

2023 学年第二学期九年级数学学科 5 月教学质量检测卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸 的相应位置上】

1. 下列二次根式中，与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{9}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{18}$

【答案】C

【解析】

【分析】先把每个二次根式进行化简，化成最简二次根式，后比较被开方数即可.

【详解】A. $\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{3}$ 的被开方数不相同，故不是同类二次根式；

B. $\sqrt{9} = 3$ ，与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式；

C. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，与 $\sqrt{3}$ 被开方数相同，故是同类二次根式；

D. $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ，与 $\sqrt{3}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式.

故选：C.

【点睛】本题考查了二次根式的化简，同类二次根式，熟练掌握根式化简的基本方法，灵活运用同类二次根式的定义判断解题是求解的关键.

2. 用换元法解方程 $\frac{x-1}{x^2} + \frac{x^2}{1-x} = 2$ 时，若设 $\frac{x-1}{x^2} = y$ 则原方程可化为关于 y 的方程是 ()

- A. $y^2 - 2y + 1 = 0$ B. $y^2 - 2y - 1 = 0$ C. $y^2 + y - 2 = 0$ D. $y^2 - y - 2 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了解分式方程，先把原方程变成 $y + \frac{1}{y} = 2$ ，再去分母即可得到答案.

【详解】解： $\frac{x-1}{x^2} + \frac{x^2}{1-x} = 2$

设 $\frac{x-1}{x^2} = y$ ，则 $\frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{y}$ ，

∴原方程为 $y + \frac{1}{y} = 2$, 即 $y^2 - 2y + 1 = 0$,

故选: A.

3. 我们经常将调查、收集得来的数据用各类统计图进行整理与表示. 下列统计图中, 能凸显由数据所表现出来的部分与整体的关系的是()

A. 条形图

B. 扇形图

C. 折线图

D. 频数分布直方图

【答案】B

【解析】

【分析】根据统计图的特点判定即可.

【详解】解: 统计图中, 能凸显由数据所表现出来的部分与整体的关系的是扇形图.

故选: B.

【点睛】本题考查了统计图的特点, 条件统计图能反映各部分的具体数值, 扇形统计图能反映各个部分占总体的百分比, 折线统计图能反映样本或总体的趋势, 频数分布直方图能反映样本或总体的分布情况, 熟练掌握各统计图的特点是解题的关键.

4. 如果反比例函数图象经过点 $(4, -2)$, 则这个反比例函数的解析式为 ()

A. $y = -\frac{2}{x}$

B. $y = \frac{2}{x}$

C. $y = -\frac{8}{x}$

D. $y = \frac{8}{x}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用待定系数法即可求得.

【详解】解: 设这个反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$,

由题意, 将点 $(4, -2)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 得: $k = -2 \times 4 = -8$,

则这个反比例函数的解析式为 $y = -\frac{8}{x}$,

故选: C.

【点睛】本题考查了求反比例函数的解析式, 熟练掌握待定系数法是解题关键.

5. 下列命题中, 真命题是()

A. 对角线互相垂直的梯形是等腰梯形

B. 对角线互相垂直的平行四边形是正方形

C. 对角线平分一组对角的平行四边形是菱形

D. 对角线平分一组对角的梯形是直角梯形

【答案】C

【解析】

【分析】利用特殊四边形的判定定理对每个选项逐一判断后即可确定正确的选项.

【详解】A. 对角线互相垂直且相等的梯形是等腰梯形，故错误；

B. 对角线相等且互相垂直的平行四边形是正方形，故错误；

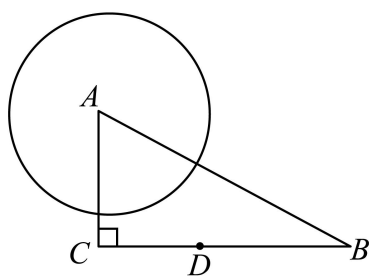
C. 对角线平分一组对角的平行四边形是菱形，正确；

D. 对角线平分一组对角的梯形是菱形，故错误.

故选：C.

【点睛】本题考查了命题与定理的知识，解题的关键是了解特殊四边形的判定定理，难度不大.

6. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 7$ ，点 D 在边 BC 上， $CD = 3$ ， $\odot A$ 的半径长为 3， $\odot D$ 与 $\odot A$ 相交，且点 B 在 $\odot D$ 外，那么 $\odot D$ 的半径长 r 的取值范围是 ()



A. $1 < r < 4$

B. $2 < r < 4$

C. $1 < r < 8$

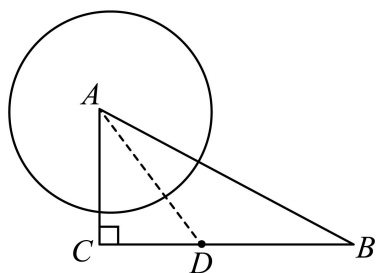
D. $2 < r < 8$

【答案】B

【解析】

【分析】连接 AD ，根据勾股定理得到 $AD = 5$ ，根据圆与圆的位置关系得到 $r > 5 - 3 = 2$ ，由点 B 在 $\odot D$ 外，于是得到 $r < 4$ ，即可得到结论.

