

2023 学年第二学期九年级 5 月自适应练习 数学学科

(完卷时间 100 分钟, 满分 150 分)

一、选择题 (本大题共 6 题)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列二次根式, 被开方数中各因式的指数都为 1 的是 ()

A. $\sqrt{12}$

B. $\sqrt{x^2 + 3y^3}$

C. $\sqrt{a^2(x+2)}$

D. $\sqrt{3x^5}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的定义. 根据二次根式的定义判断即可.

【详解】 解: A、因为 $12 = 4 \times 3$, 4 的指数不是 1, 故本选项不符合题意;

B、被开方数的指数为 1, 故本选项符合题意;

C、 a^2 的指数为 2, 故本选项不符合题意;

D、 $3x^5$ 的指数为 5, 故本选项不符合题意;

故选: B.

2. 下列计算正确的是 ()

A. $2a^2 + 2a^3 = 2a^5$

B. $9a^6 \div 3a^2 = 3a^3$

C. $2a^2 \times 3a^3 = 6a^6$

D. $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = a^2 - a + \frac{1}{4}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了整式的混合运算, 完全平方公式. 根据合并同类项, 单项式除以单项式, 单项式乘单项式的法则, 完全平方公式进行计算, 逐一判断即可解答.

【详解】 解: A、 $2a^2$ 与 $2a^3$ 不能合并, 故 A 不符合题意;

B、 $9a^6 \div 3a^2 = 3a^4 \neq 3a^3$, 故 B 不符合题意;

C、 $2a^2 \cdot 3a^3 = 6a^5 \neq 6a^6$, 故 C 不符合题意;

D、 $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = a^2 - a + \frac{1}{4}$, 故 D 符合题意;

故选: D.

3. 下列函数中, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大的是 ()

- A. $y = 2x - 1$ B. $y = -\frac{2}{x}$ C. $y = \frac{2}{x}$ D. $y = -2x$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查的是反比例函数的性质，正比例函数的性质．根据反比例函数的性质及正比例函数的性质对各选项进行逐一分析即可．

【详解】解：A、 $\because y = 2x - 1$ 中， $k = 2 > 0$ ，

$\therefore$ 函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大，符合题意；

B、 $\because y = -\frac{2}{x}$ 中， $k = -2 < 0$ ，

$\therefore$ 函数图象的两个分支分别位于二、四象限，在每一象限内函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大，不符合题意；

C、 $\because y = \frac{2}{x}$ 中， $k = 2 > 0$ ，

$\therefore$ 函数图象的两个分支分别位于一、三象限，在每一象限内函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小，不符合题意；

D、 $\because y = -2x$ 中， $k = -2 < 0$ ，

$\therefore$ 函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小，不符合题意．

故选：A．

4. 超市货架上有一批大小不一的鸡蛋，某顾客从中选购了部分大小均匀的鸡蛋，设货架上原有鸡蛋的质量（单位：g）平均数和标准差分别为 $\bar{x}$ ， s ，该顾客选购的鸡蛋的质量平均数和标准差分别为 $\bar{x}_1$ ， s_1 ，则下列结论一定成立的是（ ）

- A. $\bar{x} < \bar{x}_1$ B. $\bar{x} > \bar{x}_1$ C. $s < s_1$ D. $s > s_1$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是平均数、标准差，标准差越大，则平均值的离散程度越大，稳定性也越小；反之，则它与其平均值的离散程度越小，稳定性越好．根据平均数的概念、标准差的性质判断即可．

【详解】解：货架上原有鸡蛋的质量的平均数和该顾客选购的鸡蛋的质量平均数的大小无法比较，而货架上原有鸡蛋的质量的方差大于该顾客选购的鸡蛋的质量的方差，

$\therefore$ 货架上原有鸡蛋的质量的标准差大于该顾客选购的鸡蛋的质量的标准差，

$\therefore s > s_1$ ，

故选：D.

