

2023 学年第二学期初三数学试卷

(总分: 150 分, 时间: 100 分钟)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列实数中, 不是有理数的是 ()

A. $\frac{2}{7}$

B. $0.\dot{3}2$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\cos 60^\circ$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了有理数和无理数的定义, 根据定义判定即可: 整数和分数统称为有理数; 无理数即无限不循环小数.

【详解】解: A、 $\frac{2}{7}$ 是有理数, 故本选项不符合题意;

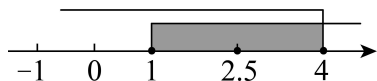
B、 $0.\dot{3}2$ 为循环小数, 是有理数, 故本选项不符合题意;

C、 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 是无理数, 故本选项符合题意;

D、 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 是有理数, 故本选项不符合题意;

故选: C.

2. 下列四个选项中所表示的 x 的取值范围与图中表示的 x 的取值范围相同的是 ()



A. 满足 $\begin{cases} x \geq 1 \\ 2x < 8 \end{cases}$ 的 x

B. 代数式 $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ 中的 x

C. $\triangle ABC$ 的三边长分别为 1.5、2.5 和 x

D. 到 2.5 所表示的点的距离不大于 1.5 的点所表示的 x

【答案】D

【解析】

【分析】由数轴可知, 解集为 $1 \leq x \leq 4$, 然后根据解一元一次不等式组, 二次根式有意义的条件, 三角形三边关系的应用, 数轴上两点之间的距离对各选项进行判断作答即可.

【详解】解：由数轴可知，解集为 $1 \leq x \leq 4$ ，

A 中 $\begin{cases} x \geq 1 \\ 2x < 8 \end{cases}$ 的解集为 $1 \leq x < 4$ ，故不符合要求；

B 中 $x-1 \geq 0$ ， $3-x \geq 0$ ，

解得， $1 \leq x \leq 3$ ，故不符合要求；

C 中第三边长的取值范围为 $2.5-1.5 < x < 1.5+2.5$ ，即 $1 < x < 4$ ，故不符合要求；

D 中 $|x-2.5| \leq 1.5$ ，

解得， $1 \leq x \leq 4$ ，故符合要求；

故选：D.

【点睛】本题考查了在数轴上表示解集，解一元一次不等式组，二次根式有意义的条件，三角形三边关系的应用，数轴上两点之间的距离等知识．熟练掌握在数轴上表示解集，解一元一次不等式组，二次根式有意义的条件，三角形三边关系的应用，数轴上两点之间的距离是解题的关键．

3. 下列计算正确的是 ()

A. $3^2 \times 3^3 = 3^6$

B. $3^{\frac{1}{2}} \div 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{6}}$

C. $2^3 \times 3^3 = 6^6$

D. $(3^3)^2 = 3^5$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考好了同底数幂乘除法计算，分数指数幂，积的乘方的逆运算，幂的乘方计算，熟知相关计算法则是解题的关键．

【详解】解：A、 $3^2 \times 3^3 = 3^5$ ，原式计算错误，不符合题意；

B、 $3^{\frac{1}{2}} \div 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{6}}$ ，原式计算正确，符合题意；

C、 $2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$ ，原式计算错误，不符合题意；

D、 $(3^3)^2 = 3^6$ ，原式计算错误，不符合题意；

故选：B.

4. 下列函数中，当 $x > 0$ 时， y 随 x 增大而增大的是 ()

A. $y = -\frac{1}{x}$

B. $y = -x + 1$

C. $y = x^2 - 2x$

D. $y = -1$

【答案】A

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数、一次函数、二次函数的图象与性质. 熟练掌握反比例函数、一次函数、二次函数的图象与性质是解题的关键.

根据反比例函数, 一次函数, 二次函数的图象与性质对各选项进行判断作答即可.

【详解】 解: 由题意知, A 中 $y = -\frac{1}{x}$, 当 $x > 0$ 时, y 随 x 增大而增大, 故符合要求;

B 中 $y = -x + 1$, 当 $x > 0$ 时, y 随 x 增大而减小, 故不符合要求;

C 中 $y = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$, 当 $x > 1$ 时, y 随 x 增大而增大, 故不符合要求;

D 中 $y = -1$ 是一条平行于 x 轴的直线, 故不符合要求;

故选: A.

5. 关于 x 的方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有实数根, 则 a 的取值范围是 ()

A. $a \leq 1$

B. $a \leq 1$ 且 $a \neq 0$

C. a 取一切实数

D. $a < 1$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题主要考查了根的判别式的应用, 解不等式等知识点, 分为两种情况: ①当 $a = 0$, ② $a \neq 0$, 根据已知得出 $\Delta \geq 0$, 求出即可, 能得出关于 a 的不等式是解此题的关键,

【详解】 解: $\because$ 方程有实根,

$\therefore$ 分为两种情况: ①当 $a = 0$ 时, $2x + 1 = 0$,

解得: $x = -\frac{1}{2}$;

②当 $a \neq 0$ 时,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有实数根,

$\therefore \Delta = 2^2 - 4 \times a \times 1 = 4 - 4a \geq 0$,

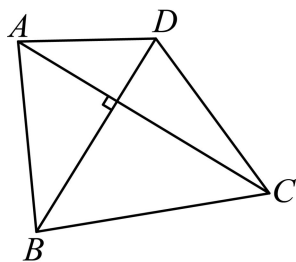
解得: $a \leq 1$,

故选: A.