【详解】解：连接 AD ，



$\because AC = 4$ ， $CD = 3$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore AD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\because \odot A$ 的半径长为 3, $\odot D$ 与 $\odot A$ 相交,
 $\therefore r > 5 - 3 = 2$,
 $\because BC = 7$,
 $\therefore BD = 4$,
 $\because$ 点 B 在 $\odot D$ 外,
 $\therefore r < 4$,
 $\therefore \odot D$ 的半径长 r 的取值范围是 $2 < r < 4$,

故选: B.

【点睛】本题考查了圆与圆的位置关系, 点与圆的位置关系, 设点到圆心的距离为 d , 则当 $d = r$ 时, 点在圆上; 当 $d > r$ 时, 点在圆外; 当 $d < r$ 时, 点在圆内.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 计算: $2a \cdot 3ab =$ _____.

【答案】 $6a^2b$.

【解析】

【分析】利用单项式乘单项式的法则进行计算即可.

【详解】解: $2a \cdot 3ab = 6a^2b$

故填: $6a^2b$.

【点睛】单项式相乘, 把它们的系数、相同字母分别相乘, 对于只在一个单项式里含有的字母, 则连同它的指数作为积的一个因式.

8. 已知 $f(x) = \frac{2}{x-1}$, 那么 $f(3)$ 的值是_____.

【答案】 1.

【解析】

【分析】根据 $f(x) = \frac{2}{x-1}$, 将 $x = 3$ 代入即可求解.

【详解】解: 由题意得: $f(x) = \frac{2}{x-1}$,

$\therefore$ 将 $x = 3$ 代替表达式中的 x ,

$\therefore f(3) = \frac{2}{3-1} = 1$.

故答案为: 1.

【点睛】 本题考查函数值的求法，解答本题的关键是明确题意，利用题目中新定义解答.

9. 已知正比例函数 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象经过第二、四象限, 那么 y 的值随着 x 的值增大而_____. (填“增大”或“减小”)

【答案】 减小

【解析】

【分析】 此题主要考查了正比例函数的性质, 关键是掌握正比例函数的性质: 正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图象是一条经过原点的直线, 当 $k > 0$ 时, 该直线经过第一、三象限, 且 y 的值随 x 的值增大而增大; 当 $k < 0$ 时, 该直线经过第二、四象限, 且 y 的值随 x 的值增大而减小. 根据正比例函数的性质进行解答即可.

【详解】 解: 函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图象经过第二、四象限, 那么 y 的值随 x 的值增大而减小, 故答案为: 减小.

10. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 有两个实数根, 那么 m 的值是_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), 若 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 则方程有两个不相等的实数根, 若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 则方程有两个相等的实数根, 若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 则方程没有实数根, 据此求解即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 有两个实数根,
 $\therefore \Delta = (-4)^2 - 4m = 0$,
 $\therefore m = 4$,
故答案为: 4.

11. 如果从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 中任意抽取一个数字, 抽到的数是 3 的倍数的概率是_____.

【答案】 $\frac{3}{10}$

【解析】

【分析】 用抽到的数是 3 的倍数的结果数除以所有等可能结果数即可.

【详解】 解: $\because$ 任意抽取一个数字共有 10 种等可能结果, 其中抽到的数是 3 的倍数的有 3、6、9 这 3 种结果,

$\therefore$ 抽到的数是 3 的倍数的概率是 $\frac{3}{10}$,

故答案为: $\frac{3}{10}$.

【点睛】此题考查了概率公式, 熟记事件 A 的概率公式: $P(A) = \text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数} \div \text{所有可能出现的结果数}$.

12. 如果将抛物线 $y = x^2$ 向左平移 3 个单位, 那么所得新抛物线的表达式是 _____.

【答案】 $y = (x + 3)^2$

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数图象的平移问题, 根据“上加下减, 左加右减”的平移规律求解即可.

【详解】解: 将抛物线 $y = x^2$ 向左平移 3 个单位, 那么所得新抛物线的表达式是 $y = (x + 3)^2$,

故答案为: $y = (x + 3)^2$.

13. 为了解某区六年级 8400 名学生中会游泳的学生人数, 随机调查了其中 400 名学生, 结果有 170 名学生会游泳, 那么估计该区会游泳的六年级学生人数约为 _____ 人.

【答案】 3570

【解析】

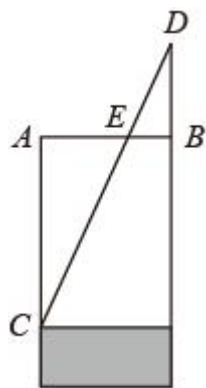
【分析】本题主要考查了用样本估计总体, 用 8400 乘以样本中会游泳的人数占比即可得到答案.

【详解】解: $8400 \times \frac{170}{400} = 3570$ 人,

$\therefore$ 估计该区会游泳的六年级学生人数约为 3570 人,

故答案为: 3570.

