

2023 学年第二学期九年级数学学科 2024. 05

(满分: 150 分时间: 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本调研卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【每小题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 下列计算正确的是 ()

A. $(a^2)^3 = a^5$

B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

C. $a^5 \div a^3 = a^2$

D. $(a+2a)^2 = 4a^2$

【答案】C

【解析】

【分析】分别根据幂的乘方运算法则、同底数幂的乘法和除法法则、合并同类项法则和积的乘方运算法则进行计算, 即可得出答案.

【详解】解: A、 $(a^2)^3 = a^6$, 所以此选项不正确;

B、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$, 所以此选项不正确;

C、 $a^5 \div a^3 = a^2$, 所以此选项正确;

D、 $(a+2a)^2 = (3a)^2 = 9a^2$, 所以此选项不正确;

故选 C.

【点睛】本题考查了幂的运算性质和合并同类项的法则, 熟练掌握运算法则是解题的关键.

2. 下列各数中是无理数的是 ()

A. $\cos 60^\circ$

B. 1.3

C. 83

D. $\sqrt{27}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了无理数, 根据无理数的定义逐项判断即可求解, 掌握无理数的定义是解题的关键.

【详解】解: A、 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, 是分数, 属于有理数, 不合题意;

B、1.3 是有限小数, 属于有理数, 不合题意;

C、83 是整数, 属于有理数, 不合题意;

D、 $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ ，是无理数，符合题意；

故选：D．

3. 下列函数中，满足 y 的值随 x 的值增大而减小的是（　　）

A. $y=2x$

B. $y=\frac{2}{x}$

C. $y=2-x$

D. $y=-2x^2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了函数的性质，根据一次函数的性质、反比例函数的性质、二次函数的性质逐一判断即可求解，掌握一次函数、反比例函数及二次函数的性质是解题的关键．

【详解】解：A、 $\because k=2>0$ ，

$\therefore y$ 的值随 x 的值增大而增大，该选项不合题意；

B、 $\because k=2>0$ ，

$\therefore$ 在同一个象限内， y 的值随 x 的值增大而减小，该选项不合题意；

C、 $\because y=-1<0$ ，

$\therefore y$ 的值随 x 的值增大而减小，该选项符合题意；

D、 $\because a=-2<0$ ，

$\therefore$ 当 $x\leq 0$ 时， y 的值随 x 的值增大而增大；当 $x>0$ 时， y 的值随 x 的值增大而减小，该选项不合题意；

故选：C．

4. 如果一组数据1,2, x ,5,6的众数为6，那么这组数据的中位数为（　　）

A. 4

B. 5

C. 5.5

D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了众数和中位数，根据众数的定义可得 x 为6，再根据中位数的定义计算即可求解，掌握众数和中位数的定义是解题的关键．

【详解】解： $\because$ 数据1,2, x ,5,6的众数为6，

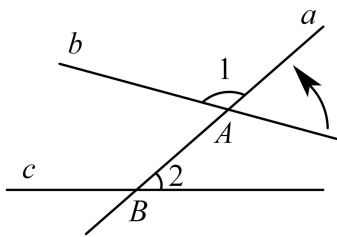
$\therefore x$ 为6，

$\therefore$ 数据按从小到大排列为1,2,5,6,6，

$\therefore$ 这组数据的中位数为5，

故选：B．

5. 如图，直线 a 与直线 b 交于点A，与直线 c 交于点B， $\angle 1=120^\circ$ ， $\angle 2=45^\circ$ ，若使直线 b 与直线 c 平行，则可将直线 b 绕点A逆时针旋转（　　）



- A. 15° B. 30° C. 45° D. 60°

【答案】A

【解析】

【详解】试题分析：先根据邻补角的定义得到 $\angle 3 = 60^\circ$ ，根据平行线的判定当 b 与 a 的夹角为 45° 时， $b \parallel c$ ，由此得到直线 b 绕点 A 逆时针旋转 $60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ 。

解： $\because \angle 1 = 120^\circ$,

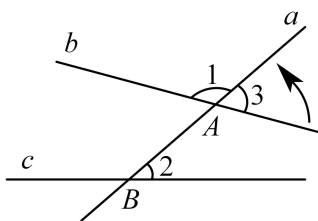
$\therefore \angle 3 = 60^\circ$,

$\because \angle 2 = 45^\circ$,

$\therefore$ 当 $\angle 3 = \angle 2 = 45^\circ$ 时， $b \parallel c$,

$\therefore$ 直线 b 绕点 A 逆时针旋转 $60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ 。

故选 A.



点评：本题考查了平行线的判定：同位角相等，两直线平行；内错角相等，两直线平行；同旁内角互补，两直线平行；两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线平行。

6. 下列说法正确的是 ()

- A. 有一组邻边相等的梯形是等腰梯形
B. 等腰三角形的中位线截该三角形所得的四边形是等腰梯形
C. 有两个相邻的内角相等的梯形是等腰梯形
D. 有一组对角互补的梯形是等腰梯形.