6. 某同学对“对角线垂直的四边形”进行了探究: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD$, $AC \perp BD$,

$AD = a$, $BC = b$, 由上述条件, 得到了两个结论: ① $AC = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b)$, ② $CD = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. 对于

结论①、②下列说法正确的是 ()



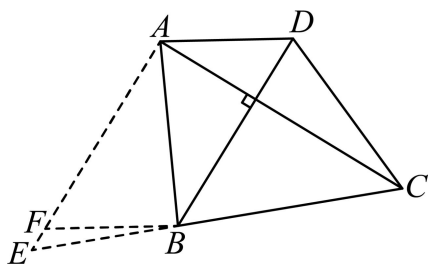
- A. ①正确、②错误 B. ①错误、②正确 C. ①、②正确 D. ①、②都错误

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的判定和性质，勾股定理等知识点，如图，过 A 作 $AE \parallel BD$ 交 CB 的延长线于点 E ，当 $\angle ACB = \angle E = 45^\circ$ 时，可证出 $AC = AE = \frac{\sqrt{2}}{2} CE$ ，在 $\triangle BEF$ 中可得出 $BE > a$ ，进而可得出 $CE > a + b$ ，据此即可得①错误，如图，设 AC ， BD 交于点 O ，利用勾股定理可得 $2CD^2 = a^2 + b^2$ ，故②正确，即可得出正确选项，熟练掌握其性质，正确的作出辅助线是解决此题的关键。

【详解】如图，过 A 作 $AE \parallel BD$ 交 CB 的延长线于点 E ，



$\because AC \perp BD$,

$\therefore AE \perp AC$ 即 $\angle EAC = 90^\circ$,

当 $\angle ACB = \angle E = 45^\circ$ 时，

$\therefore AE = AC$, $AE^2 + AC^2 = CE^2$

则 $AC = AE = \frac{\sqrt{2}}{2} CE$,

如图，过点 B 作 $BF \parallel AD$ 交 AE 于点 F ，

$\therefore$ 四边形 $ADBF$ 为平行四边形，

$\therefore BF = AD = a$,

如图，在 $\triangle EBF$ 中，

$\therefore \angle BFE > \angle E$

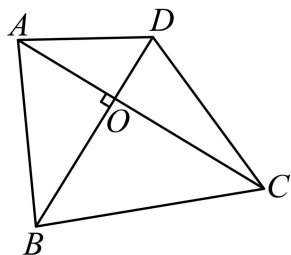
$$\therefore BE > BF \text{ 即 } BE > a,$$

$$\therefore CE = CB + BE = b + BE > b + a,$$

$$\therefore AC = AE = \frac{\sqrt{2}}{2} CE \neq \frac{\sqrt{2}}{2} (a + b),$$

故①错误;

如图, 设 AC , BD 交于点 O ,



$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\therefore AB^2 = AO^2 + BO^2, \quad CD^2 = DO^2 + CO^2, \quad AD^2 = AO^2 + DO^2, \quad BC^2 = BO^2 + CO^2,$$

$$\therefore AB = CD, \quad AD = a, \quad BC = b,$$

$$\therefore AB^2 + CD^2 = 2CD^2 = AO^2 + BO^2 + DO^2 + CO^2, \quad AD^2 + BC^2 = a^2 + b^2 = AO^2 + DO^2 + BO^2 + CO^2,$$

$$\therefore 2CD^2 = a^2 + b^2,$$

$$\therefore CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a^2 + b^2},$$

故②正确,

故选: B.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 9 的平方根是_____.

【答案】 ± 3

【解析】

【分析】 根据平方根的定义解答即可.

【详解】 解: $\because (\pm 3)^2 = 9,$

$\therefore 9$ 的平方根是 ± 3 .

故答案为 ± 3 .

【点睛】 本题考查了平方根的定义, 注意一个正数有两个平方根, 它们互为相反数; 0 的平方根是 0; 负数没有平方根.

8. 分解因式: $a^3 - a =$ _____.

【答案】 $a(a+1)(a-1)$

【解析】

【分析】 本题考查了提公因式和平方差公式, 熟练掌握提公因式和平方差公式是分解因式的关键.
首先用提公因式法, 再用平方差公式即可求解.

【详解】 原式: $= a(a^2 - 1)$,
 $= a(a+1)(a-1)$

故答案为 $a(a+1)(a-1)$.

9. 方程 $\sqrt{x+2} = -x$ 的解是_____.

【答案】 $x = -1$.

【解析】

【分析】 把方程两边平方后求解, 注意检验.

【详解】 把方程两边平方得 $x+2 = x^2$,
整理得 $(x-2)(x+1) = 0$,
解得: $x = 2$ 或 -1 ,
经检验, $x = -1$ 是原方程的解.
故本题答案为: $x = -1$.

【点睛】 本题考查无理方程的求法, 注意无理方程需验根.

10. 已知直线 $y = (k-1)x + 2$ 不经过第四象限, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \geq 1$

【解析】

【分析】 本题考查了函数的图象, 分 $k-1=0$ 和 $k-1 \neq 0$ 两种情况解答即可求解, 掌握一次函数的图象是解题的关键.

【详解】 解: 当 $k-1=0$, 即 $k=1$ 时, 直线 $y=2$,
此时直线经过一、二象限, 与 x 轴平行;
当 $k-1 \neq 0$, 直线为一次函数,
 $\therefore$ 直线 $y = (k-1)x + 2$ 不经过第四象限,
 $\therefore$ 直线经过一、二、三象限,

$$\therefore k-1>0,$$

$$\therefore k>1;$$

综上, k 的取值范围为 $k \geq 1$,

故答案为: $k \geq 1$.

11. 从分别标有 1 至 10 (十个自然数) 的十张 (除数字外其他完全相同) 卡片中任意抽取一张, 恰好为素数的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】先找出 1 至 10 (十个自然数) 中的素数有 2、3、5、7, 然后根据概率公式计算. 本题考查了概率公式: 某事件的概率 = 该事件所占有的结果数与总的结果数之比.

【详解】解: 依题意, 从分别标有 1 至 10 (十个自然数) 的十张 (除数字外其他完全相同) 卡片中任意抽取一张,

$\therefore$ 1 至 10 (十个自然数) 中的素数有 2、3、5、7

$$\therefore \text{恰好为素数的概率} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

故答案为: $\frac{2}{5}$.