14. 《九章算术》中记载了一种测量井深的方法. 如图所示, 在井口 B 处立一根垂直于井口的木杆 BD , 从木杆的顶端 D 观察水岸 C , 视线 DC 与井口的直径 AB 交于点 E , 如果测得 $AB = 1.6$ 米, $BD = 1$ 米, $BE = 0.2$ 米, 那么井深 AC 为 _____ 米.



【答案】 7

【解析】

【分析】由题意易得 $\triangle ACE \sim \triangle BDE$ ，则有 $\frac{AC}{BD} = \frac{AE}{BE}$ ，然后问题可求解.

【详解】解： $\because AC \parallel BD$ ，

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle BDE,$$

$$\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{AE}{BE},$$

$$\because AB = 1.6 \text{ 米}, BD = 1 \text{ 米}, BE = 0.2 \text{ 米},$$

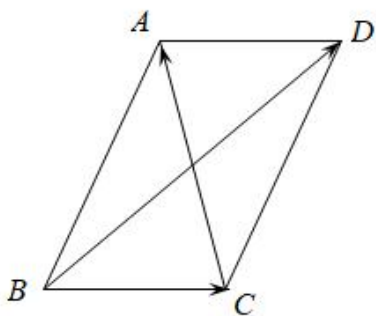
$$\therefore \frac{AC}{1} = \frac{1.6 - 0.2}{0.2},$$

解得 $AC = 7$ 米，

故答案为 7.

【点睛】本题主要考查相似三角形的性质与判定，熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

15. 如图， AC 、 BD 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线，设 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{BD}$ 用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示为 _____.



【答案】 $2\vec{a} + \vec{b}$.

【解析】

【分析】利用平行四边形的性质，三角形法则求解即可.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD = BC, AD \parallel BC, AB = CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{a},$$

$$\because \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \vec{b} + \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = \vec{b} + \vec{a},$$

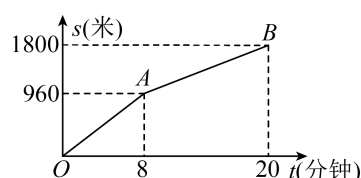
$$\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a} + \vec{b}.$$

故答案为: $2\vec{a} + \vec{b}$.

【点睛】 本题考查平行四边形的性质, 三角形法则等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

16. 小明从家步行到学校需走的路程为 1800 米. 图中的折线 OAB 反映了小明从家步行到学校所走的路程 s (米)与时间 t (分钟)的函数关系, 根据图象提供的信息, 当小明从家出发去学校步行 15 分钟时, 到学校还需步行____米.



【答案】 350.

【解析】

【分析】 当 $8 \leq t \leq 20$ 时, 设 $s=kt+b$, 将 $(8, 960)$ 、 $(20, 1800)$ 代入求得 $s=70t+400$, 求出 $t=15$ 时 s 的值, 从而得出答案.

【详解】 解: 当 $8 \leq t \leq 20$ 时, 设 $s=kt+b$,
将 $(8, 960)$ 、 $(20, 1800)$ 代入, 得:

$$\begin{cases} 8k + b = 960 \\ 20k + b = 1800 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} k = 70 \\ b = 400 \end{cases},$

$$\therefore s=70t+400;$$

当 $t=15$ 时, $s=1450$,

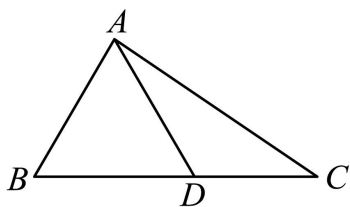
$$1800 - 1450 = 350,$$

$\therefore$ 当小明从家出发去学校步行 15 分钟时, 到学校还需步行 350 米.

故答案为: 350.

【点睛】 本题主要考查一次函数的应用, 解题的关键是理解题意, 从实际问题中抽象出一次函数的模型, 并熟练掌握待定系数法求一次函数的解析式.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=8$, $BC=14$, $\angle B=60^\circ$, 点 D 在边 BC 上, $CD=6$, 连接 AD , 如果将 $\triangle ACD$ 沿直线 AD 翻折后, 点 C 的对应点为点 E , 那么点 E 到直线 BD 的距离为_____.



【答案】 $3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了等边三角形的性质与判定，折叠的性质，解直角三角形等等，过点 E 作 $EH \perp BD$ 于 H ，证明 $\triangle ABD$ 是等边三角形，进而求得 $\angle ADC = 120^\circ$ ，再由折叠得到 $\angle ADE = \angle ADC = 120^\circ$ ，进而求出 $\angle HDE = 60^\circ$ ，最后在 $\text{Rt}\triangle HED$ 中使用三角函数即可求出 HE 的长.

【详解】 解： 如图所示，过点 E 作 $EH \perp BD$ 于 H ，

$$\because BC = 14, CD = 6,$$

$$\therefore BD = BC - CD = 8,$$

$$\because AB = BD = 8, \angle B = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle ADB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 120^\circ,$$

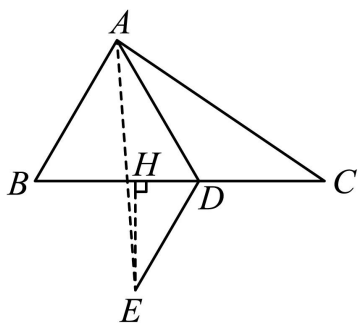
由折叠的性质可得 $DE = CD = 6$ ， $\angle ADE = \angle ADC = 120^\circ$ ，

$$\therefore \angle HDE = 60^\circ,$$

$$\therefore EH = DE \cdot \sin \angle HDE = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 到直线 } BD \text{ 的距离为 } 3\sqrt{3},$$

故答案为： $3\sqrt{3}$.