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了等腰梯形的判定，根据等腰梯形的判定及三角形中位线的性质逐一判断即可求解，掌

握等腰梯形的判定是解题的关键.

【详解】解: A、两腰相等的梯形是等腰梯形, 该选项说法错误, 不合题意;

B、等腰三角形的中位线截该三角形所得的四边形不一定是等腰梯形, 该选项说法错误, 不合题意;

C、有两个相邻的内角相等的梯形不一定是等腰梯形, 比如直角梯形, 该选项说法错误, 不合题意;

D、有一组对角互补的梯形是等腰梯形, 该选项说法正确, 符合题意;

故选: D.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $2^0 - \sqrt{9} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了实数运算, 先根据零指数幂和算术平方根运算, 然后进行减法运算即可, 解题的关键是熟练掌握零指数幂和算术平方根运算法则.

【详解】解: 原式 $= 1 - 3$,

$= -2$,

故答案为: -2.

8. 红细胞的直径约为 0.0000077m, 0.0000077 用科学记数法表示为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 7.7×10^{-6}

【解析】

【分析】 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【详解】解: $0.0000077 = 7.7 \times 10^{-6}$.

故答案为: 7.7×10^{-6}

9. 因式分解: $x^2 - 9x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x(x-9)$

【解析】

【分析】 根据提取公因式法分解因式, 即可.

【详解】 $x^2 - 9x = x(x-9)$,

故答案是: $x(x-9)$.

【点睛】 本题主要考查因式分解, 掌握提取公因式法分解因式, 是解题的关键.

10. 方程 $x = \sqrt{4-3x}$ 的根是_____.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】 先把方程两边同时平方转化为有理方程, 然后解得有理方程的解, 最后要进行检验, 本题得以解决.

【详解】 $x = \sqrt{4-3x}$ 两边平方, 得

$$x^2 = 4 - 3x,$$

解得, $x = 1$ 或 $x = -4$,

检验: 当 $x = -4$ 不是原方程的根,

故原无理方程的解是 $x = 1$,

故答案为 $x = 1$

【点睛】 本题考查无理方程, 解题的关键是明确无理方程的解法, 注意解方程最后要检验.

11. 不等式组 $\begin{cases} x-2 < 0 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases}$ 的整数解是_____.

【答案】 0, 1

【解析】

【分析】 本题考查了求一元一次不等式组的整数解, 先求出不等式组的解集, 再根据解集即可得到不等式组的整数解, 正确求出不等式组的解集是解题的关键.

【详解】 解: $\begin{cases} x-2 < 0 \text{ ①} \\ 2x+1 \geq 0 \text{ ②} \end{cases}$,

由 ① 得, $x < 2$,

由 ② 得, $x \geq -\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-\frac{1}{2} \leq x < 2$,

$\therefore$ 不等式组的整数解是 0, 1,

故答案为: 0, 1.

12. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 没有实数根, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > \frac{9}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程根的判别式, 是重要考点, 掌握相关知识是解题关键.

【详解】 解: $\because$ 方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 没有实数根,

$$b^2 - 4ac = 9 - 4m < 0$$

$$\therefore m > \frac{9}{4}$$

故答案为: $m > \frac{9}{4}$.

13. 在形状为等腰三角形、圆、矩形、菱形、正五边形的 5 张纸片中随机抽取一张, 抽到中心对称图形的概率是_____.

【答案】 $\frac{3}{5}$ 或 0.6

【解析】

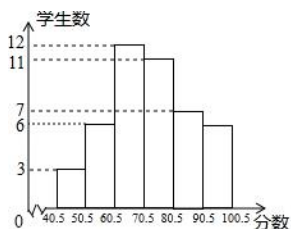
【分析】 本题考查了求简单事件的概率, 求出 5 张纸片中中心对称图形的个数, 再利用概率公式计算即可求解, 掌握中心对称图形的定义是解题的关键.

【详解】 解: $\because$ 在等腰三角形、圆、矩形、菱形、正五边形中, 属于中心对称图形的有圆、矩形、菱形 3 种,

$\therefore$ 从 5 张纸片中随机抽取一张, 抽到中心对称图形的概率是 $\frac{3}{5}$,

故答案为: $\frac{3}{5}$.

14. 某班学生参加环保知识竞赛, 已知竞赛得分都是整数. 把参赛学生的成绩整理后分为 6 小组, 画出竞赛成绩的频数分布直方图 (如图所示), 根据图中的信息, 可得成绩高于 60 分的学生占全班参赛人数的百分率是_____.



【答案】 80%.

【解析】

【分析】 根据频数分布直方图可得全班的总人数及成绩高于 60 分的学生, 从而得出答案.

【详解】 $\because$ 全班的总人数为 $3+6+12+11+7+6=45$ 人, 其中成绩高于 60 分的学生有 $12+11+7+6=36$ 人,

∴成绩高于 60 分的学生占全班参赛人数的百分率是 $\frac{36}{45} \times 100\% = 80\%$,

故答案为 80%.