12. 二元一次方程 $x+4y=9$ 的正整数解为 _____.

【答案】 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$

【解析】

【分析】本题考查了二元一次方程的解. 正确的解二元一次方程是解题的关键. 由 $x+4y=9$, 可得 $x=9-4y$, 当 $y=1$ 时, $x=5$; 当 $y=2$ 时, $x=1$, 然后作答即可.

【详解】解: $\because x+4y=9$,

$$\therefore x=9-4y,$$

当 $y=1$ 时, $x=5$;

当 $y=2$ 时, $x=1$,

$$\therefore \text{二元一次方程 } x+4y=9 \text{ 的正整数解为 } \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases},$$

故答案为: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$.

13. 化简: $2\vec{a} + 3\vec{b} - \frac{1}{3}(9\vec{a} - 3\vec{b}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\vec{a} + 4\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查向量的加减运算, 根据向量加减运算法则求解即可

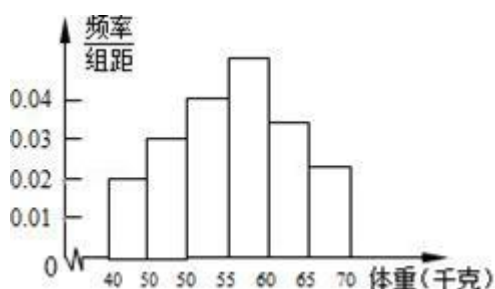
【详解】 解: $2\vec{a} + 3\vec{b} - \frac{1}{3}(9\vec{a} - 3\vec{b})$

$$= 2\vec{a} + 3\vec{b} - 3\vec{a} + \vec{b}$$

$$= -\vec{a} + 4\vec{b},$$

故答案为: $-\vec{a} + 4\vec{b}$.

14. 为了解全区 5000 名初中毕业生的体重情况, 随机抽测了 400 名学生的体重, 频率分布如图所示 (每小组数据可含最小值, 不含最大值), 其中从左至右前四个小长方形的高依次为 0.02、0.03、0.04、0.05, 由此可估计全区初中毕业生的体重不小于 60 千克的学生人数约为_____人.



【答案】 1500

【解析】

【详解】 解: 由图可知: 体重不小于 60 千克的学生人数占总人数的 $1 - (0.02 + 0.03 + 0.04 + 0.05) \times 5 = 0.3$, 所以全区初中毕业生的体重不小于 60 千克的学生人数为 $5000 \times 0.3 = 1500$ (人)

故答案为: 1500.

15. 已知: $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 2\angle B$, CD 平分 $\angle ACB$, $AD = 2$, $CD = 3$, $\angle B$ 的余弦值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了角平分线的定义、相似三角形的判定与性质, 求一个角的余弦, 熟练掌握以上知识点

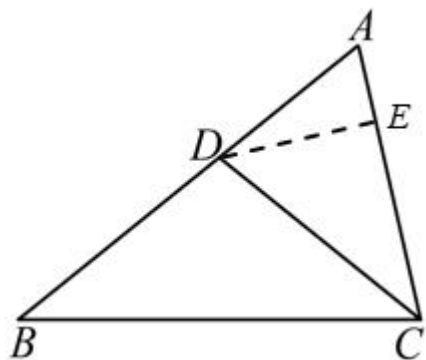
并灵活运用是解此题的关键.

过点 D 作 $DE \perp AC$, 根据角平分线可得 $\angle ACD = \angle BCD = \frac{1}{2} \angle ACB$, 然后得到 $\angle ACD = \angle B$, 证明出

$\triangle ADC \sim \triangle ACB$, 得到 $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$, 即可求得 AC , 然后设 $CE = x$, 则 $AE = AC - EC = \sqrt{10} - x$, 利

用 $AD^2 - AE^2 = CD^2 - CE^2 = DE^2$ 代入求出 $CE = \frac{3\sqrt{10}}{4}$, 然后根据余弦的概念求解即可.

【详解】解: 如图所示, 过点 D 作 $DE \perp AC$,



$\because CD$ 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle ACD = \angle BCD = \frac{1}{2} \angle ACB,$$

又 $\because \angle ACB = 2\angle B$,

$$\therefore \angle ACD = \angle B,$$

$\because \angle ACD = \angle B, \angle A = \angle A$,

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \text{ 即 } AC^2 = AD \cdot AB,$$

又 $\because AD = 2, BD = 3$

$$\therefore AB = AD + BD = 5,$$

$$\therefore AC^2 = AD \cdot AB = 10,$$

$$\therefore AC = \sqrt{10}, \text{ 负值舍去,}$$

设 $CE = x$, 则 $AE = AC - EC = \sqrt{10} - x$

$$\because AD^2 - AE^2 = CD^2 - CE^2 = DE^2$$

$$\therefore 2^2 - (\sqrt{10} - x)^2 = 3^2 - x^2$$

$$\text{解得 } x = \frac{3\sqrt{10}}{4}$$

$$\therefore CE = \frac{3\sqrt{10}}{4}$$

$$\therefore \cos \angle B = \cos \angle ACD = \frac{CE}{CD} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

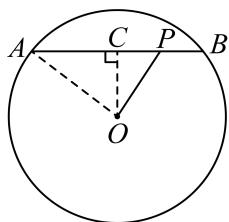
16. 已知 A, B 为半径为 1 的 $\odot O$ 上两点, P 在线段 AB 上, $PA = 3PB$, 若 $AB = x, OP = y$, 则 y 关于 x 的数量关系式为_____.

【答案】 $y = \frac{\sqrt{16-3x^2}}{4} (0 < x \leq 2)$

【解析】

【分析】 本题考查垂径定理、勾股定理, 画出草图, 利用垂径定理和勾股定理列方程, 然后整理即可得出 x 、 y 的数量关系.