5. 如图1, $ABCD$ 中, $AD > AB$, $\angle ABC$ 为锐角. 要在对角线 BD 上找点 N , M , 使四边形 $ANCM$ 为平行四边形, 现有图2中的甲、乙、丙三种方案, 则正确的方案 ()

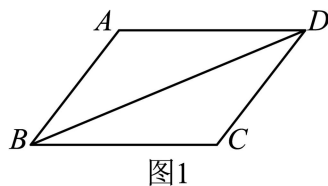
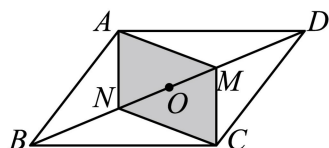
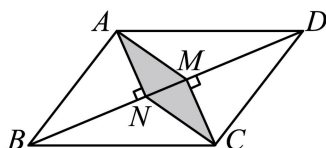


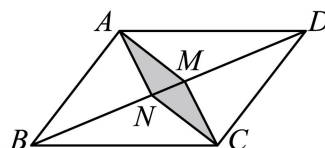
图1



取 BD 中点 O , 作
 $BN=NO, OM=MD$



作 $\perp AN \perp BD$ 于 N ,
 $CM \perp BD$ 于 M



取 AN, CM , 分别平分
 $\angle BAD, \angle BCD$

图2

A. 甲、乙、丙都是

B. 只有甲、乙才是

C. 只有甲、丙才是

D. 只有乙、丙才是

【答案】A

【解析】

【分析】甲方案：利用对角线互相平分得证；

乙方案：由 $\triangle ABN \cong \triangle CDM$, 可得 $BN = DM$, 即可得 $ON = OM$,

再利用对角线互相平分得证；

丙方案:方法同乙方案.

【详解】连接 AC, BD 交于点 O

甲方案: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore AO = CO, BO = DO$$

$$\because BN = NO, OM = MD$$

$$\therefore ON = OM$$

$\therefore$ 四边形 $ANCM$ 为平行四边形.

乙方案:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD, AO = CO, BO = DO$$

$$\therefore \angle ABN = \angle CDM$$

$$\text{又} \because AN \perp BD, CM \perp BD$$

$$\therefore \angle ANB = \angle CMD$$

$$\therefore \triangle ABN \cong \triangle CDM \text{ (AAS)}$$

$$\therefore BN = DM$$

$$\because BO = DO$$

$$\therefore ON = OM$$

$\therefore$ 四边形 $ANCM$ 为平行四边形.

丙方案:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD, AO = CO, BO = DO, \angle BAD = \angle BCD$$

$$\therefore \angle ABN = \angle CDM$$

又 $\because AN, CM$ 分别平分 $\angle BAD, \angle BCD$

$$\therefore \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BCD, \text{ 即 } \angle BAN = \angle DCN$$

$$\therefore \triangle ABN \cong \triangle CDM \text{ (ASA)}$$

$$\therefore BN = DM$$

$$\because BO = DO$$

$$\therefore ON = OM$$

$\therefore$ 四边形 $ANCM$ 为平行四边形.

所以甲、乙、丙三种方案都可以.

故选 A.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质与判定，三角形全等的性质和判定，角平分线的概念等知识，能正确的利用全等三角形的证明得到线段相等，结合平行四边形的判定是解题关键.

6. 图 1 是第七届国际数学教育大会 (ICME) 的会徽，在其主体图案中选择两个相邻的直角三角形，恰好能组合得到如图 2 所示的四边形 $OABC$. 若 $AB = BC = 1$. $\angle AOB = \alpha$, 则 OC^2 的值为 ()



图 1

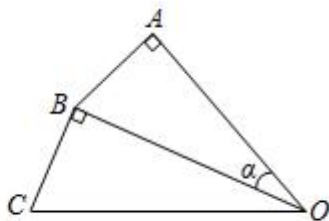


图 2

- A. $\frac{1}{\sin^2 a} + 1$ B. $\sin^2 a + 1$ C. $\frac{1}{\cos^2 a} + 1$ D. $\cos^2 a + 1$

【答案】A

【解析】

【分析】根据勾股定理和三角函数求解.

【详解】 $\because$ 在 $Rt \triangle OAB$ 中, $\angle AOB = a$, $AB = 1$

$$\therefore OB = \frac{AB}{\sin a} = \frac{1}{\sin a}$$

$$\text{在 } Rt \triangle OBC \text{ 中, } BC = 1, OC^2 = OB^2 + BC^2 = \left(\frac{1}{\sin a}\right)^2 + 1^2 = \frac{1}{\sin^2 a} + 1$$

故选: A.