【点睛】 本题主要考查频数分布直方图, 根据频数分布直方图明确各分组人数是解题的关键.

15. 如果正 n 边形的内角是它中心角的两倍, 那么边数 n 的值是_____.

【答案】 6.

【解析】

【分析】 根据正 n 边形的内角是它中心角的两倍, 列出方程求解即可.

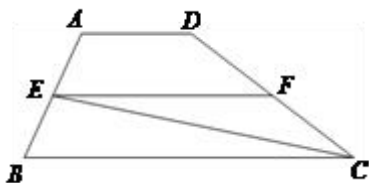
【详解】 依题意有 $\frac{(n-2) \cdot 180}{n} = \frac{360}{n} \times 2$,

解得 $n = 6$.

故答案为: 6.

【点睛】 此题考查多边形内角与外角, 此题比较简单, 解题的关键是熟知正多边形的内角和公式及中心角的求法.

16. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 3AD$, 点 E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点. 设 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{EC}$ 用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示是_____.



【答案】 $2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【解析】

【详解】 分析: 根据梯形的中位线等于上底与下底和的一半表示出 EF , 然后根据向量的三角形法则解答即可.

详解: ∵点 E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点, ∴ EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线, $FC = \frac{1}{2}DC$, ∴ $EF = \frac{1}{2}$

$(AD+BC)$. ∵ $BC=3AD$, ∴ $EF = \frac{1}{2} (AD+3AD) = 2AD$, 由三角形法则得,

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. ∵ $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, ∴ $\overrightarrow{EC} = 2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

故答案为 $2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

点睛: 本题考查了平面向量, 平面向量的问题, 熟练掌握三角形法则和平行四边形法则是解题的关键, 本题还考查了梯形的中位线等于上底与下底和的一半.

17. 当相交的两个圆中有一个圆的圆心在另一圆的圆内部时，我们称此两圆的位置关系为“内相交”. 已知点 O 在线段 AB 上， $\odot A$ 的半径为 1，如果以 OB 为半径的 $\odot O$ 与 $\odot A$ “内相交”，且 $AB = 5$ ，那么 OB 的取值范围是_____

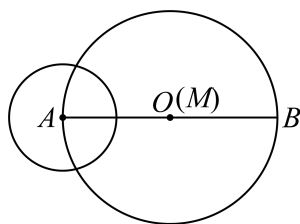
【答案】 $2.5 < OB \leq 5$

【解析】

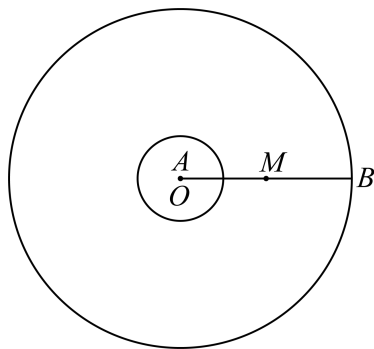
【分析】 本题考查了新定义，圆与圆的位置关系，根据题意画出草图，确定临界点，即可求解.

【详解】 解：如图所示，设 M 为 AB 的中点，则 $BM = \frac{1}{2} AB = 2.5$

当 O 与 M 重合时， $BO = \frac{1}{2} AB = 2.5$ ，如图所示，此时 A 在 $\odot B$ 上，则 $OB > 2.5$ 时，两圆“内相交”.



当 $OB = AB$ 时，两圆“内相交”.



$\therefore 2.5 < OB \leq 5$

故答案为： $2.5 < OB \leq 5$.

18. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转得到 $\triangle A'B'C$ ，点 A 的对应点 A' 恰好与 $\triangle ABC$ 的重心重合， $A'B'$ 与 BC 相交于点 E ，那么 $BE : CE$ 的值为_____.



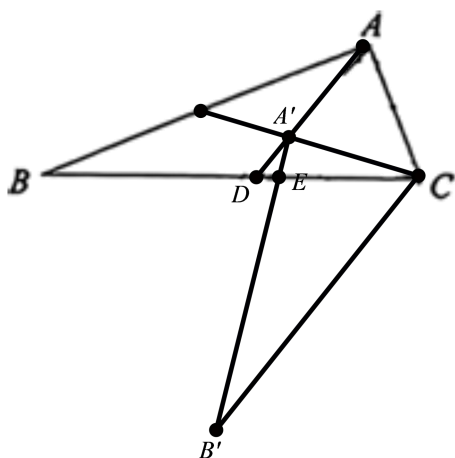
【答案】 $\frac{4}{3} \text{ 或 } 1\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的重心的性质，相似三角形的性质与判定，根据题意得出 $\angle CA'A = \angle B'CA'$ ，

进而证明 $\triangle EA'D \sim \triangle EB'C$ ，根据向上三角形的性质得出 $\frac{DE}{CE} = \frac{1}{6}$ ，结合直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半，即可求解。