【详解】 解: 如图, 过 O 作 $OC \perp AB$ 于 C , 连接 OA , 则 $AC = BC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}x$,



$$\therefore PA = 3PB,$$

$$\therefore PB = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{4}x, \text{ 则 } PC = \frac{1}{4}x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOC \text{ 中, } OA = 1, \text{ 则 } OC^2 = OA^2 - AC^2 = 1 - \frac{1}{4}x^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle POC \text{ 中, } OC^2 = OP^2 - PC^2 = y^2 - \frac{1}{16}x^2,$$

$$\therefore 1 - \frac{1}{4}x^2 = y^2 - \frac{1}{16}x^2, \text{ 则 } y^2 = 1 - \frac{3}{16}x^2 = \frac{16-3x^2}{16},$$

$$\therefore y = \pm \frac{\sqrt{16-3x^2}}{4},$$

$$\therefore y > 0,$$

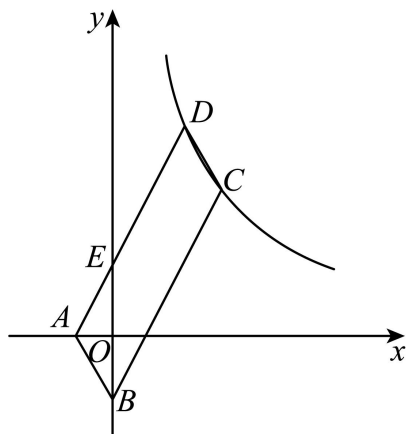
$$\therefore y = \frac{\sqrt{16-3x^2}}{4},$$

由题意, $0 < x \leq 2$,

$\therefore y$ 关于 x 的数量关系式为 $y = \frac{\sqrt{16-3x^2}}{4} (0 < x \leq 2)$,

故答案为: $y = \frac{\sqrt{16-3x^2}}{4} (0 < x \leq 2)$.

17. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的顶点 C 、 D 在双曲线 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 上, $A(-1, 0)$, $B(0, -2)$, AD 与 y 轴交于点 E , 若 $\triangle ABE$ 与四边形 $BCDE$ 的面积比为 $1:5$, 则 k 的值为_____.

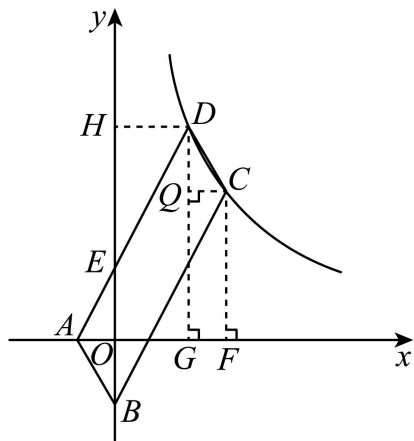


【答案】12

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数 k 值的几何意义, 作 $DG \perp x$ 轴, 垂足为 G , $CF \perp x$ 轴, 垂足为 F , $CQ \perp DG$, 垂足为 Q , 可证明 $\triangle ABO \cong \triangle CDQ$ (AAS) 得到 $AO = CQ = 1$, $OB = DQ = 2$, 利用 $\triangle AEO \sim \triangle DEH$ 可得点 D 的横坐标为 3, 设 $D(2, m)$, 则 $C(3, m-2)$ 根据反比例函数图象上点的坐标特征列出方程求出 m 值, 即可得到点 D 坐标, 从而得到 k 值.

【详解】解: 如图, 作 $DG \perp x$ 轴, 垂足为 G , $CF \perp x$ 轴, 垂足为 F , $CQ \perp DG$, 垂足为 Q ,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle ABC = \angle CDA,$$

$$\text{又} \because \angle GBE = \angle HED = \angle EDG,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle QDC,$$

在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle CDQ$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABO = \angle QDC \\ \angle AOB = \angle CQD = 90^\circ, \\ AB = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle CDQ (\text{AAS}),$$

$$\therefore AO = CQ = 1, OB = DQ = 2$$

$\because \triangle ABE$ 与四边形 $BCDE$ 的面积比为 1:5,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{1}{2} = \frac{AE}{ED},$$

$$\therefore DH \parallel AG,$$

$$\therefore \triangle AEO \sim \triangle DEH,$$

$$\therefore \frac{AO}{DH} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DH = 2,$$

设 $D(2, m)$, 则 $C(3, m-2)$,

$\because D, C$ 在反比例函数图象上,

$$\therefore 2m = 3(m-2), \text{ 解得 } m = 6,$$

$$\therefore D(2, 6),$$

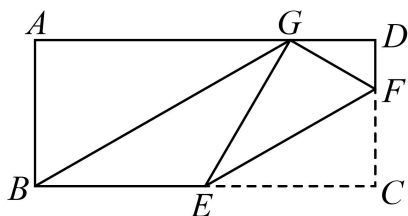
$\because$ 点 D 在反比例函数图象上,

$$\therefore k = 12.$$

故答案为: 12.

18. 折纸能够制作广泛的几何图形, 解决数学问题. 下面是解决某个数学问题的折纸过程: (1) 长方形纸片 $ABCD$ 沿某直线折叠, 使点 A 与点 D 重合, 折痕交 BC 于点 E ; (2) 展开后, 沿过点 E 的直线 EF 折叠,

使点 C 落在 AD 边上点 G 处. 连结 GB , 用量角器测得 $\angle GBC = 30^\circ$, 则长方形纸片中 $\frac{AB}{BC}$ 的值为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查矩形的性质，含 30° 角的直角三角形的三边关系，特殊角的三角函数，关键是理解折叠的性质.

