有 _____ 名.



(每组包括最小值, 不包括最大值)

【答案】 98

【解析】

【分析】 本题考查频数分布直方图, 样本估计总体. 用 210 乘被抽取的 30 名六年级学生中每周阅读课外书籍的时间不少于 5 小时所占的比例即可. 解题的关键是正确理解题意并从频数分布直方图中获取相关信息.

【详解】 解: 由频数分布直方图可知:

每周阅读课外书籍的时间在 1 至 5 小时的学生约有: $4+12=16$ (名),

$\therefore$ 在被抽取的 30 名六年级学生中每周阅读课外书籍的时间不少于 5 小时的学生约有:

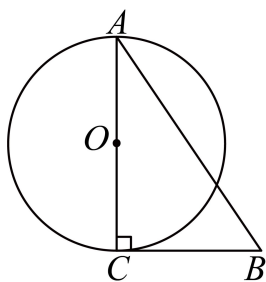
$$30-16=14 \text{ (名)},$$

$$\therefore 210 \times \frac{14}{30} = 98 \text{ (名)}$$

$\therefore$ 估计该校六年级学生每周阅读课外书籍的时间不少于 5 小时的学生约有 98 名.

故答案为：98.

16. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $\tan B = \frac{3}{2}$ ，如果以 AC 为直径的圆 O 与以 B 为圆心、 r 为半径的圆 B 相交，那么 r 的取值范围是_____.



【答案】 $2 < r < 8$

【解析】

【分析】 本题考查了两圆位置关系：相交，当 $R - r < d < R + r$ 时，两圆相交；连接 OB ，则可求得 OB ，根据条件 $R - r < d < R + r$ 即可求得 r 的取值范围.

【详解】 解：连接 OB ，如图，

$$\because AC = 6, \tan B = \frac{3}{2}, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore OC = 3, \tan \angle ABC = \frac{3}{2} = \frac{AC}{BC},$$

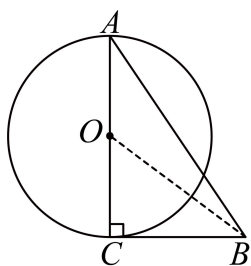
$$\therefore BC = 4,$$

$$\therefore OB = \sqrt{OC^2 + BC^2} = 5;$$

$$\because \odot O, \odot B \text{ 相交},$$

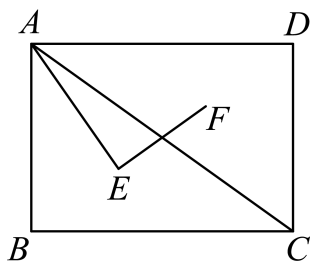
$$\therefore r - 3 < 5 < r + 3,$$

$$\text{即 } 2 < r < 8;$$



故答案为： $2 < r < 8$.

17. 如图，已知矩形 $ABCD$ ， AC 为对角线，点 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 的重心，连接 AE 、 EF ，如果 $AE \perp EF$ ，那么 $\sin \angle EAB =$ _____.



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】延长 AE 交 BC 于 M ，连接 AF 并延长 AF 交 CD 于 N ，连接 CF 并延长 CF 交 AD 于 G ，连接 CE 并延长 CE 交 AB 于 H ，连接 MN 、 GN 、 HM ，根据重心的定义、三角形中位线定理及相似三角形的性质可推出 $\frac{AE}{AM} = \frac{2}{3}$ ， $\frac{AF}{AN} = \frac{2}{3}$ ， $MB = CM$ ， $CN = DN$ ，得到 $\frac{AE}{AM} = \frac{AF}{AN}$ ，判定 $\triangle AEF \sim \triangle AMN$ ，推出 $\angle AEF = \angle AMN = 90^\circ$ ，再证明 $ABM \sim MCN$ ，推出 $\frac{AB}{MC} = \frac{BM}{CN}$ ，得到 $MB^2 = \frac{1}{2}AB^2$ ，再用勾股定理求出 AM ，即可得解。

【详解】解：延长 AE 交 BC 于 M ，连接 AF 并延长 AF 交 CD 于 N ，连接 CF 并延长 CF 交 AD 于 G ，连接 CE 并延长 CE 交 AB 于 H ，连接 MN 、 GN 、 HM ，

$\therefore$ 点 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 的重心，

$\therefore AM$ 、 CH 分别是 BC 、 AB 边上的中线，即点 M 、 H 分别是 BC 、 AB 边上的中点；

AN 、 CG 分别是 CD 、 AD 边上的中线，即点 N 、 G 分别是 CD 、 AD 边上的中点，

$\therefore HM \parallel AC$ ， $HM = \frac{1}{2}AC$ ； $GN \parallel AC$ ， $GN = \frac{1}{2}AC$ ， $MB = CM$ ， $CN = DN$ ，

$\therefore \angle ECA = \angle EHM$ ， $\angle EAC = \angle EMH$ ； $\angle FCA = \angle FGN$ ， $\angle FAC = \angle FNG$ ，

$\therefore \triangle ECA \sim \triangle EHM$ ， $\triangle FCA \sim \triangle FGN$ ，

$\therefore \frac{AE}{ME} = \frac{AC}{HM} = \frac{2HM}{HM} = 2$ ， $\frac{AF}{NF} = \frac{AC}{GN} = \frac{2GN}{GN} = 2$ ，

$\therefore \frac{AE}{AM} = \frac{AE}{AE + EM} = \frac{2EM}{2EM + EM} = \frac{2}{3}$ ， $\frac{AF}{AN} = \frac{AF}{AF + FN} = \frac{2FN}{2FN + FN} = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore \frac{AE}{AM} = \frac{AF}{AN}$ ，