【详解】解：如图所示，



D 为 BC 的中点， A' 为 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，

$$\therefore AD = \frac{1}{2}BC = CD$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA$$

$\therefore$ 旋转，

$$\therefore AC = A'C, \triangle ABC \cong \triangle A'B'C$$

$$\therefore \angle DAC = \angle CA'A, \angle ACB = \angle ACB'$$

$$\therefore \angle CA'A = \angle B'CA'$$

$$\therefore AD \parallel B'C$$

$$\therefore \triangle EA'D \sim \triangle EB'C$$

$$\therefore \frac{DE}{CE} = \frac{A'D}{B'C} = \frac{\frac{1}{3}AD}{BC} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}BC}{BC} = \frac{1}{6}$$

设 $DE = k$ ，则 $CE = 6k$

$$\therefore BD = CD = 7k, BE = BD + DE = 8k$$

$$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{8k}{6k} = \frac{4}{3}$$

故答案为： $\frac{4}{3}$ 。

三、解答题 (本大题共 7 题，满分 78 分) 【将下列各题的解答过程，做在答题纸的相应位置上】

19. 先化简，再求值： $\frac{4}{x^2-4} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2}$ ，其中 $x = \sqrt{2}$ 。

【答案】 $\frac{1}{x+2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【详解】 先把分母因式分解、通分化成同分母，然后进行加减运算，最后把 x 的值代入进行求值即可。

$$\begin{aligned} \text{解：} \frac{4}{x^2-4} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} &= \frac{4}{(x+2)(x-2)} + \frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{4+2x-4-x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x+2}. \end{aligned}$$

$$\text{当 } x = \sqrt{2} \text{ 时，原式} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

“点睛” 本题考查的是分式的化简求值，在解答此类题目时要注意把分式化为最简形式，再代入求值。

20. 解方程：
$$\begin{cases} y-2x=6 \\ 4x^2+4xy+y^2=4 \end{cases}.$$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 2 \end{cases}.$

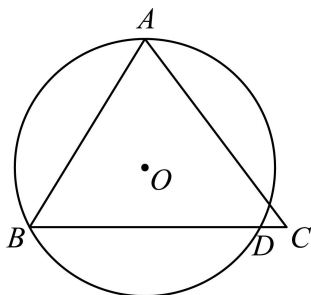
【解析】

【分析】 先把方程组化成两个二元一次方程组，再解这两个二元一次方程组即可。

【详解】 解： $\because \begin{cases} y-2x=6 \\ 4x^2+4xy+y^2=4 \end{cases}, \therefore \begin{cases} y-2x=6 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y-2x=6 \\ 2x+y=-2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 2 \end{cases}.$

【点睛】 此题主要考查了二元二次方程组的解法，熟练掌握二元二次方程组的解法是解题的关键。

21. 如图，半径为 5 的 $\odot O$ 经过 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B ，与边 BC 相交于点 D ， $BD = 8$ ， $AB = AD$ 。



(1) 求 AB 的长；

(2) 如果 $\tan C = \frac{4}{3}$ ，判断直线 AB 与以点 C 为圆心、9 为半径的圆的位置关系，并说明理由。

【答案】(1) $4\sqrt{5}$;

(2) 直线 AB 与 $\odot C$ 相交, 理由见解析.

【解析】

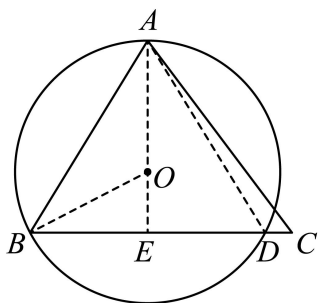
【分析】本题考查了垂径定理, 勾股定理, 三角函数, 三角形的面积, 直线和圆的位置关系, 正确作出辅助线是解题的关键.

(1) 连接 AO 并延长交 BC 于点 E , 连接 AD 、 OB , 由 $AB = AD$ 可得 $AE \perp BD$, 进而得 $\angle AEB = \angle AEC = 90^\circ$, $BE = \frac{1}{2}BD = 4$, 利用勾股定理得 $OE = 3$, 得到, 再由勾股定理即可得到 AB 的长;

(2) 直线 AB 与 $\odot C$ 相交. 过点 C 作 $CH \perp AB$ 于 H , 由三角函数得 $\frac{AE}{CE} = \frac{4}{3}$, 得到 $CE = 6$, 进而得 $BC = 10$, 再根据三角形的面积得 $CH = 4\sqrt{5} < 9$, 即可求证.