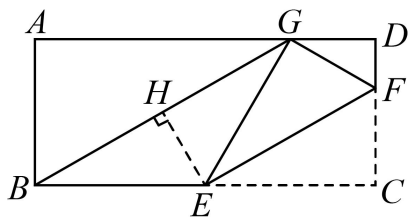
如详解图，过点 E 作 $EH \perp BG$ 于点 H ，由平行可知 $\text{Rt}\triangle BEH$ ， $\text{Rt}\triangle ABG$ 都是含 30° 角的直角三角形，利用边之间的关系即可求解.

【详解】 解：由折叠的性质可得， E 是 BC 中点， $\triangle ECF \cong \triangle EGF$ ，

$$\therefore BE = EG, EC = EG,$$

$$\therefore BE = GE$$

如图，过点 E 作 $EH \perp BG$ 于点 H ，



$$\text{设 } AB = a, BC = b, \text{ 则 } BE = \frac{1}{2}BC = \frac{b}{2},$$

$$\because \angle GBC = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle BEH \text{ 中, } \angle EBH = 30^\circ,$$

$$\therefore BH = BE \cdot \cos 30^\circ = \frac{b}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}b,$$

$$\because \text{在等腰三角形 } BEG \text{ 中, } EH \perp BG,$$

$$\therefore BH = GH,$$

$$\therefore BG = 2BH = \frac{\sqrt{3}}{2}b,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle GBC = \angle AGB = 30^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中, $\angle AGB = 30^\circ$,

$$\therefore BG = 2AB = 2a,$$

$$\therefore 2a = \frac{\sqrt{3}}{2}b, \text{ 即 } a = \frac{\sqrt{3}}{4}b,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{a}{b} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}b}{b} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\sqrt{8} - |1 - \sqrt{2}| + \pi^0 - 2^{\frac{1}{2}}.$

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了实数的混合运算, 解题的关键是掌握实数的混合运算法则. 先计算零指数幂、化简二次根式、绝对值, 再算加减即可.

【详解】 解: 原式 $= 2\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) + 1 - \sqrt{2}$
 $= \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 + 1$
 $= 2.$

20. 解方程组: $\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 9(1) \\ x - y = 6(2) \end{cases}.$

【答案】 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 先降次转化成两个一次方程组, 解方程组即可求解.

【详解】 解: $\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 9(1) \\ x - y = 6(2) \end{cases},$

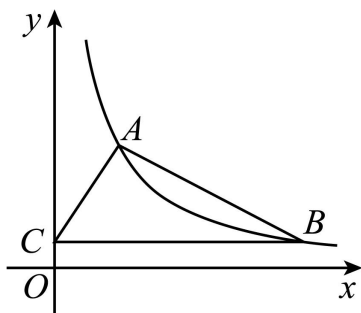
由方程①可得 $x+2y = -3$ 或 $x+2y = 3$,

则方程组可变为 $\begin{cases} x+2y = -3 \\ x-y = 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+2y = 3 \\ x-y = 6 \end{cases},$

解得 $\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$.

【点睛】 本题考查的是高次方程，关键是通过分解，把高次方程降次，得到二元一次方程组，用到的知识点是因式分解、加减法.

21. 已知：如图，第一象限内的点 A, B 在反比例函数的图像上，点 C 在 y 轴上， $BC \parallel x$ 轴，点 A 的坐标为 $(2, 4)$ ，且 $\cot \angle ACB = \frac{2}{3}$. 求：



(1) 反比例函数的解析式；

(2) 点 C 的坐标；

(3) $\angle ABC$ 的余弦值.

【答案】 (1) $y = \frac{8}{x}$

(2) $C(0, 1)$

(3) $\cos \angle ABC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查反比例函数与几何图形的应用，涉及待定系数法求函数解析式、图形与坐标、锐角三角函数，数形结合思想的运用是解答的关键.

(1) 利用待定系数法求函数解析式即可；

(2) 过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D ，则 $\cot \angle ACB = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{3}$ ，设 $C(0, t)$ ，根据坐标与图形性质得到 $AD = 4 - t$ ， $CD = 2$ ，进而列方程求解 t 值即可；

(3) 先求得 $B(8, 1)$ ，再根据勾股定理求解 $AB = 3\sqrt{5}$ ，再根据余弦定义求解即可.

【小问 1 详解】

解： 设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x}$ ，

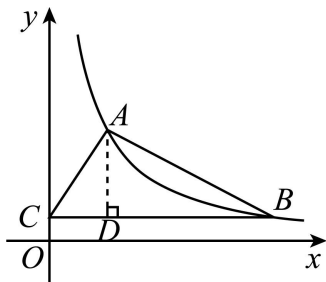
$\therefore$ 第一象限内的点 A 在反比例函数的图像上, 点 A 的坐标为 $(2, 4)$,

$$\therefore k = 2 \times 4 = 8,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{8}{x};$$

【小问 2 详解】

解: 过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D , 则 $\cot \angle ACB = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{3}$,



设 $C(0, t)$,

$\therefore BC \parallel x$ 轴,

$$\therefore AD = 4 - t, \quad CD = 2,$$

$$\therefore \frac{2}{4-t} = \frac{2}{3},$$

解得 $t = 1$, 经检验, 符合所列方程,

故点 C 坐标为 $(0, 1)$;

【小问 3 详解】

解: $\because BC \parallel x$ 轴,

$\therefore$ 点 B 的纵坐标为 1,

将 $y = 1$ 代入 $y = \frac{8}{x}$ 中, 得 $x = 8$, 则 $B(8, 1)$,

$$\therefore BD = 8 - 2 = 6,$$

又 $AD = 3$, $\angle ADB = 90^\circ$,

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{BD}{AB} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

22. 如图 1 所示, 某种汽车转子发动机的平面图, 其中的转子形状接近于图 2 所示的曲边三角形, 其中等边

$\triangle ABC$ 的边长为 20cm, 分别以 A 、 B 、 C 为圆心, AB 为半径作 $\widehat{BC}$ 、 $\widehat{AC}$ 、 $\widehat{AB}$, M 为 $\triangle ABC$ 的中心.