18. 在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 12$ ， $BC = 16$ ，点 O 在对角线 AC 上， $\odot O$ 的半径为 4，如果 $\odot O$ 与矩形 $ABCD$ 的各边都没有公共点，那么线段 AO 长的取值范围是_____.

【答案】 $\frac{20}{3} < AO < \frac{40}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了直线与圆的位置关系，矩形的性质，相似三角形的判定与性质，勾股定理，正确作出图形是解题的关键. 根据勾股定理得到 $AC = 10$ ，如图 1，设 $\odot O$ 与 AD 边相切于点 E ，连接 OE ，如图 2，设 $\odot O$ 与 BC 边相切于 F ，连接 OF ，根据三角形相似的性质，分别求出两种情况下的 AO 的长，即可得到答案.

【详解】 解：在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 12$ ， $BC = 16$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 20, \angle D = 90^\circ, \quad CD = AB = 12,$$

如图 1，设 $\odot O$ 与 AD 边相切于点 E ，连接 OE ，

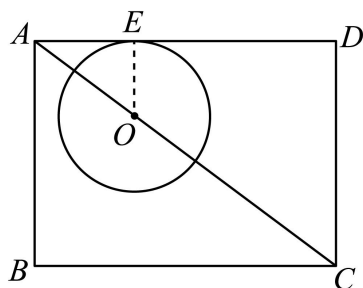


图1

$$\therefore \angle AEO = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore OE \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle AOE \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \frac{OE}{CD} = \frac{AO}{AC}, \text{ 即 } \frac{4}{12} = \frac{AO}{20},$$

$$\therefore AO = \frac{20}{3};$$

如图 2，设 $\odot O$ 与 BC 边相切于 F ，连接 OF ，

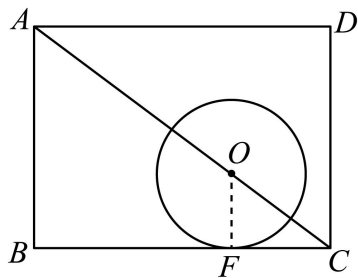


图2

同理可证明 $\triangle COF \sim \triangle CAB$ ，

$$\therefore \frac{OC}{AC} = \frac{OF}{AB}, \text{ 即 } \frac{OC}{20} = \frac{4}{12},$$

$$\therefore OC = \frac{20}{3},$$

$$\therefore AO = \frac{40}{3};$$

综上所述, 如果 $\odot O$ 与矩形 $ABCD$ 的边没有一个公共点, 那么 $\frac{20}{3} < AO < \frac{40}{3}$.

故答案为: $\frac{20}{3} < AO < \frac{40}{3}$.

三、解答题: (本大题共 7 题, 10+10+10+10+12+12+14=78 分)

19. 计算: $64^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + |3-\sqrt{5}|$.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题主要考查了分母有理化, 实数的运算, 负整数指数幂和分数指数幂, 先计算分数指数幂, 负整数指数幂和分母有理化, 再去绝对值, 最后计算加减法即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & 64^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + |3-\sqrt{5}| \\ &= 4 + \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} - 9 + 3 - \sqrt{5} \\ &= 4 + \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} - 9 + 3 - \sqrt{5} \\ &= 4 + \sqrt{5} + 2 - 9 + 3 - \sqrt{5} \\ &= 0. \end{aligned}$$

20. 解不等式 (组) $\begin{cases} 2x+1 > x \\ \frac{x+5}{2} - x \geq 1 \end{cases}$.

【答案】 $-1 < x \leq 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次不等式组, 先求出每个不等式的解集, 再根据 “同大取大, 同小取小, 大小小大中间找, 大大小小找不到 (无解)” 求出不等式组的解集即可.

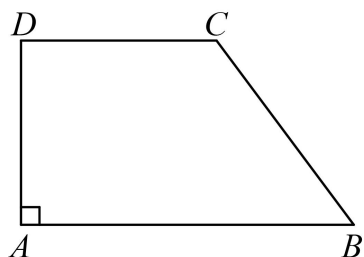
$$\text{【详解】解: } \begin{cases} 2x+1 > x \text{ ①} \\ \frac{x+5}{2} - x \geq 1 \text{ ②} \end{cases}$$

解不等式①得 $x > -1$,

解不等式②得 $x \leq 3$,

∴ 不等式组的解集为 $-1 < x \leq 3$.

21. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $\angle DAB = 90^\circ$, $AB = 16$, $CD = 10$, $BC = 6\sqrt{5}$.



- (1) 求梯形 $ABCD$ 的面积;
(2) 连接 BD , 求 $\angle DBC$ 的正切值.