【小问 1 详解】

解: 连接 AO 并延长交 BC 于点 E , 连接 AD 、 OB ,



$$\therefore AB = AD,$$

$$\therefore AE \perp BD,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AEC = 90^\circ, \quad BE = \frac{1}{2}BD = 4,$$

$$\therefore OE = \sqrt{OB^2 - BE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

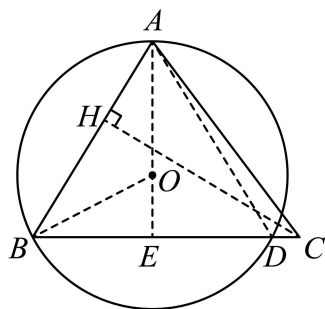
$$\therefore AE = AO + OE = 5 + 3 = 8,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5};$$

【小问 2 详解】

解: 直线 AB 与 $\odot C$ 相交, 理由如下:

过点 C 作 $CH \perp AB$ 于 H ,



$$\because \angle AEC = 90^\circ, \quad \tan C = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \frac{8}{CE} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore CE = 6,$$

$$\therefore BC = BE + CE = 4 + 6 = 10,$$

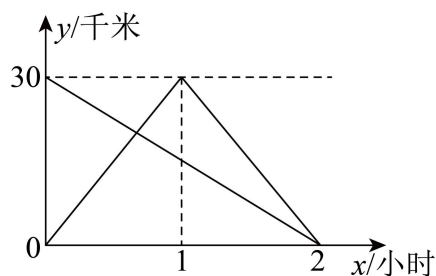
$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AE = \frac{1}{2}AB \cdot CH,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 10 \times 8 = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times CH,$$

$$\therefore CH = 4\sqrt{5} < 9,$$

$\therefore$ 直线 AB 与 $\odot C$ 相交.

22. 在一条笔直的公路上有 A, B 两地, 小明骑自行车从 A 地去 B 地, 小刚骑电动车从 B 地去 A 地, 然后立即原路返回到 B 地, 如图是两人离 B 地的距离 y (千米) 和行驶时间 x (小时) 之间的函数图像. 请根据图像回答下列问题:



(1) 求小明离 B 地的距离 y 关于行驶时间 x 之间的函数解析式;

(2) 若两人间的距离不超过 3 千米时, 能够用无线对讲机保持联系, 求两人从途中相遇后到 B 地的过程中, 无法用无线对讲机保持联系的总时间是多少小时?

【答案】 (1) $y = 30 - 15x$;

(2) $\frac{16}{15}$ 小时.

【解析】

【分析】(1) 根据题意列出函数解析式即可；

(2) 求出两人途中相遇的时间，可求出小刚此时距 A 地的距离，再算出相遇后两人相距 3 千米的时间，求出此时小刚距 A 的距离，进而求出小刚到达 A 地的时间，然后求出小刚从 A 地返回 B 地与小明相距 3 的时间，把两个时间相加即为两人无法用无线对讲机保持联系的总时间；

本题考查了一次函数的应用，求一次函数解析式，看懂函数图象是解题的关键.

【小问 1 详解】

解：由图可得，小明骑自行车的速度为 $30 \div 2 = 15$ 千米/小时，

$\therefore$ 小明离 B 地的距离 y 关于行驶时间 x 之间的函数解析式为 $y = 30 - 15x$ ；

【小问 2 详解】

解：由图可得，小刚骑电动车的速度为 $30 \div 1 = 30$ 千米/小时，

当两人在途中相遇时，有 $15x + 30x = 30$ ，

$$\therefore x = \frac{2}{3},$$

此时，小刚距 A 地 $30 - 30 \times \frac{2}{3} = 10$ 千米，

相遇后设 a 小时两人相距 3 千米，则 $(15 + 30)a = 3$ ，

$$\therefore a = \frac{1}{15},$$

此时，小刚距 A 地 $10 - 30 \times \frac{1}{15} = 8$ 千米，到达 A 需要的时间为 $8 \div 30 = \frac{4}{15}$ ，

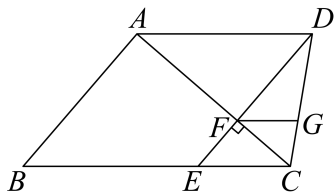
设小刚从 A 地返回 B 地 b 小时与小明相距 3 千米，

$$\text{则 } 15(b + 1) - 30b = 3,$$

$$\text{解得 } b = \frac{4}{5},$$

$\therefore$ 两人从途中相遇后到 B 地的过程中，无法用无线对讲机保持联系的总时间为 $\frac{4}{15} + \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$ 小时.

23. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $DE \parallel AB$ ， DE 与对角线 AC 交于点 F ， $FG \parallel AD$ ，且 $FG = EF$.