图1

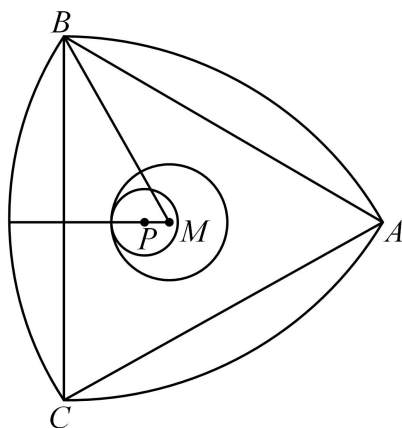


图2

(1) 若 Q 为 $\widehat{BC}$ 上任意一点，则 MQ 的最小值为 _____ cm，最大值为 _____ cm.

(2) 转子沿圆 P 转动时，始终保持 $\odot M$ 与 $\odot P$ 相切， $\odot M$ 的半径为 8cm， $\odot P$ 的半径为 5cm，当圆心 P 在线段 AM 的延长线上时，求 B 、 P 两点间的距离的平方.

【答案】 (1) $\left(20 - \frac{20\sqrt{3}}{3}\right), \frac{20\sqrt{3}}{3}$

(2) $\frac{427}{3} - 20\sqrt{3}$

【解析】

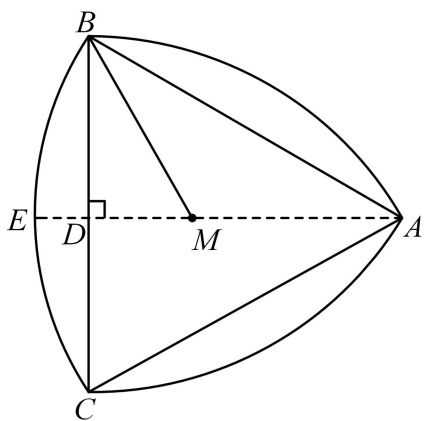
【分析】 本题考查了解直角三角形，圆与圆的位置关系，

(1) 过点 M 作 $MD \perp BC$ 交 BC 于点 D ，交 $\widehat{BC}$ 于点 E ，解 $\text{Rt}\triangle BDM$ ，求得 BM ，进而根据点 Q 的位置求得最值，即可求解；

(2) 根据题意画出图形，根据两圆的位置关系可得 $PM = 3$ ，进而根据勾股定理，即可求解.

【小问 1 详解】

解：如图所示，过点 M 作 $MD \perp BC$ 交 BC 于点 D ，交 $\widehat{BC}$ 于点 E ，

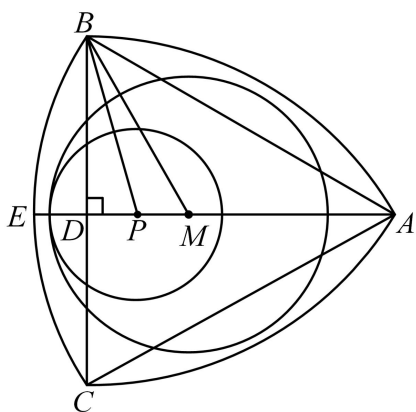


$$\therefore \angle MBD = 30^\circ, \quad BD = \frac{1}{2}BC = 10,$$

又 $\because MB = MA, AE = AB = 20,$

当 Q 点在 B 或 C 点时, MQ 取的最大值, 最大值为 $MB = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

解: 如图所示,

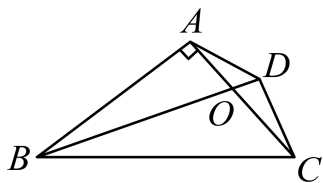

$$\therefore PM = 8 - 5 = 3$$

$$\therefore BP^2 = BD^2 + DP^2$$

$$= 100 + \left(\frac{10\sqrt{3}}{3} - 3 \right)^2$$

$$= \frac{427}{3} - 20\sqrt{3}.$$

23. 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $AC \perp AB$, $OA \cdot OC = OB \cdot OD$;



(1) 求证: $DB \perp DC$.

(2) 过点 B 作 $BE \perp AD$ 交 DA 延长线于点 E , 延长 BE 、 CD 交于点 F , 分别取 BC 、 CF 的中点 P 、 Q , 连结 PQ 、 AQ , 求证: QP 平分 $\angle A Q D$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由 $OA \cdot OC = OB \cdot OD$, 可得 $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC}$, 进而可证 $\triangle AOB \sim \triangle DOC$, 则 $\angle CDO = \angle BAO = 90^\circ$, $DB \perp DC$;

(2) 如图, 连结 PA , PD , 记 PQ 、 AD 的交点为 H , 由 P 为 BC 的中点, 可得 $PA = \frac{1}{2}BC$, $PD = \frac{1}{2}BC$, 则 $PA = PD$, 由 P , Q 为 BC , CF 中点, 可得 $PQ \parallel BF$, 则 $PH \perp AD$, PQ 垂直平分 AD , $QA = QD$, 证明 $\triangle AQP \cong \triangle DQP$ (SSS), 则 $\angle AQP = \angle DQP$, 即 QP 平分 $\angle A Q D$.

【小问 1 详解】

证明: $\because OA \cdot OC = OB \cdot OD$,

$$\therefore \frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC},$$

$$\therefore \angle AOB = \angle DOC$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle DOC,$$

$$\therefore \angle CDO = \angle BAO = 90^\circ,$$

$$\therefore DB \perp DC;$$

【小问 2 详解】

证明: 如图, 连结 PA , PD , 记 PQ 、 AD 的交点为 H ,

【答案】(1) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$, 顶点 $P\left(2, \frac{4}{3}\right)$

(2) $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$

(3) $m = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ 或 $3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】此题考查了一次函数的图象和性质、等腰三角形的性质、待定系数法求函数解析式、二次函数的图象和性质等知识，数形结合和分类讨论是解题的关键.