【点睛】本题主要考查勾股定理和三角函数. 如果直角三角形的两条直角边长分别是 a , b , 斜边长为 c , 那么 $a^2 + b^2 = c^2$.

二、填空题 (本大题共 12 题)

7. 计算: $(-2x^2)^3 =$ _____.

【答案】 $-8x^6$

【解析】

【分析】本题考查了积的乘方, 每个因式分别乘方, 即可作答.

【详解】解: $(-2x^2)^3 = -8x^6$,

故答案为: $-8x^6$

8. 因式分解: $2x^3 - 8x =$ _____.

【答案】 $2x(x+2)(x-2)$

【解析】

【分析】先提公因式, 再利用平方差公式继续分解即可解答.

【详解】解: $2x^3 - 8x$

$$= 2x(x^2 - 4)$$

$$= 2x(x+2)(x-2)$$

故答案为: $2x(x+2)(x-2)$

【点睛】 本题考查了提公因式法与公式法的综合运用, 一定要注意如果多项式的各项含有公因式, 必须先提公因式.

9. 方程 $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2x + 1}$ 的解是_____.

【答案】 $x = 3$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程, 注意: 解无理方程一定要进行检验. 方程两边平方得出 $x^2 - 2 = 2x + 1$, 求出方程的解, 再进行检验即可.

【详解】 解: $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2x + 1}$,

方程两边平方, 得 $x^2 - 2 = 2x + 1$,

整理得: $x^2 - 2x - 3 = 0$,

$$(x - 3)(x + 1) = 0,$$

$$x - 3 = 0 \text{ 或 } x + 1 = 0,$$

解得: $x = 3$ 或 -1 ,

经检验: $x = 3$ 是原方程的解, $x = -1$ 不是原方程的解,

所以原方程的解是 $x = 3$.

故答案为: $x = 3$.

10. 如果关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - 3x - m = 0$ 有实数根, 那么实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq -\frac{9}{8}$

【解析】

【分析】 此题考查了根的判别式. 根据一元二次方程有实数根, 得到根的判别式大于等于 0, 求出 m 的范围即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - 3x - m = 0$ 有实数根,

$$\therefore \Delta = 9 + 8m \geq 0,$$

解得： $m \geq -\frac{9}{8}$ ，

则 m 的取值范围是 $m \geq -\frac{9}{8}$ 。

故答案为： $m \geq -\frac{9}{8}$ 。

11. 有一枚材质均匀的正方体骰子，它的六个面上分别有 1 点、2 点、…、6 点的标记，掷一次骰子，向上的一面出现的点数不大于 4 的概率是_____。

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】本题考查概率公式。根据骰子的特点，可知掷一次骰子共有六种等可能性，其中向上的一面出现的点数不大于 4 的有四种可能性，然后即可计算出掷一次骰子，向上的一面出现的点数不大于 4 的概率。

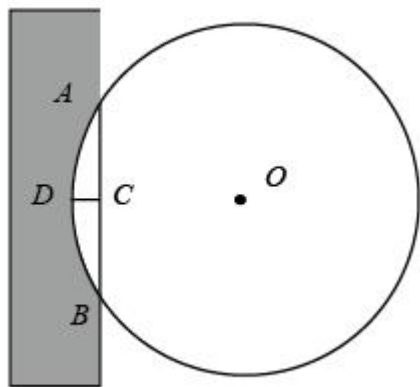
【详解】解：由骰子的特点可知：掷一次骰子共有六种等可能性，其中向上的一面出现的点数不大于 4 的有四种可能性，

$\therefore$ 掷一次骰子，向上的一面出现的点数不大于 4 的概率是 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，

故答案为： $\frac{2}{3}$ 。

12. 《九章算术》被尊为古代数学“群经之首”，其卷九勾股篇记载：今有圆材埋于壁中，不知大小。以锯锯之，深一寸，锯道长一尺。问径几何？如图，大意是，今有一圆柱形木材，埋在墙壁中，不知其大小，用锯去锯这木材，锯口深 CD 等于 1 寸，锯道 AB 长 1 尺，问圆形木材的直径是多少？（1 尺 = 10 寸）