(1) 求证：四边形 $ABED$ 是菱形；

(2) 连接 AE 、 BD ，如果 $AC \perp ED$ ，求证： $AE^2 = 2FG \cdot BE$ 。

【答案】(1) 证明见解析；

(2) 证明见解析。

【解析】

【分析】(1) 由 $AD \parallel BC$ ， $DE \parallel AB$ 得四边形 $ABED$ 是平行四边形，由 $FG \parallel AD$ 得 $\triangle CFG \sim \triangle CAD$ ，得到 $\frac{FG}{AD} = \frac{CF}{CA}$ ，同理得 $\frac{FG}{AD} = \frac{EF}{AB}$ ，进而由 $FG = EF$ 得到 $AD = AB$ ，即可求证；

(2) 连接 BD ，与 AE 交于点 H ，证明 $\triangle DHE \sim \triangle AFE$ 得到 $\frac{EH}{EF} = \frac{DE}{AE}$ ，进而由 $EH = \frac{1}{2}AE$ ， $DE = BE$ ， $FG = EF$ ，可得 $\frac{\frac{1}{2}AE}{FG} = \frac{BE}{AE}$ ，据此即可求证；

本题考查了平行四边形的判定，菱形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，正确作出辅助线是解题的关键。

【小问 1 详解】

证明： $\because AD \parallel BC$ ， $DE \parallel AB$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是平行四边形，

$\because FG \parallel AD$ ，

$\therefore \triangle CFG \sim \triangle CAD$ ，

$\therefore \frac{FG}{AD} = \frac{CF}{CA}$ ，

同理可得， $\frac{EF}{AB} = \frac{CF}{CA}$ ，

$\therefore \frac{FG}{AD} = \frac{EF}{AB}$ ，

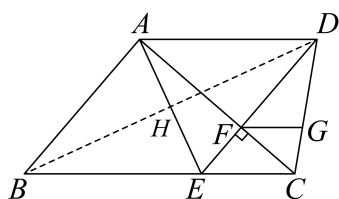
$\therefore FG = EF$ ，

$\therefore AD = AB$

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是菱形；

【小问 2 详解】

证明：连接 BD ，与 AE 交于点 H ，如图，



$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是菱形，

$$\therefore EH = \frac{1}{2}AE, \quad DE = BE, \quad BD \perp AE,$$

$$\therefore \angle DHE = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \perp ED,$$

$$\therefore \angle AFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DHE = \angle AFE,$$

$$\text{又} \because \angle DEH = \angle AED,$$

$$\therefore \triangle DHE \sim \triangle AFE,$$

$$\therefore \frac{EH}{EF} = \frac{DE}{AE},$$

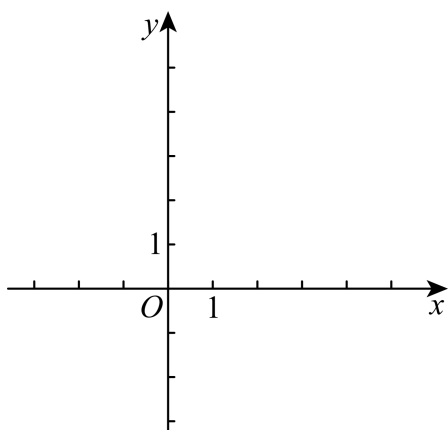
$$\therefore EH = \frac{1}{2}AE, \quad DE = BE, \quad FG = EF,$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2}AE}{FG} = \frac{BE}{AE},$$

$$\therefore \frac{1}{2}AE^2 = FG \cdot BE,$$

$$\text{即 } AE^2 = 2FG \cdot BE.$$

24. 已知在直角坐标平面内，抛物线 $y = \frac{1}{2}(x-m)^2 + m + 1$ ($m \neq 0$) 与 y 轴交于点 A ，顶点为点 B ，点 C 的坐标为 $(0,1)$ ，直线 BC 与 x 轴交于点 D 。



(1) 求点 D 的坐标；

(2) 当抛物线与坐标轴共有两个不同的交点时，求 $\triangle ABC$ 的面积；

(3) 如果 $AB \perp BC$ ，求抛物线的表达式。

【答案】 (1) $D(-1,0)$

(2) $\frac{1}{4}$

$$(3) \quad y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$$

【解析】

【分析】(1) 本题考查了二次函数的性质，根据顶点式求得 $B(m, m+1)$ ，令 $x=0$ 得到 $A\left(0, \frac{1}{2}m^2 + m + 1\right)$ ，

求得直线 BC 的解析式为 $y = x + 1$ ，进而即可求解；

(2) 根据题意，分两种情况讨论，①与 x 轴只有 1 个交点；②过原点，根据一元二次方程根的判别式进行计算即可求解；

(3) 根据题意，过点 B 作 y 轴的垂线，垂足为 H ，进而得出 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，结合 A, B 的坐标，建立方程，解方程，得出 $m = 2$ ，进而求得抛物线解析式。

【小问 1 详解】

解：令 $x=0$ ，则 $y = \frac{1}{2}m^2 + m + 1$ ，则 $A\left(0, \frac{1}{2}m^2 + m + 1\right)$ ，

$$\because y = \frac{1}{2}(x-m)^2 + m + 1 (m \neq 0)$$

$$\therefore B(m, m+1)$$

又 $C(0, 1)$ ，

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$ ，代入 $B(m, m+1)$ ， $C(0, 1)$

$$\therefore \begin{cases} m+1 = mk + b \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} k = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = x + 1$ ，