(1) 利用待定系数法求出函数解析式，化为顶点式，即可得到顶点 P 坐标；

(2) 求出点 $P(2, 1)$ ，得到 $y = -\frac{m}{3}x^2 + \frac{4}{3}mx = -\frac{m}{3}(x^2 - 4x + 4) + \frac{4}{3}m$ ，则 $P\left(2, \frac{4}{3}m\right)$ ，则 $1 = \frac{4}{3}m$ ，求出 $m = \frac{3}{4}$ ，求出 a 、 b 的值，即可得到答案；

(3) 分两种情况分别进行求解即可.

【小问 1 详解】

解：当 $m = 1$ 时，抛物线 $y = ax^2 + bx (a < 0)$ 经过点 $A(1, 1)$ 、 $B(3, 1)$ ，把 $A(1, 1)$ 、 $B(3, 1)$ 代入得，

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ 1 = 9a + 3b \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x,$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + \frac{4}{3}$$

$$\therefore \text{顶点 } P\left(2, \frac{4}{3}\right)$$

【小问 2 详解】

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx (a < 0)$ 经过点 $A(1, m)$ 、 $B(3, m)$ ，点 P 为抛物线顶点.

$$\therefore x_P = \frac{1+3}{2} = 2,$$

把 $x_P = 2$ 代入 $y = \frac{1}{2}x$ 得到 $y_P = 1$,

$$\therefore P(2, 1)$$

把 $A(1, m), B(3, m)$ 代入 $y = ax^2 + bx$ 中

$$\text{得到} \begin{cases} m = a + b \\ m = 9a + 3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{m}{3} \\ b = \frac{4}{3}m \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{m}{3}x^2 + \frac{4}{3}mx = -\frac{m}{3}(x^2 - 4x + 4) + \frac{4}{3}m$$

$$\text{即 } y = -\frac{m}{3}(x-2)^2 + \frac{4}{3}m,$$

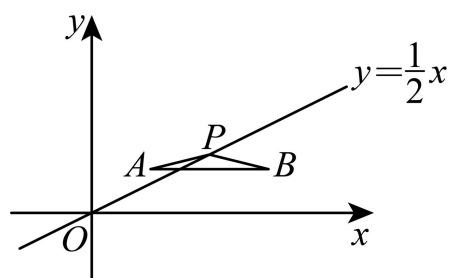
$$\therefore P\left(2, \frac{4}{3}m\right),$$

$$\therefore 1 = \frac{4}{3}m,$$

$$\therefore m = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{4}x^2 + x$$



【小问 3 详解】

由题意可知 $PQ \neq PB$,

$\therefore$ 仅有 $BP = BQ$ 和 $QP = QB$ 两种情况,

由 (2) 可知, $P\left(2, \frac{4}{3}m\right)$,

设直线 OP 的解析式为 $y = tx$ ，把 $P\left(2, \frac{4}{3}m\right)$ 代入得到， $\frac{4}{3}m = 2t$ ，

$$\therefore t = \frac{2}{3}m,$$

$$\therefore y = \frac{2}{3}mx,$$

当 $y = m$ 时， $m = \frac{2}{3}mx$ ，解得 $x = \frac{3}{2}$ ，

$$\therefore Q\left(\frac{3}{2}, m\right)$$

① $BP = BQ$ 时， $\therefore BP^2 = BQ^2$ ，

$$\therefore 1 + \left(\frac{1}{3}m\right)^2 = \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 \quad \frac{1}{9}m^2 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$

$$, \quad m^2 = \frac{45}{4},$$

$$\therefore m = \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad (\text{负舍})$$

② $QP = QB$ ， $\therefore QP^2 = QB^2$

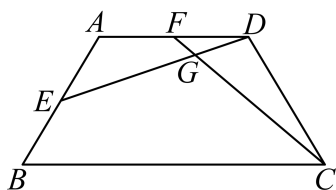
$$\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}m - m\right)^2 = \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{3}m\right)^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2, \quad m^2 = 18,$$

$$\therefore m = 3\sqrt{2} \quad (\text{负舍})$$

综上所述， $m = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ 或 $3\sqrt{2}$

25. 已知：四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD = DC$ ， $\angle B = \angle BCD$ ， E 、 F 分别为 AB 、 AD 中点， DE 、 CF 相交于点 G 。



(1) 如图，如果 $AD < BC$ ，求证： $\angle EGC = \angle A$ 。

(2) 当 $\angle A = 120^\circ$, $FG = 1$ 时, 求 BC 的长;

(3) 当 $\triangle CGD$ 为直角三角形时, 线段 AD 与 BC 之间有怎样的数量关系? 并说明理由.

【答案】(1) 见解析 (2) $BC = 4\sqrt{7}$

(3) $AD = \frac{\sqrt{3}}{3}BC$ 或 $AD = BC$, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 过 D 作 $DH \parallel AB$ 交 BC 于 H , 证出四边形 $ABCD$ 为等腰梯形, 再证出 $\triangle AED \cong \triangle DFC$ (SAS), 利用三角形的外角性质和等量代换即可得出答案;

(2) 先证出 $\triangle DCH$ 为正三角形, 然后设 $AF = FD = a$, 得出 $CM = 6a$, 证出 $\triangle FDG \sim \triangle CMG$, 用相似比得出 $FC = 7 = DE = EM$, 利用 $\triangle DCG \sim \triangle DMC$ 得出 $(2a)^2 = 28$, 求出 a 值, 即可得解;

(3) 先利用三角形边角关系得出 $\angle FCD \neq 90^\circ$, 然后分类讨论① $\angle EDC = 90^\circ$ ② $\angle DGC = 90^\circ$ 两种情况, 即可得解.