$\therefore \angle EAF = \angle MAN$ ，

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle AMN$ ，

$\therefore \angle AMN = \angle AEF$ ，

$\therefore AE \perp EF$ ，

$\therefore \angle AMN = \angle AEF = 90^\circ$ ，

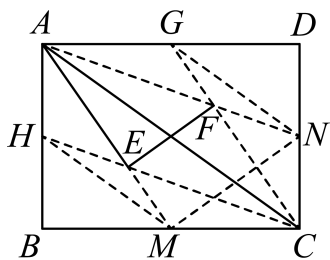
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,
 $\therefore \angle B = \angle BCD = 90^\circ$, $AB = CD$,
 $\therefore \angle BAM + \angle AMB = 90^\circ = \angle CMN + \angle AMB$,
 $\therefore \angle BAM = \angle CMN$,
 $\therefore \angle B = \angle MCN$,
 $\therefore \triangle ABM \sim \triangle MCN$,
 $\therefore \frac{AB}{MC} = \frac{BM}{CN}$,
 $\therefore MB = CM$, $CN = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$,
 $\therefore MB^2 = \frac{1}{2}AB^2$,
 $\therefore AB = \sqrt{2}MB$ 或 $AB = -\sqrt{2}MB$ (负值不符合题意, 舍去),

设 $MB = x$, 则 $AB = \sqrt{2}x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中, $AM = \sqrt{AB^2 + MB^2} = \sqrt{(\sqrt{2}x)^2 + x^2} = \sqrt{3}x$,

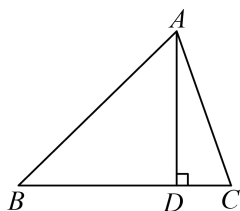
$\therefore \sin \angle EAB = \frac{BM}{AM} = \frac{x}{\sqrt{3}x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



【点睛】 本题考查相似三角形的判定和性质, 矩形的性质, 三角形的重心, 三角形中位线定理, 勾股定理, 解直角三角形等知识点, 解题的关键是由三角形重心的定义、三角形中位线定理及相似三角形判定和性质推出 $\frac{AE}{AM} = \frac{AF}{AN}$.

18. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$, 垂足为点 D , $BD = AD$, $\tan C = 3$, 点 E 、 F 分别在边 AB 和 AC 上, DE 将 $\text{Rt}\triangle ABD$ 分割成两个小三角形, DF 将 $\text{Rt}\triangle ACD$ 分割成两个小三角形, 如果 $\text{Rt}\triangle ACD$ 分割成的两个小三角形与 $\text{Rt}\triangle ABD$ 分割成的两个小三角形分别相似, 那么 $\frac{AE}{AB}$ 的值是 _____.



【答案】 $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】 设 $CD = a$ ，根据题意可得 $\angle DAB = \angle DBA = 45^\circ$ ， $AD = 3a$ ， $AB = \sqrt{BD^2 + AD^2} = 3\sqrt{2}a$ ，
继而确定 DF 平分 $\angle ADC$ ，即 $\angle ADF = \angle CDF = 45^\circ$ ，

设 $AE = x$ ，则 $BE = 3\sqrt{2}a - x$ ，分两种情况：①当 $\angle ADE = \angle DAF$ 时；②当 $\angle BDE = \angle DAF$ 时，分别求解即可。

【详解】 解：设 $CD = a$ ，

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ ， $BD = AD$ ， $\tan C = 3$ ，

$$\therefore 3 = \tan C = \frac{AD}{CD} = \frac{AD}{a}, \quad \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ, \quad \angle DAB = \angle DBA = 45^\circ,$$

$$\therefore AD = 3a,$$

$$\therefore BD = AD = 3a,$$

$$AB = \sqrt{BD^2 + AD^2} = \sqrt{(3a)^2 + (3a)^2} = 3\sqrt{2}a,$$

$\therefore DE$ 将 $\text{Rt}\triangle ABD$ 分割成两个小三角形， DF 将 $\text{Rt}\triangle ACD$ 分割成两个小三角形， $\text{Rt}\triangle ACD$ 分割成的两个小三角形与 $\text{Rt}\triangle ABD$ 分割成的两个小三角形分别相似，

$\therefore \text{Rt}\triangle ACD$ 分割成的两个小三角形都有一个角为 45° ，

$\therefore DF$ 平分 $\angle ADC$ ，即 $\angle ADF = \angle CDF = 45^\circ$ ，

设 $AE = x$ ，则 $BE = 3\sqrt{2}a - x$ ，

①当 $\angle ADE = \angle DAF$ 时，

$$\therefore DE \parallel AC,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle FDA = 45^\circ,$$

$$\therefore AE \parallel DF,$$

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形，

$$\therefore DF = AE = x,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DAF, \quad \angle EAD = \angle FDA = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle DAF,$$

$$\therefore \angle AED = \angle DFA,$$

$$\therefore \angle BED = \angle DFC,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle FDC = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle EBD \sim \triangle FDC,$$

$$\therefore \frac{EB}{FD} = \frac{BD}{DC},$$

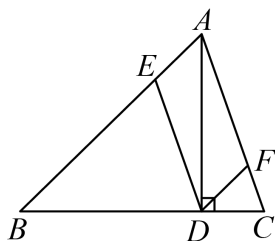
$$\therefore \frac{3\sqrt{2}a - x}{x} = \frac{3a}{a},$$

$$\text{解得: } x = \frac{3\sqrt{2}}{4}a,$$

经检验, $x = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$ 是原方程的解且符合题意,

$$\therefore AE = \frac{3\sqrt{2}}{4}a,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}a}{3\sqrt{2}a} = \frac{1}{4};$$