答：圆形木材的直径_____寸；

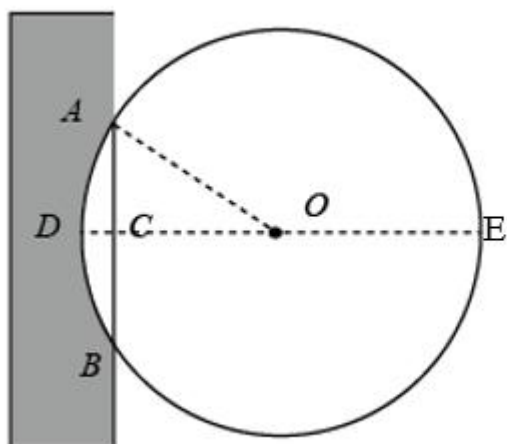


【答案】26

【解析】

【分析】延长 DC ，交 $\odot O$ 于点 E ，连接 OA ，由题意易得 DE 即为 $\odot O$ 的直径， $CD = 1$ 寸， $AB = 10$ 寸，则有 $AC = 5$ 寸，设 $OA = x$ 寸，最后根据垂径定理及勾股定理可进行求解。

【详解】解：延长 DC ，交 $\odot O$ 于点 E ，连接 OA ，如图所示：



由题意得 $CD \perp AB$ ，点 C 为 AB 的中点， $CD = 1$ 寸， $AB = 10$ 寸，

$\therefore DE$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore AC = 5$ 寸，

设 $OA = x$ 寸，则 $OC = (x - 1)$ 寸，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle AOC$ 中， $AC^2 + OC^2 = OA^2$ ，即 $5^2 + (x - 1)^2 = x^2$ ，

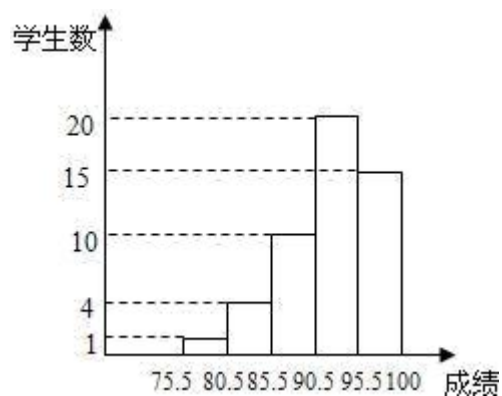
解得： $x = 13$ ，

$\therefore$ 圆形木材的直径为 26 寸；

故答案为 26.

【点睛】本题主要考查垂径定理，熟练掌握垂径定理是解题的关键.

13. 某校高一年级一班数学单元测试全班所有学生成绩的频数分布直方图如图所示(满分 100 分,学生成绩取整数),则成绩在 90.5~95.5 这一分数段的频率是_____



【答案】0.4

【解析】

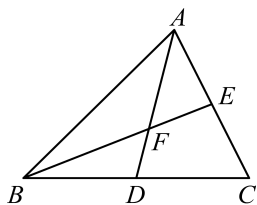
【分析】由每一组内的频数总和等于总数据个数得到学生总数，再由频率=频数÷数据总和计算出成绩在90.5~95.5这一分数段的频率.

【详解】解：读图可知：共有 $(1+4+10+15+20)=50$ 人，其中在90.5~95.5这一分数段有20人，则成绩在90.5~95.5这一分数段的频率是 $\frac{20}{50}=0.4$

故本题答案为：0.4.

【点睛】本题考查读频数分布直方图的能力和利用统计图获取信息的能力. 利用统计图获取信息时，必须认真观察、分析、研究统计图，才能作出正确的判断和解决问题.

14. 如图, BE 是 $\triangle ABC$ 的中线, 点 F 在 BE 上, 延长 AF 交边 BC 于点 D . 若 $BF=2FE$. 设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{AF}=\underline{\hspace{2cm}}$ (用含 $\vec{a}, \vec{b}$ 的式子表示)



【答案】 $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】根据平面向量的运算法则进行计算即可. 本题考查三角形的重心及平面向量, 熟知平面向量的运算法则是解题的关键.

【详解】解: $\because BE$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, ,

$$\therefore \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$$

又 $\because BF=2FE$,

$$\therefore \overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EB}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}.$$

故答案为: $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

15. 规定: 两个函数 y_1 , y_2 的图象关于 y 轴对称, 则称这两个函数互为“Y函数”. 例如: 函数 $y_1=2x+2$ 与 $y_2=-2x+2$ 的图象关于 y 轴对称, 则这两个函数互为“Y函数”. 若函数 $y=kx^2+2(k-1)x+k-3$ (k 为常数) 的“Y函数”图象与 x 轴只有一个交点, 则其“Y函数”的解析式为_____.