【小问 1 详解】

过 D 作 $DH \parallel AB$ 交 BC 于 H ,

$\therefore \angle ABH = \angle DHC$,

$\therefore \angle B = \angle BCD$,

$\therefore \angle ABH = \angle DHC = \angle BCD$,

$\therefore DH = DC$,

$\therefore AB = AD = DC$,

$\therefore DH = AB$

$\therefore DH \parallel AB$,

$\therefore$ 四边形 $ABHD$ 为平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore AD < BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为梯形,

$\therefore AB = DC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形,

$\therefore \angle A = \angle ADC$, 又 E, F 分别为 AB, AD 中点,

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB, \quad DF = \frac{1}{2}AD,$$

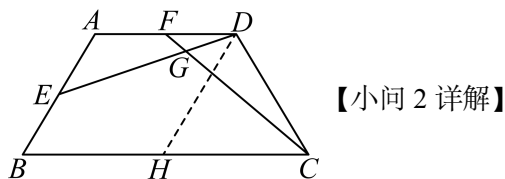
$$\therefore AE = DF \quad \text{又} \quad AD = DC,$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle DFC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DCF,$$

$$\therefore \angle EGC = \angle DCF + \angle GDC = \angle ADE + \angle GDC = \angle ADC,$$

$$\therefore \angle EGC = \angle A,$$



$$\therefore \angle A = 120^\circ, \quad AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ = \angle DCB,$$

$$\therefore AB = DH = DC,$$

$$\therefore \triangle DCH \text{ 为正三角形},$$

$$\therefore BC = BH + CH = AD + CD = 2AD = 2CD = 2AB$$

延长 DE 交 CB 于 M , 设 $AF = FD = a$,

$$\therefore BC = 2a,$$

$$\therefore E \text{ 为 } AB \text{ 的中点}, \quad AD \parallel BC,$$

$$\therefore AE = BE, \quad \angle DAE = \angle MBE, \quad \angle ADM = \angle BME,$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle BEM \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AD = BM,$$

$$\therefore BM = AD = 2a$$

$$\therefore CM = 4a + 2a = 6a$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle FDG \sim \triangle CMG,$$

$$\therefore \frac{DF}{MC} = \frac{FG}{CG} = \frac{a}{6a} = \frac{1}{6} = \frac{DG}{GM}$$

$$\therefore FG = 1,$$

$$\therefore GC = 6, \quad GM = 6DG, \quad DM = 7DG,$$

$$\therefore FC = 7 = DE = EM,$$

$$\therefore DM = 2 \times 7 = 14,$$

$$\text{又} \because \angle ADE = \angle M = \angle DCF, \quad \angle MDC = \angle GDC,$$

$$\therefore \triangle DCG \sim \triangle DMC,$$

$$\therefore \frac{DC}{DM} = \frac{DG}{DC},$$

$$\therefore DC^2 = DG \cdot DM,$$

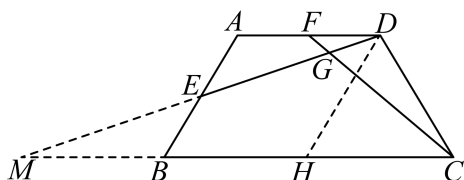
$$\therefore (2a)^2 = \frac{1}{7} DM^2 = \frac{1}{7} \times 14^2 = 28$$

$$\therefore a^2 = 7,$$

$$\therefore a = \sqrt{7} \quad (\text{负值已舍}),$$

$$\therefore BC = 4a,$$

$$\therefore BC = 4\sqrt{7};$$



【小问3详解】

$$\because DF = \frac{1}{2} CD,$$

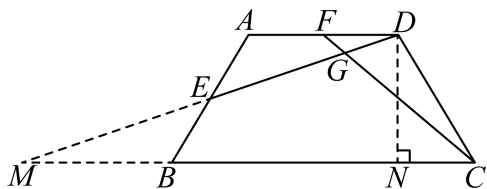
$$\therefore DF < CD,$$

$$\therefore \angle DFC > \angle FCD,$$

$$\therefore \angle FCD \neq 90^\circ,$$

$\therefore$ 仅两种分类,

① $\angle EDC = 90^\circ$, 延长 DE, CB 交于 M , 过 D 作 $DN \perp BC$ 于 N ,



$$\text{设 } AD = AB = CD = BM = x \quad BC = y,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形,

$$\therefore CN = \frac{BC - AD}{2} = \frac{y - x}{2},$$

$$\therefore \angle CDM = \angle CND = 90^\circ, \quad \angle DCN = \angle DCM,$$

$$\therefore \triangle DCN \sim \triangle MCD,$$

$$\therefore \frac{DC}{MC} = \frac{CN}{DC},$$

$$\therefore CD^2 = CN \cdot MC,$$

$$\therefore x^2 = \frac{y-x}{2}(x+y),$$

$$\therefore 2x^2 = y^2 - x^2,$$

$$\therefore y^2 = 3x^2,$$

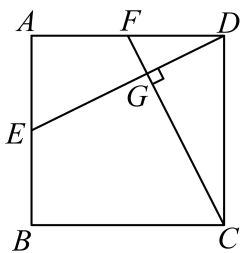
$$\because x > 0, \quad y > 0,$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x \text{ 即 } AD = \frac{\sqrt{3}}{3} BC,$$

$$\textcircled{2} \angle DGC = 90^\circ, \text{ 则 } \angle EGC = 90^\circ = \angle A,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 为正方形},$$

$$\therefore AD = BC,$$



【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，平行四边形的判定和性质，等腰梯形的判定和性质，等边三角形的判定和性质等知识点，熟练掌握其性质合理作出辅助线是解决此题的关键.