②当 $\angle BDE = \angle DAF$ 时,

$$\therefore \angle DBE = \angle ADF = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle DAF,$$

$$\therefore \angle BED = \angle DFA,$$

$$\frac{BE}{DF} = \frac{BD}{DA} = \frac{3a}{3a} = 1, \text{ 即 } DF = BE = 3\sqrt{2}a - x,$$

$$\therefore \angle AED = \angle DFC,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle FDC = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle DFC,$$

$$\therefore \frac{AE}{DF} = \frac{AD}{DC},$$

$$\therefore \frac{x}{3\sqrt{2}a-x} = \frac{3a}{a},$$

$$\text{解得: } x = \frac{9\sqrt{2}}{4}a,$$

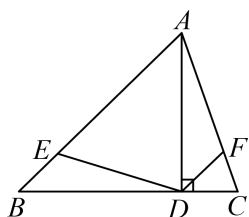
经检验, $x = \frac{9\sqrt{2}}{4}a$ 是原方程的解且符合题意,

$$\therefore AE = \frac{9\sqrt{2}}{4}a,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{\frac{9\sqrt{2}}{4}a}{3\sqrt{2}a} = \frac{3}{4};$$

综上所述, $\frac{AE}{AB}$ 的值是 $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$.

故答案为: $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$.



【点睛】本题考查相似三角形的判定和性质, 锐角三角函数, 勾股定理, 等边对等角, 平行四边形的判定和性质等知识点. 掌握锐角三角函数的意义及相似三角形的判定和性质是解题的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 先化简, 再求值: $\left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \div \frac{x^2 - 4x + 4}{x-1}$, 其中 $x = \sqrt{3}$.

【答案】 $\frac{1}{x-2}$, $-2 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题考查分式的化简求值. 先计算小括号内的减法, 再计算括号外的除法, 最后将 $x = \sqrt{3}$ 代入化简的式子进行分母有理化即可. 掌握相应的运算法则、性质及公式是解题的关键.

【详解】解: $\left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \div \frac{x^2 - 4x + 4}{x-1}$

$$= \frac{x-1-1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x^2 - 4x + 4}$$

$$= \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{x-2},$$

$$\text{当 } x = \sqrt{3} \text{ 时, 原式} = \frac{1}{\sqrt{3}-2} = -\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = -(2+\sqrt{3}) = -2-\sqrt{3}.$$

20. 解不等式组: $\begin{cases} 12-2x > 3(x-1) \\ \frac{x}{3} - \frac{2x-1}{2} \leq 2 \end{cases}$, 并写出它的整数解.

【答案】 $-\frac{9}{4} \leq x < 3$, 整数解为 $-2, -1, 0, 1, 2$

【解析】

【分析】 本题考查了求不等式组的解集并确定不等式组的整数解, 先分别解出两个不等式, 进而求出不等式组的解集, 即可确定整数解.

【详解】 $\begin{cases} 12-2x > 3(x-1) \text{ ①} \\ \frac{x}{3} - \frac{2x-1}{2} \leq 2 \text{ ②} \end{cases}$

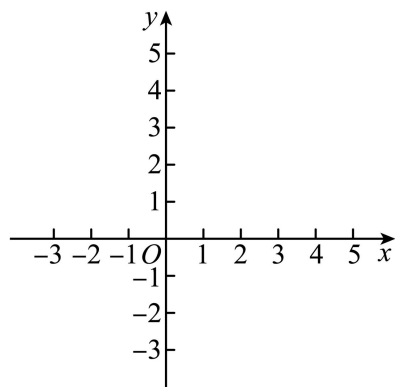
解不等式①得: $x < 3$

解不等式②得: $x \geq -\frac{9}{4}$

$\therefore$ 不等式组的解集为: $-\frac{9}{4} \leq x < 3$

$\therefore$ 整数解为 $-2, -1, 0, 1, 2$

21. 已知一次函数 $y = kx + b$ 的图像与反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 的图像相交于 $A(-1, m)$, $B(n, -1)$ 两点, 与 y 轴交于点 C .



(1) 求一次函数解析式;

(2) 设点 C 关于 x 轴的对称点为点 D , 求 $\triangle ADB$ 的面积.

【答案】(1) $y = -x + 3$

(2) $\triangle ADB$ 的面积为 15

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数与一次函数的交点问题，待定系数法，反比例函数图象上点的坐标的特征，一次函数图象上点的坐标的特征，关于轴对称的点的性质，利用点的坐标表示出相应线段的长度是解题的关键.