【答案】 $y = 2x - 3$ 或 $y = -x^2 + 4x - 4$

【解析】

【分析】 分两种情况，根据关于 y 轴对称的图形的对称点的坐标特点，即可求得.

【详解】 解： $\because$ 函数 $y = kx^2 + 2(k-1)x + k-3$ (k 为常数) 的“ Y 函数”图象与 x 轴只有一个交点，

$\therefore$ 函数 $y = kx^2 + 2(k-1)x + k-3$ (k 为常数) 的图象与 x 轴也只有一个交点，

当 $k=0$ 时，函数解析为 $y = -2x - 3$ ，它的“ Y 函数”解析式为 $y = 2x - 3$ ，它们的图象与 x 轴只有一个交点，

当 $k \neq 0$ 时，此函数是二次函数，

$\therefore$ 它们的图象与 x 轴都只有一个交点，

$\therefore$ 它们的顶点分别在 x 轴上，

$$\therefore \frac{4k(k-3) - [2(k-1)]^2}{4k} = 0, \text{ 得 } \frac{k+1}{k} = 0,$$

故 $k+1=0$ ，解得 $k=-1$ ，

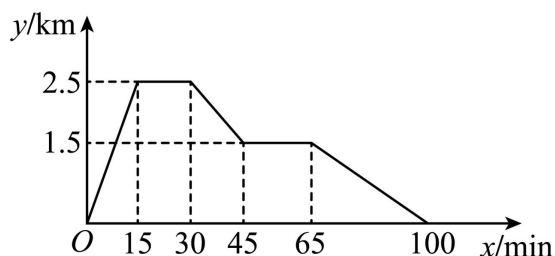
故原函数的解析式为 $y = -x^2 - 4x - 4$ ，

故它的“ Y 函数”解析式为 $y = -x^2 + 4x - 4$ ，

故答案为： $y = 2x - 3$ 或 $y = -x^2 + 4x - 4$.

【点睛】 本题考查了新定义，二次函数图象与 x 轴的交点问题，坐标与图形变换-轴对称，求一次函数及二次函数的解析式，理解题意和采用分类讨论的思想是解决本题的关键.

16. 在“生活中的函数”活动中，某学习小组设计了一个问题情境：小明从家跑步去体育场，在那里锻炼了一阵后又走到文具店买圆规，然后散步回家. 小明离家的距离 y (km) 与他所用的时间 x (min) 的关系如图所示. 当小明离家 2km 时，他离开家所用的时间是_____分.



【答案】 12 或 $\frac{75}{2}$

【解析】

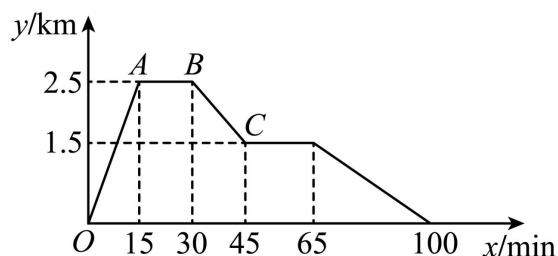
【分析】 本题考查了一次函数的应用. 小明离家 2km 时，有两个时间，第一个时间是小明从家跑步去体育

场的过程中存在离家2km，利用路程÷速度可得此时间，第二个时间利用BC段解析式可求得.

【详解】解：小明家离体育场的距离为2.5km，小明跑步的平均速度为 $\frac{2.5}{15} = \frac{1}{6}$ (km/min)，

当小明离从家出发2km时，所用时间为： $2 \div \frac{1}{6} = 12$ (分钟)；

如图， $B(30, 2.5)$ ， $C(45, 1.5)$ ，



设BC的解析式为： $y = kx + b$ ，

$$\text{则} \begin{cases} 30k + b = 2.5 \\ 45k + b = 1.5 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{15} \\ b = 4.5 \end{cases}$$

$\therefore BC$ 的解析式为： $y = -\frac{1}{15}x + 4.5$ ，

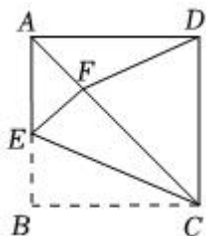
当 $y = 2$ 时， $-\frac{1}{15}x + 4.5 = 2$ ，解得 $x = \frac{75}{2}$ ，

即小明返回离家2km时，他离开家所用的时间是 $\frac{75}{2}$ min.