令 $y = 0$ ，则 $x = -1$ ，

$$\therefore D(-1, 0)；$$

【小问 2 详解】

①当抛物线与 x 轴只有一个交点与 y 轴有一个交点时，

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时，} \frac{1}{2}(x-m)^2 + m + 1 = 0$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}x^2 - mx + \frac{1}{2}m^2 + m + 1 = 0$$

∵ 抛物线与坐标轴共有两个不同的交点

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}m^2 + m + 1 \right) = 0$$

解得 $m = -1$

$$\therefore A\left(0, \frac{1}{2}m^2 + m + 1\right), B(m, m+1)$$

$$\therefore A\left(0, \frac{1}{2}\right), B(-1, 0)$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$$

② 当抛物线过原点时，且与 x 轴有 2 个交点时，

将 $(0, 0)$ 代入解析式 $y = \frac{1}{2}(x - m)^2 + m + 1 (m \neq 0)$

$$\therefore 0 = \frac{1}{2}m^2 + m + 1$$

$$\text{即 } m^2 + 2m + 2 = 0$$

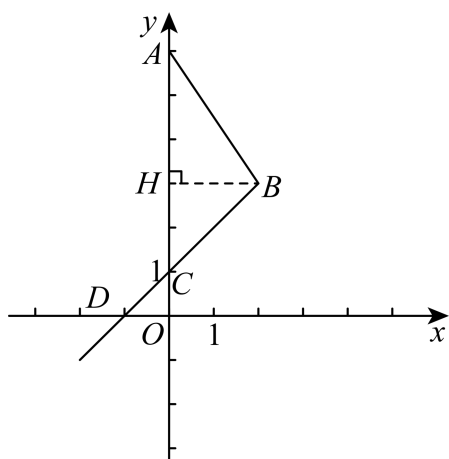
$$\therefore \Delta < 0$$

∴ 此情况不存在，

$$\text{综上所述, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}$$

【小问 3 详解】

解：如图所示，过点 B 作 y 轴的垂线，垂足为 H ，



$$\therefore C(0, 1), D(-1, 0)$$

$$\therefore CO = DO = 1$$

$\therefore \triangle COD$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle ACB = \angle DCO = 45^\circ$

又 $\because AB \perp BC$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AH = BH = CH$

$\therefore AC = 2BH$

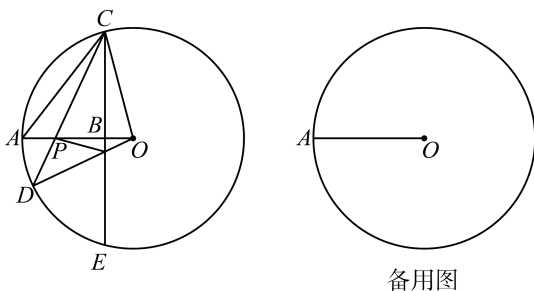
$\therefore A\left(0, \frac{1}{2}m^2 + m + 1\right), B(m, m+1)$

$\therefore \frac{1}{2}m^2 + m + 1 - 1 = 2m$

解得: $m = 0$ (舍去) 或 $m = 2$

$\therefore y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$.

25. 如图, 已知圆 O 的半径 $AO = r$, P 是半径 AO 上的一个动点 (点 P 不与点 A 、点 O 重合), 作线段 OP 的垂直平分线, 分别交线段 OP 于点 B 、交圆 O 于点 C 和点 E (点 C 在点 E 的上方). 连接 CP 并延长, 交圆 O 于点 D .



备用图

(1) 当点 P 是线段 AB 中点时, 求 $\frac{AC}{AO}$ 的值;

(2) 当 $r = 4$ 时,

① 如果 $PA = 1$, 求 PD 的长;

② 连接 OD 交 CE 于点 F , 连接 PF , 如果 $\triangle PDF$ 为等腰三角形, 求 CD 的长.

【答案】 (1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$;

(2) ① $\frac{7}{4}$; ② $4\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{5} + 2$.

【解析】

【分析】 (1) 利用线段垂直平分线和线段中点性质可得 $OB = PB = PA = \frac{1}{3}AO = \frac{1}{3}r$,

$\angle CBO = \angle CBA = 90^\circ$ ，利用勾股定理可求出 $AC = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$ ，即可求解；

(2) ① 延长 AO 交圆 O 于点 M ，连接 CM 、 AD ，可证 $\triangle APD \sim \triangle CPM$ ，得到 $\frac{DP}{MP} = \frac{AP}{CP}$ ，据此即可求解；② 分三种情况讨论： $PD = PF$ ， $DP = DF$ 和 $FD = FP$ ，进行解答即可求解。

【小问 1 详解】

解： $\because CE$ 是 OP 的垂直平分线，

$$\therefore OB = PB, \angle CBO = \angle CBA = 90^\circ,$$

$\because$ 点 P 是线段 AB 中点时，

$$\therefore PA = PB,$$

$$\therefore OB = PB = PA = \frac{1}{3}AO = \frac{1}{3}r,$$

$$\therefore AB = \frac{2}{3}r,$$

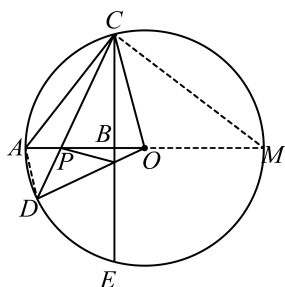
$$\text{在 Rt}\triangle OBC \text{ 中, } BC = \sqrt{OC^2 - OB^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{3}r\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}r,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}r\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}r\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r,$$

$$\therefore \frac{AC}{AO} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}r}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