(1) 由反比例函数的解析式求出点 A 、 B 两点坐标，利用待定系数法即可求出一次函数的解析式；

(2) 利用一次函数的解析式求出点 C 坐标，根据对称的性质得出点 D 坐标，利用 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$ 即可求得结论.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图像与反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 的图像相交于 $A(-1, m)$ ， $B(n, -1)$ 两点，

$$\therefore m = -\frac{4}{-1} = 4, \quad n = -\frac{4}{-1} = 4,$$

$$\therefore A(-1, 4), \quad B(4, -1)$$

将 $A(-1, 4)$ 和 $B(4, -1)$ 代入 $y = kx + b$ 得

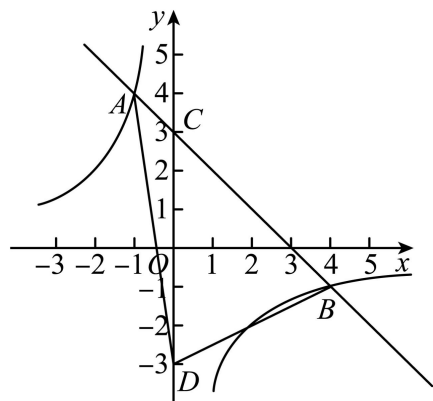
$$\begin{cases} 4 = -k + b \\ -1 = 4k + b \end{cases}, \quad \text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为： $y = -x + 3$ ；

【小问 2 详解】

如图，当 $x = 0$ 时， $y = -x + 3 = 3$ ，

$$\therefore C(0, 3),$$



$\therefore C, D$ 关于 x 轴的对称，

$$\therefore D(0, -3),$$

$$\therefore CD = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 1 + \frac{1}{2} \times 6 \times 4$$

$$= 3 + 12$$

$$= 15$$

22. 如图 1 是光的反射规律示意图, MO 是入射光线, ON 是反射光线, 法线 $XO \perp$ 平面镜 L , 入射角 $\angle MOX$ 等于反射角 $\angle XON$.

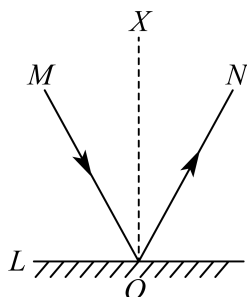


图1

如图 2, 水平桌面上从左至右分别竖直放置了挡板 EF 、挡板 AB 、平面镜 I , 在挡板 AB 的正上方有一可上下移动的挡板 CD (挡板的厚度都忽略不计), 已知 $AB = AE = 60$ 厘米, 当从点 A 发出的光线经平面镜 I 反射后恰好经过点 B 时, 测得入射角为 37° . (参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.6$, $\cos 37^\circ \approx 0.8$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)

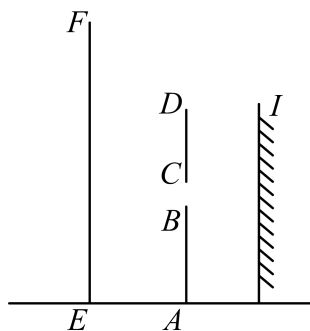


图2

- (1) 点 A 到平面镜 I 的距离是_____厘米.
- (2) 移动挡板 CD , 使空隙 BC 的长度是 20 厘米, 当从点 A 发出的光线经平面镜 I 反射后恰好经过点 C 时, 求入射角的度数.
- (3) 在 (2) 的条件下, 如果从点 A 发出的光线经平面镜 I 反射后通过空隙 BC 落到挡板 EF 上的最高点为 P , 最低点为 Q , 那么 PQ 的长度是_____厘米.

【答案】 (1) 40

(2) 入射角的度数为 45°

(3) 35

【解析】

【分析】(1) 作 $HG \perp AB$ 于点 H ，且 $\angle AGH = \angle BGH$ ，得出 $\angle GBH = \angle GAH$ ，则 $GB = GA$ ，根据三线合一可得 $AH = BH = \frac{1}{2}AB = 30\text{cm}$ ，进而解直角三角形，即可求解；

(2) 作 $JK \perp AB$ 于 J ，使得 $\angle AKJ = \angle CKJ$ ，得出 $\triangle AKJ$ 是等腰直角三角形，进而即可求解；

(3) 作 A 关于 I 的对称点 A' ，连接 AB ， AC 并延长交 E, F 分别为 Q, P ，得出 $\triangle A'AB \sim \triangle A'EQ$ ， $\triangle A'AC \sim \triangle A'EP$ ，根据相似三角形的性质，即可求解。

【小问 1 详解】

解：如图所示，作 $HG \perp AB$ 于点 H ，且 $\angle AGH = \angle BGH$ ，

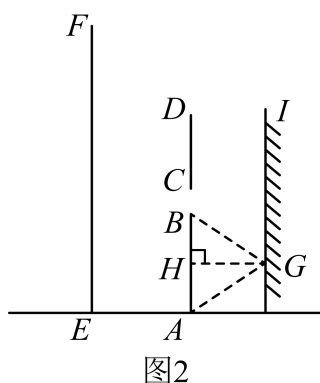


图2

$$\therefore \angle GBH = \angle GAH,$$

$$\therefore GB = GA,$$

$$\therefore AH = BH = \frac{1}{2}AB = 30\text{cm},$$

$$\therefore HG = \frac{AH}{\tan 37^\circ} \approx \frac{30}{0.75} = 40(\text{cm});$$

故答案为：40；

【小问 2 详解】

解：如图所示，作 $JK \perp AB$ 于 J ，使得 $\angle AKJ = \angle CKJ$ ，

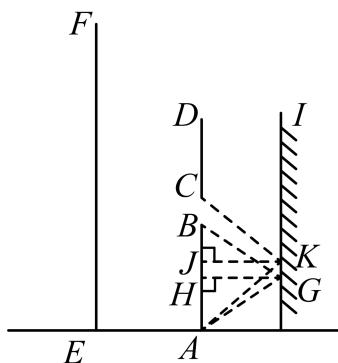


图2

同理可得 $AJ = JC$,

$$\therefore KJ = GH = 40, \quad CJ = AJ = \frac{1}{2}(60 + 20) = 40,$$

$\therefore \triangle AKJ$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle AKJ = 45^\circ,$$