【答案】(1) 156

(2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形, 相似三角形的性质与判定, 勾股定理, 矩形的性质与判定:

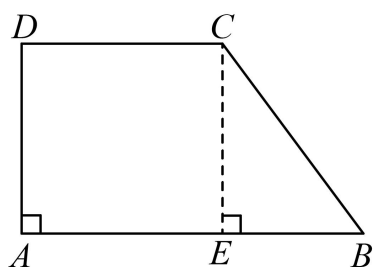
(1) 过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E , 得出四边形 $ADCE$ 为矩形, 得到 $AD = CE$, $AE = CD = 6$, 再根据勾股定理得出 CE , 进而可求梯形 $ABCD$ 的面积;

(2) 过 C 作 $CH \perp BD$ 于 H , 由相似三角形性质可知 $\frac{CH}{AD} = \frac{CD}{BD}$, 再根据勾股定理得到 BD , BH , 进而

求解即可.

【小问 1 详解】

解: 过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E ,



∵ $AB \parallel DC$, $\angle DAB = 90^\circ$,

∴ $\angle ADC = 90^\circ$,

∴ $\angle A = \angle ADC = \angle AEC = 90^\circ$,

∴ 四边形 $ADCE$ 是矩形,

∴ $AD = CE$, $AE = CD = 10$,

∴ $BE = AB - AE = 6$,

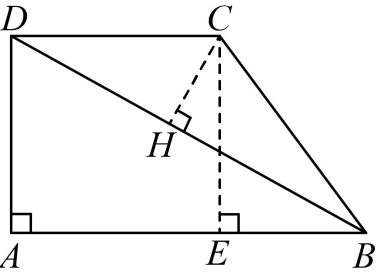
$$\therefore BC = 6\sqrt{5},$$

$$\therefore CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = 12,$$

$$\therefore \text{梯形 } ABCD \text{ 的面积 } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times (10 + 16) \times 12 = 156;$$

【小问 2 详解】

解：过 C 作 $CH \perp BD$ 于 H ，



$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle CDB = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle CHD = \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CDH \sim \triangle DBA,$$

$$\therefore \frac{CH}{AD} = \frac{CD}{BD},$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20,$$

$$\therefore \frac{CH}{12} = \frac{10}{20},$$

$$\therefore CH = 6,$$

$$\therefore \angle DBC \text{ 的正弦值} = \frac{CH}{BC} = \frac{6}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

22. 某“综合与实践”小组开展了测量本校旗杆高度的实践活动. 他们制订了测量方案, 并利用课余时间完成了实地测量. 他们在该旗杆底部所在的平地上, 选取两个不同测点, 分别测量了该旗杆顶端的仰角以及这两个测点之间的距离. 为了减小测量误差, 小组在测最仰角的度数以及两个测点之间的距离时, 都分别测量了两次并取它们的平均值作为测量结果, 测量数据如下表 (不完整).

课题	测量旗杆的高度	
成员	组长 × × × 组员: × × ×, × × ×, × × ×	
测量工具	测量角度的仪器、皮尺等	

测量示意图 	说明：线段 GH 表示学校旗杆，测量角度的仪器的高度 $AC = BD = 1.5\text{m}$ ，测点 A, B 与 H 在同一条水平直线上， A, B 之间的距离可以直接测得，且点 G, H, A, B, C, D 都在同一竖直平面内. 点 C, D, E 在同一条直线上，点 E 在 GH 上.			
	测量项目	第一次	第二次	平均值
测量数据	$\angle GCE$ 的度数	25.6°	25.8°	25.7°
	$\angle GDE$ 的度数	31.2°	30.8°	31°
	A, B 之间的距离	5.4m	5.6m	

- 任务一：两次测量， A, B 之间的距离的平均值是_____m.
- 任务二：根据以上测量结果，请你帮助该“综合与实践”小组求出学校旗杆 GH 的高度.
- (参考数据： $\sin 25.7^\circ \approx 0.43$ ， $\cos 25.7^\circ \approx 0.90$ ， $\tan 25.7^\circ \approx 0.48$ ， $\sin 31^\circ \approx 0.52$ ， $\cos 31^\circ \approx 0.86$ ， $\tan 31^\circ \approx 0.60$)
- 任务三：该“综合与实践”小组在制订方案时，讨论过“利用物体在阳光下的影子测量旗杆的高度”的方案，但未被采纳，你认为其原因可能是什么？
- 【答案】** 任务一： 5.5；任务二： 14.7m；任务三： 答案不唯一：没有太阳光，旗杆底部不可到达，测量旗杆影子的长度遇到困难等.

- 【解析】**
- 【分析】** 任务一： 两数之和除以 2，即可作答；
- 任务二： 设 $EG = xm$ ，解直角三角形即可得到结论；
- 任务三： 根据题意得到没有太阳光，或旗杆底部不可能达到相等（答案不唯一）.