【小问 2 详解】

解：① 延长 AO 交圆 O 于点 M ，连接 CM 、 AD ，则 $\angle ADC = \angle CMA$ ，即 $\angle ADP = \angle CMP$ ，



$$\therefore \angle APD = \angle CPM,$$

$$\therefore \triangle APD \sim \triangle CPM,$$

$$\therefore \frac{DP}{MP} = \frac{AP}{CP},$$

$$\therefore r = 4, PA = 1,$$

$$\therefore MP = 7,$$

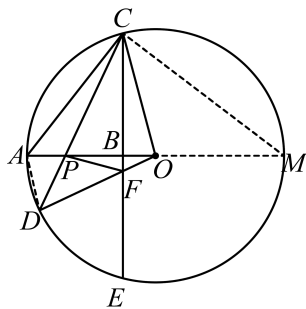
$\because CE$ 是 OP 的垂直平分线,

$$\therefore CP = CO = 4,$$

$$\therefore \frac{DP}{7} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore DP = \frac{7}{4};$$

② 如图, 分三种情况讨论:



当 $PD = PF$ 时, $\angle PDF = \angle PFD$,

$$\because OC = OD,$$

$$\therefore \angle OCD = \angle ODC,$$

$$\therefore \angle PFD = \angle OCD,$$

$$\because \angle PFD + \angle OFP = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle OCD + \angle OFP = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle COF + \angle CPF = 180^\circ,$$

$\because CE$ 是 OP 的垂直平分线,,

$$\therefore CP = CO, \quad FP = FO,$$

$$\therefore \angle CPO = \angle COP, \quad \angle FPO = \angle FOP,$$

$$\therefore \angle CPO + \angle FPO = \angle COP + \angle FOP,$$

即 $\angle CPF = \angle COF$,

$$\therefore \angle CPF = \angle COF = 90^\circ,$$

即 $\angle COD = 90^\circ$,

$$\therefore CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2};$$

当 $DP = DF$ 时, $\angle DPF = \angle DFP$,

$$\because \angle FPO = \angle FOP,$$

$$\therefore \angle PFD = \angle FPO + \angle FOP = 2\angle FPO,$$

$$\therefore \angle DPF = 2\angle FPO,$$

$$\because \angle CPO = \angle COP, \angle FPO = \angle FOP, \angle OCD = \angle ODC,$$

$$\therefore \angle CPO = \angle COP = \angle FPO = \angle FOP,$$

$$\therefore \angle CPO = 2\angle FPO,$$

$$\because \angle CPD = 180^\circ,$$

$$\therefore 2\angle FPO + \angle FPO + 2\angle FPO = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle FPO = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle FOP = 36^\circ, \angle DPF = \angle DFP = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle PDF = 180^\circ - 72^\circ \times 2 = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle FOP = \angle PDF,$$

$$\therefore PD = PO,$$

设 $PD = PO = x$, 则 $AP = 4 - x$, $MP = 4 + x$,

由 (1) 知 $\triangle APD \sim \triangle CPM$,

$$\therefore \frac{DP}{MP} = \frac{AP}{CP},$$

$$\text{即 } \frac{x}{4+x} = \frac{4-x}{4},$$

解得 $x = 2\sqrt{5} - 2$ 或 $x = -2\sqrt{5} - 2$ (不合, 舍去),

$$\therefore PD = 2\sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore CD = CP + PD = 4 + 2\sqrt{5} - 2 = 2\sqrt{5} + 2;$$

当 $FD = FP$ 时, $\angle FDP = \angle FPD$,

$$\because FP = FO,$$

$$\therefore FD = FO,$$

$$\therefore FD = \frac{1}{2}DO,$$

$$\because \angle OCD = \angle ODC,$$

$$\therefore \angle FPD = \angle OCD,$$

$$\therefore PF \parallel CO,$$

$$\therefore \triangle DPF \sim \triangle DCO,$$

$$\therefore \frac{DP}{DC} = \frac{DF}{DO} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DP = \frac{1}{2}DC,$$

即 $DP = CP$,

$\therefore CP = CO$,

$\therefore CD = 4 + 4 = 8$, 为圆 O 直径的, 不合题意, 故此种情况不存在;

综上, CD 的长为 $4\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{5} + 2$.

【点睛】 本题考查了线段垂直平分线的性质, 圆周角定理, 相似三角形的判定和性质, 勾股定理, 等腰三角形的性质, 三角形内角和定理及外角性质, 正确作出辅助线是解题的关键.