则入射角为 45° ;

【小问 3 详解】

解: 如图所示, 作 A 关于 I 的对称点 A' , 连接 $A'B$, $A'C$ 并延长交 EF 分别为 Q, P,

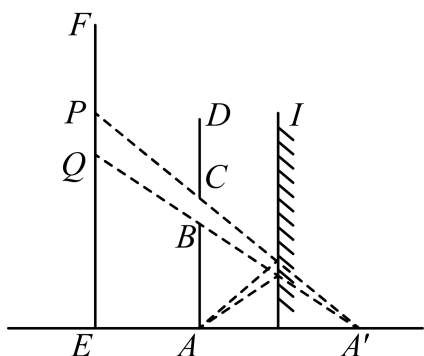


图2

$$\therefore AA' = 80, \quad A'E = 80 + 60 = 140,$$

$$\therefore AB \parallel EF,$$

$$\therefore \triangle A'AB \sim \triangle A'EQ, \quad \triangle A'AC \sim \triangle A'EP,$$

$$\therefore \frac{EQ}{A'E} = \frac{AB}{AA'} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}, \quad \frac{EP}{A'E} = \frac{AC}{AA'} = \frac{80}{80} = 1,$$

$$\therefore EQ = \frac{3}{4}A'E = 105, \quad EP = A'E = 140,$$

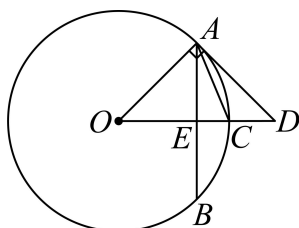
$$\therefore PQ = 140 - 105 = 35(\text{cm}).$$

故答案为: 35.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用, 轴对称的性质, 相似三角形的性质与判定, 熟练掌握轴对称的

性质是解题的关键.

23. 已知: 如图, 在 $\odot O$ 中, OC 平分劣弧 AB , OC 与 AB 交于点 E , 点 D 在 OC 延长线上, $OA \perp AD$, 连接 AC .



(1) 求证: AC 平分 $\angle EAD$;

(2) 连结 OB 、 BD , 延长 BC 交 AD 于点 F , 如果 $AC^2 = AF \cdot AD$, 求证: 四边形 $OADB$ 是正方形.

【答案】(1) 见详解 (2) 见详解

【解析】

【分析】(1) 根据 OC 平分劣弧 AB 可得 $OC \perp AB$, 即有 $\angle EAC + \angle ACE = 90^\circ$, 再根据垂直可得 $\angle OAC + \angle CAD = 90^\circ$, 问题即可得证;

(2) 在优弧 AB 上任取一点 N , 连接 AN 、 BN , 根据圆内接四边形的性质可得: $\angle ANB = \angle ACF$, 根据 OC 平分劣弧 AB 可得 $OC \perp AB$, $AE = EB$, 证明 $CAF \sim DAC$, 可得 $\angle ACF = \angle ADC$, 即可证明 $\angle ADC = \angle AOC$, 则有 $AO = AD$, 进而可得 $AO = BO = AD = BD$, 问题随之得证.

【小问1 详解】

$\because OC$ 平分劣弧 AB ,

$\therefore OC \perp AB$,

$\therefore \angle EAC + \angle ACE = 90^\circ$,

$\because OA \perp AD$,

$\therefore \angle OAC + \angle CAD = 90^\circ$,

$\because OA = OC$,

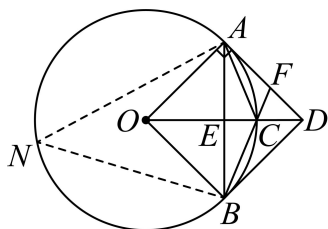
$\therefore \angle OAC = \angle OCA$,

$\therefore \angle EAC = \angle CAD$,

$\therefore AC$ 平分 $\angle EAD$;

【小问2 详解】

在优弧 AB 上任取一点 N , 连接 AN 、 BN , 如图,



根据圆内接四边形的性质可得: $\angle ANB = \angle ACF$,

$\therefore OC$ 平分劣弧 AB ,

$\therefore OC \perp AB$, $AE = EB$, $\angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB$,

$\therefore AC^2 = AF \cdot AD$,

$\therefore \frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AC}$,

又 $\therefore \angle CAF = \angle DAC$,

$\therefore \triangle CAF \sim \triangle DAC$,

$\therefore \angle ACF = \angle ADC$,

$\therefore \angle ANB = \angle ACF$,

$\therefore \angle ANB = \angle ADC$,

$\therefore \angle ANB = \frac{1}{2} \angle AOB$, $\angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB$,

$\therefore \angle ADC = \angle AOC$,

$\therefore AO = AD$,

$\therefore OC \perp AB$, $AE = EB$,

$\therefore OC$ 垂直平分 AB ,

$\therefore AO = BO$, $AD = BD$,

$\therefore AO = AD$,

$\therefore AO = BO = AD = BD$,

$\therefore$ 四边形 $OADB$ 是菱形,

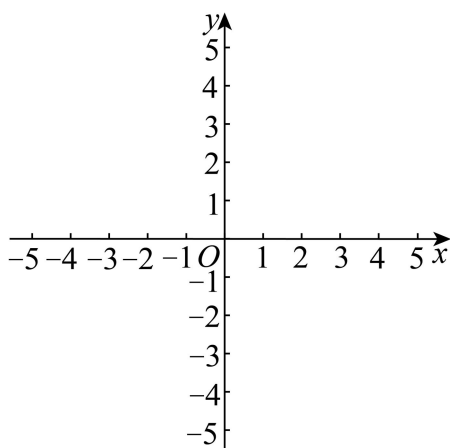
$\therefore OA \perp AD$,

$\therefore$ 菱形 $OADB$ 是正方形.