【详解】 任务一： 平均值： $(5.4 + 5.6) \div 2 = 5.5\text{m}$ ，

故答案为： 5.5；

任务二： 由题意可得，四边形 $ACDB$ ，四边形 $ACEH$ 都是矩形，

$\therefore EH = AC = 1.5$ ， $CD = AB = 5.5$ ，

设 $EG = xm$ ，

在 Rt DEG 中, $\angle DEG = 90^\circ$, $\angle GDE = 31^\circ$,

$$\therefore \tan 31^\circ = \frac{EG}{DE},$$

$$\therefore DE = \frac{x}{\tan 31^\circ},$$

在 Rt $\triangle CEG$ 中, $\angle CEG = 90^\circ$, $\angle GCE = 25.7^\circ$,

$$\therefore \tan 25.7^\circ = \frac{EG}{CE},$$

$$\therefore CE = \frac{x}{\tan 25.7^\circ},$$

$$\therefore CD = CE - DE,$$

$$\therefore \frac{x}{\tan 25.7^\circ} - \frac{x}{\tan 31^\circ} = 5.5,$$

$$\therefore x = 13.2,$$

$$\therefore GH = GE + EH = 13.2 + 1.5 = 14.7 \text{ (m)},$$

答: 旗杆 GH 的高度为 14.7m .

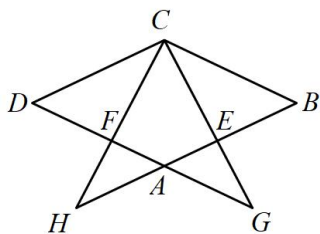
任务三: 答案不唯一: 没有太阳光, 旗杆底部不可到达, 测量旗杆影子的长度遇到困难等.

【点睛】 本题考查的是解直角三角形的应用—仰角俯角问题, 掌握仰角俯角的概念、熟记锐角三角函数的定义是解题的关键.

23. 已知: 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别在边 AB 、 AD 上, $BE=DF$, CE 的延长线交 DA 的延长线于点 G , CF 的延长线交 BA 的延长线于点 H .

(1) 求证: $\triangle BEC \sim \triangle BCH$;

(2) 如果 $BE^2 = AB \cdot AE$, 求证: $AG = DF$.



【答案】 (1) 证明见解析; (2) 证明见解析.

【解析】

【分析】 (1) 先证明 $\triangle CDF \cong \triangle CBE$, 进而得到 $\angle DCF = \angle BCE$, 再由菱形对边 $CD \parallel BH$, 得到 $\angle H = \angle DCF$, 进而 $\angle BCE = \angle H$ 即可求解.

(2) 由 $BE^2=AB \cdot AE$, 得到 $\frac{BE}{AB} = \frac{AE}{EB}$, 再利用 $AG \parallel BC$, 平行线分线段成比例定理得到 $\frac{BE}{AB} = \frac{AG}{BC}$, 再结合已知条件即可求解.

【详解】解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore CD=CB, \angle D=\angle B, CD \parallel AB.$$

$$\therefore DF=BE,$$

$$\therefore \triangle CDF \cong \triangle CBE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle DCF = \angle BCE.$$

$$\therefore CD \parallel BH,$$

$$\therefore \angle H = \angle DCF,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle H. \text{ 且 } \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BEC \sim \triangle BCH.$$

$$(2) \because BE^2=AB \cdot AE,$$

$$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{AE}{EB},$$

$$\therefore AG \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AG}{BC},$$

$$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{AG}{BC},$$

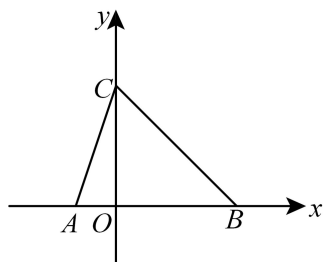
$$\therefore DF=BE, BC=AB,$$

$$\therefore BE=AG=DF,$$

即 $AG=DF$.

【点睛】本题考查相似三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 平行线分线段成比例定理等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(-1,0)$ 、 $B(3,0)$ 、 $C(0,3)$, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 A 、 B 两点.



(1) 当该抛物线经过点 C 时, 求该抛物线的表达式;

(2) 在 (1) 题的条件下, 点 P 为该抛物线上一点, 且位于第三象限, 当 $\angle PBC = \angle ACB$ 时, 求点 P 的坐标;

(3) 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点 D 位于 $\triangle BOC$ 内, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$

(2) $P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{13}{9}\right)$

(3) 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点 D 位于 $\triangle BOC$ 内, a 的取值范围是 $-\frac{1}{2} < a < 0$

【解析】

【分析】 (1) 已知抛物线与 x 轴的两交点, 设其交点式为 $y = a(x-3)(x+1)$ 且 $a \neq 0$, 再代入 C 点坐标求得 a 即可;

(2) 如图 1, 设 PB 交 y 轴于点 E , 由点 B 、 C 坐标可得 $\triangle BOC$ 为等腰直角三角形, 再由 $\angle ACB = \angle PBC$ 可得 $\angle OCA = \angle PBO$, 利用 $\tan \angle OCA = \tan \angle PBO$ 可得 E 的坐标, 然后由 B 、 E 两点坐标可得直线 PB 解析式, 再与二次函数解析式联立即可求得交点坐标;