【点睛】 本题考查了圆周角定理, 相似三角形的判定与性质, 正方形的判定以及圆内接四边形的性质等知识, 掌握并灵活运用垂径定理是解答本题的关键.

24. 已知平面直角坐标系 xOy , 抛物线 $M_1: y = ax^2 + x + c$ 与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 $C(0, 4)$, 把抛物线 M_1 向下平移得到抛物线 M_2 , 设抛物线 M_2 的顶点为 D , 与 y 轴交于点 E , 直线 DE

与 x 轴交于点 P .



- (1) 求抛物线 M_1 的表达式;
- (2) 当点 P 与点 A 重合时, 求平移的距离;
- (3) 连接 AD , 如果 $\angle ADP$ 与 $\angle ACB$ 互补, 求点 D 的坐标.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

(2) 3

(3) $D(1, -3)$

【解析】

【分析】 (1) 将点 $A(-2, 0)$ 、 $C(0, 4)$ 代入抛物线 $M_1: y = ax^2 + x + c$ 上, 得到关于 a , c 的二元一次方程组, 求解即可;

(2) 由抛物线 M_1 顶点式 $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2}$ 知对称轴为 $x = 1$, 顶点 $F\left(1, \frac{9}{2}\right)$, 设平移的距离为 d , 可得

抛物线 M_2 的表达式为 $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2} - d$, 继而得到 $D\left(1, \frac{9}{2} - d\right)$,

$E(0, 4-d)$, 最后由 $\tan \angle EAO = \tan \angle DAH$ 得 $\frac{EO}{AO} = \frac{DH}{AH}$, 即可得解;

(3) 连接 CF , 过点 A 作 $AG \perp x$ 轴于点 A , 交 BC 的延长线于点 G , 过点 C 作 $CK \perp FH$ 于点 K , 由平移的性质可证明四边形 $CEDF$ 为平行四边形, 得 $\angle CED = \angle CFD$, 继而得到

$\tan \angle CED = \tan \angle CFD = 2$, 得到 $\tan \angle OPE = \frac{1}{2}$, 在 $\text{Rt}\triangle OAC$ 中, $\tan \angle OCA = \frac{1}{2}$, 得 $\angle OPE = \angle OCA$,

继而得到 $\angle CAG = \angle DPA$, 由 $\angle GCA = 180^\circ - \angle ACB = \angle ADP$, 证明 $\triangle GCA \sim \triangle ADP$, 得

$\angle G = \angle DAP = 45^\circ$, 则 $DH = AH \cdot \tan \angle DAP = 3$, 可得解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 $A(-2, 0)$ 和点 $C(0, 4)$ 在抛物线 $M_1: y = ax^2 + x + c$ 上,

$$\therefore \begin{cases} 4a - 2 + c = 0 \\ c = 4 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ c = 4 \end{cases},$

$\therefore$ 抛物线 M_1 的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$;

【小问 2 详解】

$\because$ 抛物线 $M_1: y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2}$, $A(-2, 0)$,

$\therefore$ 对称轴为 $x=1$, 顶点 $F\left(1, \frac{9}{2}\right)$,

把抛物线 M_1 向下平移得到抛物线 M_2 , 当点 P 与点 A 重合, 设平移的距离为 d , 设对称轴 $x=1$ 交 x 轴于点 H ,

$\therefore$ 抛物线 M_2 的表达式为 $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2} - d$,

$\therefore$ 抛物线 M_2 的顶点为 $D\left(1, \frac{9}{2} - d\right)$,

$\therefore DH = \frac{9}{2} - d$, $AH = 1 - (-2) = 3$,

对于抛物线 $M_2: y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2} - d$,

当 $x=0$ 时, $y = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} - d = 4 - d$,

$\therefore E(0, 4-d)$,

$\therefore OE = 4-d$, $AO = 2$,

$\because \angle AOE = \angle AHD = 90^\circ$,

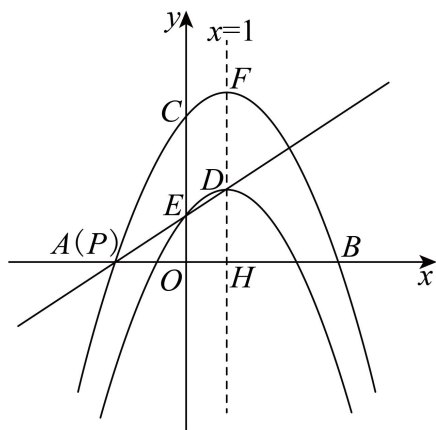
$\therefore \tan \angle EAO = \tan \angle DAH$,

$$\therefore \frac{EO}{AO} = \frac{DH}{AH},$$

$$\therefore \frac{4-d}{2} = \frac{\frac{9}{2}-d}{3},$$

解得: $d=3$,

$\therefore$ 当点 P 与点 A 重合时, 平移的距离是 3;