(3) 由二次函数与 x 轴两交点可得其对称轴为 $x = 1$, 利用其交点式 $y = a(x-3)(x+1)$ 且 $a \neq 0$, 可得顶点坐标为 $(1, -4a)$, 由点 B 、 C 坐标求得直线 BC 解析式令 $x = 1$ 可得抛物线顶点纵坐标的最大值, 若顶点 D 位于 $\triangle BOC$ 内, 则顶点纵坐标要大于 0, 解不等式即可求得 a 的取值范围;

【小问 1 详解】

解: 设抛物线的解析式为 $y = a(x-3)(x+1)$ 且 $a \neq 0$,

将点 C 的坐标 $(0, 3)$ 代入得: $-3a = 3$,

解得: $a = -1$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -(x-3)(x+1) = -x^2 + 2x + 3$;

【小问 2 详解】

解: 如图 1, 设 PB 交 y 轴于点 E ,

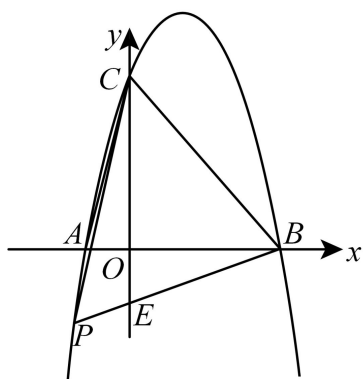


图1

$$\therefore B(3,0)、C(0,3),$$

$$\therefore OB=OC=3,$$

$$\therefore \angle COB=90^{\circ},$$

$$\therefore \angle OCB=\angle OBC=45^{\circ},$$

$$\text{又} \therefore \angle ACB=\angle PBC,$$

$$\therefore \angle ACB-\angle OCB=\angle PBC-\angle OBC, \text{ 即 } \angle OCA=\angle PBO,$$

$$\therefore \tan \angle OCA=\tan \angle PBO, \text{ 即 } \frac{OA}{OC}=\frac{OE}{OB},$$

$$\therefore \frac{1}{3}=\frac{OE}{3},$$

$$\therefore OE=1,$$

$\therefore$ 点 P 在第三象限,

$$\therefore E(0,-1),$$

设直线 PB 的解析式为: $y=kx+b$ 且 $k \neq 0$,

$$\text{把 } E(0,-1) \text{ 和 } B(3,0) \text{ 代入得: } \begin{cases} b=-1 \\ 3k+b=0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b=-1 \\ k=\frac{1}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } PB \text{ 的解析式为: } y=\frac{1}{3}x-1,$$

$$\text{当直线 } PB \text{ 和二次函数相交时: } \frac{1}{3}x-1=-x^2+2x+3,$$

解得: $x_1 = 3, x_2 = -\frac{4}{3},$

代入一次函数可得交点坐标为 $P(3,0)$ 或 $P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{13}{9}\right),$

$\therefore$ 点 P 在第三象限,

$\therefore P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{13}{9}\right);$

【小问 3 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 $A、B$ 两点,

$\therefore$ 对称轴是: 直线 $x = \frac{-1+3}{2} = 1,$

由 $B(3,0)、C(0,3),$ 可得直线 BC 的解析式为: $y = -x + 3,$

可知当 $x = 1$ 时, $y = 2,$

设抛物线的解析式为 $y = a(x-3)(x+1)$ 且 $a \neq 0,$

令 $x = 1$ 可得其顶点坐标为 $(1, -4a),$

当顶点坐标刚好在直线 BC 上时可得: $-4a = 2,$ 则 $a = -\frac{1}{2},$

由图可知当抛物线的顶点 D 位于 $\triangle BOC$ 内时, 其顶点纵坐标取值范围: $0 < -4a < 2,$

$\therefore -\frac{1}{2} < a < 0;$

【点睛】 本题考查了二次函数的解析式, 二次函数与一次函数的综合, 正切三角函数, 二次函数的对称轴等知识; 掌握二次函数的交点式是解题关键.

25. 已知 AB 是 $\odot O$ 的一条弦, 点 C 在 $\odot O$ 上, 连结 CO 并延长, 交弦 AB 于点 D , 且 $CD = CB.$

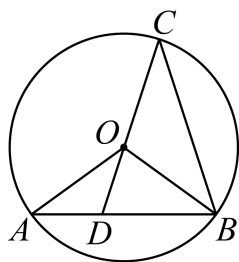


图1

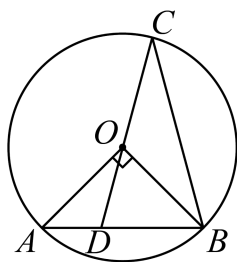
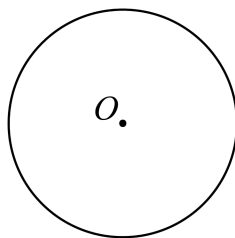


图2



备用图

(1) 如图 1, 如果 BO 平分 $\angle ABC$, 求证: $AB = BC$;

(2) 如图 2, 如果 $AO \perp OB$, 求 $AD: DB$ 的值;

(3) 延长线段 AO 交弦 BC 于点 E , 如果 $\triangle EOB$ 是等腰三角形, 且 $\odot O$ 的半径长等于 2, 求弦 BC 的长.