【小问 3 详解】

连接 CF ，过点 A 作 $AG \perp x$ 轴于点 G ，交 BC 的延长线于点 A ，过点 C 作 $CK \perp FH$ 于点 K ，

$\therefore A(-2,0)$ ， $F\left(1, \frac{9}{2}\right)$ ， $C(0,4)$ ，对称轴为 $x=1$ ，

$\therefore AO=2$ ， $AH=1-(-2)=3$ ， $OC=4$ ， $FH=\frac{9}{2}$ ，四边形 $COHK$ 为矩形，

$\therefore CK=OH=1$ ， $KH=CO=4$ ，

$\therefore \tan \angle CFK = \frac{CK}{FK} = \frac{1}{\frac{9}{2}-4} = 2$ ，

$\therefore$ 抛物线 M_1 ： $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ 与 x 轴交于点 $A(-2,0)$ 和点 B ，

当 $y=0$ 时，得 $-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0$ ，

解得： $x=-2$ 或 $x=4$ ，

$\therefore B(4,0)$ ，

$\therefore OB=4=OC$ ，

$\therefore \angle OCB = \angle OBC = 45^\circ$ ，

$\therefore$ 把抛物线 M_1 向下平移得到抛物线 M_2 ，抛物线 M_2 的顶点为 D ，

$\therefore CE=FD$ ，

$\therefore$ 对称轴 $x=1$ 与 y 轴平行，即 $CE \parallel FD$ ，

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 为平行四边形，

$\therefore \angle CED = \angle CFD$ ，

$\therefore \tan \angle CFD = \tan \angle CED = \frac{OP}{OE} = 2$ ，

$\therefore OP=2OE$ ，

$\therefore \tan \angle OPE = \frac{OE}{OP} = \frac{OE}{2OE} = \frac{1}{2}$ ，

$$\text{在 Rt}\triangle OAC \text{ 中, } \tan \angle OCA = \frac{AO}{OC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle OCA = \angle OPE,$$

$$\therefore AG \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore AG \parallel y \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle OCA = \angle CAG, \quad \angle G = \angle OCB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAG = \angle DPA,$$

$$\therefore \angle ADP \text{ 与 } \angle ACB \text{ 互补, 即 } \angle ADP + \angle ACB = 180^\circ,$$

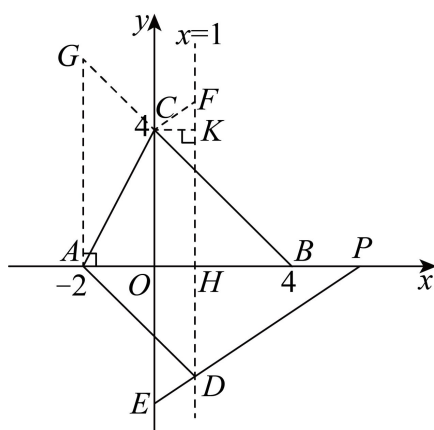
$$\therefore \angle GCA = 180^\circ - \angle ACB = \angle ADP,$$

$$\therefore \triangle GCA \sim \triangle ADP,$$

$$\therefore \angle G = \angle DAP = 45^\circ,$$

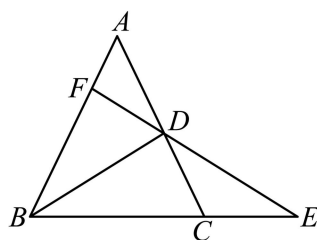
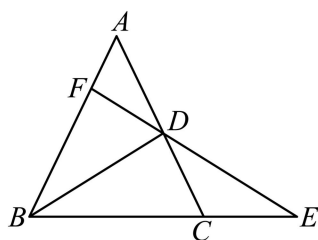
$$\therefore DH = AH \cdot \tan \angle DAP = 3 \times \tan 45^\circ = 3,$$

$$\therefore D(1, -3).$$



【点睛】本题是二次函数的综合题，考查了待定系数法确定函数解析式，二次函数的图像与性质，平移的性质，锐角三角函数，等边对等角，平行四边形的判定和性质，矩形的判定和性质，相似三角形的判定和性质等知识点。掌握二次函数的图像与性质，锐角三角函数的应用，相似三角形的判定和性质是解题的关键。

25. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 是边 AC 上的一点（不与点 A 、 C 重合）， E 是边 BC 延长线上一点， $BD = DE$ ，延长 ED 交边 AB 于点 F 。



备用图

(1) 求证: $\angle ADF = \angle ABD$;

(2) 如果 $EF \perp BF$, 且 $\frac{CD}{AC} = \frac{1}{3}$, 求 $\angle E$ 的余切值;

(3) 连接 CF , 当 BD 平分 CF 时, 求 $\frac{CD}{BF}$ 的值.

【答案】(1) 见详解 (2) $\sqrt{5}$

(3) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据等边对等角可得 $\angle ABC = \angle ACB$, $\angle DBE = \angle DEB$, 再根据 $\angle EDC + \angle DEB = \angle ACB$, $\angle ABD + \angle DBE = \angle ABC$, 即可证明;

(2) 先证明 $\angle DBE = \angle CAN = \angle E$, 再证明 $\triangle BCD \sim \triangle ACN$, 即有 $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AN} = \frac{CD}{CN}$, 根据 $BN = NC = \frac{1}{2}CB$, $\frac{CD}{AC} = \frac{1}{3}$, 可得 $CD = \frac{\sqrt{6}}{3}CN$, 进而可得 $AC = 3CD = \sqrt{6}CN$, $AN = \sqrt{AC^2 - CN^2} = \sqrt{5}CN$, 问题随之得解;

(3) 过点 F 作 $FN \parallel CD$, 交 BD 于点 N , BD 与 FC 交于点 O , 先证明 $FN = CD$, 设 $AB = AC = 1$, $\frac{CD}{BF} = t$, $t < 1$, 即有 $\frac{FN}{BF} = \frac{CD}{BF} = t$, 证明 $\triangle BFN \sim \triangle BAD$, 可得 $AD = \frac{FN}{BF} \times AB = t$, 则有 $CD = AC - AD = 1 - t$, $FN = CD = 1 - t$, 进而可得 $BF = \frac{1-t}{t}$, $AF = AB - BF = 1 - \frac{1-t}{t} = \frac{2t-1}{t}$, 再证明 $\triangle ADF \sim \triangle ABD$, 可得 $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AD}$, 进而得方程 $t^3 = 2t - 1$, 解方程即可求解.