【答案】 (1) 证明见解析

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(3) \sqrt{5}+1 \text{ 或 } 2\sqrt{2}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的性质与判定，垂径定理，勾股定理，解直角三角形，全等三角形的性质与判定等等：

(1) 由等边对等角和角平分线的定义证明 $\angle OBA = \angle OBC = \angle A = \angle C$ ，进而证明

$\triangle OBA \cong \triangle OBC$ (AAS)，即可证明 $AB = BC$ ；

(2) 根据等边对等角得到 $\angle A = \angle OBD$ ， $\angle CDB = \angle CBD$ ，进而证明 $\angle AOD = \angle CBO$ ，则 $\angle DOB = 2\angle AOD$ ，进一步可求出 $\angle AOD = 30^\circ$ ，过点 D 作 $DH \perp AO$ ，垂足为点 H ，则

$$\tan \angle HOD = \frac{DH}{OH} = \frac{\sqrt{3}}{3}；\text{证明 } \triangle AHD \sim \triangle AOB，\text{得到 } \frac{DH}{OB} = \frac{AH}{OA}，\text{由 } OA = OB，\text{得到 } AH = DH，$$

$$\text{则 } \frac{AD}{DB} = \frac{AH}{OH} = \frac{DH}{OH} = \frac{\sqrt{3}}{3}；$$

(3) 分情况讨论两种情况： $OE = BE$ 时或 $OB = BE$ 时两种情况讨论求解即可。

【小问 1 详解】

证明： $\because OA = OB = OC$ ，

$$\therefore \angle A = \angle OBA, \angle C = \angle OBC,$$

$\because BO$ 平分 $\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle OBA = \angle OBC = \angle A = \angle C,$$

$$\therefore \triangle OBA \cong \triangle OBC \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AB = BC；$$

【小问 2 详解】

解： $\because OA = OB$ ，

$$\therefore \angle A = \angle OBD,$$

$$\because CD = CB,$$

$$\therefore \angle CDB = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle A + \angle AOD = \angle CBO + \angle OBD,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle CBO,$$

$$\therefore OC = OB,$$

$$\therefore \angle C = \angle CBO,$$

$$\therefore \angle DOB = \angle C + \angle CBO = 2\angle CBO = 2\angle AOD,$$

$$\because AO \perp OB,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle AOD + \angle BOD = 3\angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 30^\circ,$$

过点 D 作 $DH \perp AO$ ，垂足为点 H ，

$$\therefore \angle AHD = \angle DHO = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle HOD = \frac{DH}{OH} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\because \angle AHD = \angle AOB = 90^\circ, \quad \angle A = \angle A,$$

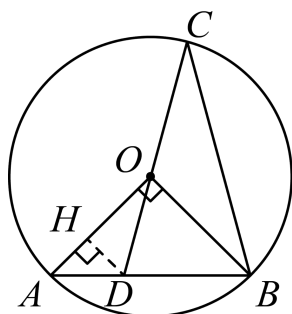
$$\therefore \triangle AHD \sim \triangle AOB,$$

$$\therefore \frac{DH}{OB} = \frac{AH}{OA},$$

$$\because OA = OB,$$

$$\therefore AH = DH,$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AH}{OH} = \frac{DH}{OH} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$



【小问 3 详解】

图2

解： $\because \angle C = \angle CBO,$

$$\therefore \angle OEB = \angle C + \angle COE > \angle CBO,$$

$$\therefore OE \neq OB;$$

当 $OB = BE$ 时，

$$\because \angle C = \angle C, \quad \angle COE = \angle AOD = \angle CBO,$$

$$\therefore \triangle COE \sim \triangle CBO,$$

$$\therefore \frac{CO}{CB} = \frac{CE}{CO}, \quad \text{即} \quad \frac{2}{CB} = \frac{BC-2}{2},$$

解得 $BC = \sqrt{5} + 1$ 或 $BC = -\sqrt{5} + 1$ (舍去);

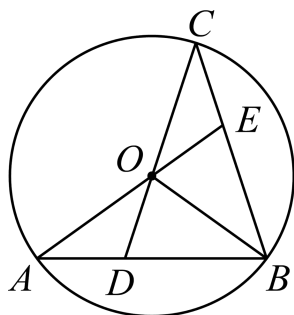


图1

当 $OE = EB$ 时,

$$\therefore \angle EOB = \angle CBO,$$

$$\because \angle OEB = \angle C + \angle COE = 2\angle C = 2\angle CBO, \text{ 且 } \angle OEB + \angle CBO + \angle EOB = 180^\circ,$$

$$\therefore 4\angle CBO = 180^\circ, \quad \angle CBO = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OEB = 90^\circ,$$

$$\therefore OE = BE = \frac{\sqrt{2}}{2}OB = \sqrt{2},$$

$$\therefore BC = 2BE = 2\sqrt{2};$$

综上所述, BC 的长为 $\sqrt{5} + 1$ 或 $2\sqrt{2}$.