【小问 1 详解】

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$,

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$,

$\because$ 在 $\triangle BDE$ 中, $BD = DE$,

$\therefore \angle DBE = \angle DEB$,

$\because \angle EDC + \angle DEB = \angle ACB$, $\angle ABD + \angle DBE = \angle ABC$,

$\therefore \angle EDC + \angle DEB = \angle ABD + \angle DBE$,

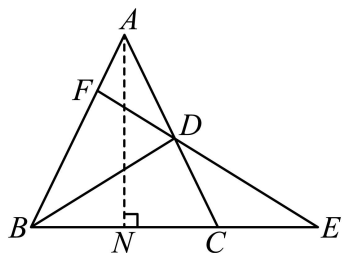
$\therefore \angle EDC = \angle ABD$,

$\because \angle EDC = \angle ADF$,

$\therefore \angle ADF = \angle ABD$;

【小问 2 详解】

过点 A 作 $AN \perp CB$ 于点 N , 如图,



$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, $AN \perp CB$, $AB = AC$,

$\therefore BN = NC = \frac{1}{2}CB$, $\angle ABC + \angle BAN = 90^\circ$, $\angle BAN = \angle CAN$,

$\therefore EF \perp BF$,

$\therefore \angle ABC + \angle E = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAN = \angle E$,

$\therefore \angle DBE = \angle DEB$, $\angle BAN = \angle CAN$,

$\therefore \angle DBE = \angle CAN = \angle E$,

又 $\therefore \angle BCD = \angle ACN$,

$\therefore \triangle BCD \sim \triangle ACN$,

$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AN} = \frac{CD}{CN}$,

$\therefore BN = NC = \frac{1}{2}CB$, $\frac{CD}{AC} = \frac{1}{3}$,

$\therefore \frac{2CN}{3CD} = \frac{CD}{CN}$,

$\therefore 2CN^2 = 3CD^2$,

$\therefore CD = \frac{\sqrt{6}}{3}CN$,

$\therefore AC = 3CD = \sqrt{6}CN$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ACN$ 中, $AN = \sqrt{AC^2 - CN^2}$,

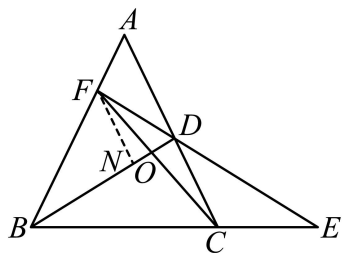
$\therefore AN = \sqrt{AC^2 - CN^2} = \sqrt{5}CN$,

$\therefore \cot \angle CAN = \frac{AN}{NC} = \frac{\sqrt{5}CN}{NC} = \sqrt{5}$,

$\therefore \cot \angle E = \sqrt{5}$;

【小问3详解】

过点 F 作 $FN \parallel CD$ ，交 BD 于点 N ， BD 与 FC 交于点 O ，如图，



$\because BD$ 平分 CF ，

$\therefore FO = OC$ ，

$\because FN \parallel CD$ ，

$\therefore \angle FNO = \angle CDO$ ， $\angle NFO = \angle DCO$ ，

又 $\because FO = OC$ ，

$\therefore \triangle FNO \cong \triangle CDO$ ，

$\therefore FN = CD$ ，

设 $AB = AC = 1$ ， $\frac{CD}{BF} = t$ ， $t < 1$ ，

$\therefore \frac{FN}{BF} = \frac{CD}{BF} = t$ ，

$\because FN \parallel CD$ ，

$\therefore \triangle BFN \sim \triangle BAD$ ，

$\therefore \frac{FN}{BF} = \frac{AD}{AB}$ ，

$\therefore AD = \frac{FN}{BF} \times AB = t$ ，

$\therefore CD = AC - AD = 1 - t$ ，即 $FN = CD = 1 - t$ ，

$\because \frac{FN}{BF} = t$ ，

$\therefore BF = \frac{1-t}{t}$ ，

$\therefore AF = AB - BF = 1 - \frac{1-t}{t} = \frac{2t-1}{t}$ ，

$\because \angle ADF = \angle ABD$ ， $\angle A = \angle A$ ，

$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ABD$ ，

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AD}$ ，

$$\therefore \frac{t}{1} = \frac{\frac{2t-1}{t}}{t},$$

整理得: $t^3 = 2t - 1$,

$$t^3 - 1 = 2t - 2$$

$$(t-1)(t^2+t+1) = 2(t-1),$$

$$\therefore t < 1,$$

$$\therefore t^2 + t + 1 = 2,$$

解得: $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (负值舍去), 经检验, $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是原方程的根,

$$\therefore \frac{CD}{BF} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

【点睛】 本题主要考查了等腰三角形的性质, 相似三角形的判定与性质, 余切, 全等三角形的判定与性质, 一元二次方程的应用等知识, 作出合理的辅助线, 构造相似三角形, 是解答本题的关键.