综上所述，当小明离家2km时，他离开家所用的时间是12min 或 $\frac{75}{2}$ min.

故答案为：12 或 $\frac{75}{2}$.

17. 如图，在正方形ABCD的边AB上取一点E，连接CE，将 $\triangle BCE$ 沿CE翻折，点B恰好与对角线AC上的点F重合，连接DF，若 $BE = 2$ ，则 $\triangle CDF$ 的面积是_____.

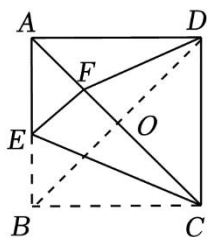


【答案】 $3\sqrt{2} + 4$

【解析】

【分析】本题考查翻折变换、正方形的性质、勾股定理、等腰三角形的判定和性质等知识. 由折叠可得

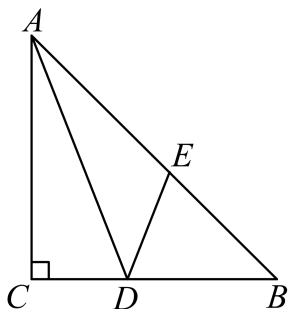
【详解】解：如图，连接 BD 交 AC 于 O ，


$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \quad AB = BC, \quad AC \perp BD, \quad DO = BO, \quad \angle BAC = 45^\circ.$$
$$\therefore BE = EF = 2, \quad BC = CF, \quad \angle EFC = \angle EBC = 90^\circ, \quad \angle BAC = 45^\circ,$$
$$\therefore AF = EF = 2,$$
$$\therefore AE = 2\sqrt{2},$$
$$\therefore AB = 2\sqrt{2} + 2 = BC = CF,$$
$$\therefore BD = 4 + 2\sqrt{2},$$
$$\therefore OD = 2 + \sqrt{2}.$$
$$\therefore S_{\Delta CDF} = \frac{1}{2} \times CF \times DO = 3\sqrt{2} + 4.$$

故答案为: $3\sqrt{2}+4$.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC = 3$, $\angle C = 90^\circ$, 点 D 在边 BC 上 (不与点 B , 点 C 重合), 连接 AD , 点 E 在边 AB 上, $\angle EDB = \angle ADC$. 已知点 H 在射线 AC 上, 连接 EH 交线段 AD 于点 G , 当 $CH = 1$,

且 $\angle AEH = \angle BED$ 时, 则 $\frac{BE}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】此题主要考查了等腰三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质. 根据点 H 在射线 AC 上， $CH=1$ ，有以下两种情况：①当点 H 在线段 AC 上时，过点 A 作 $AF \parallel BC$ 交 DE 延长线于 F ，则 $AH=2$ ，过点 D 作 $DM \perp AF$ 于 M ，证四边形 $AMDC$ 为矩形得 $AM=CD$ ，证 $\triangle AEH \cong \triangle AEF$ (ASA)，推出 $AH=AF=2$ ，再证 $\triangle BED \sim \triangle AEF$ ，由此可得 $\frac{BE}{AB}$ 的值；②当点 H 在 AC 的延长线上时，过点 A 作 $AF \parallel BC$ 交 DE 延长线于 F ，同理可得 $\frac{BE}{AB}$ 的值.

【详解】解：∵点 H 在射线 AC 上， $CH=1$ ，

∴有以下两种情况：

①当点 H 在线段 AC 上时，过点 A 作 $AF \parallel BC$ 交 DE 延长线于 F ，过点 D 作 $DM \perp AF$ 于 M ，如图 1 所示：

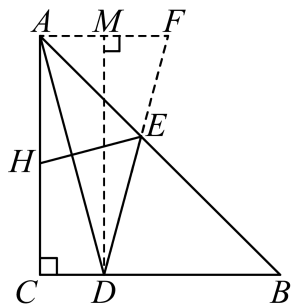


图1

∵ $\angle C = 90^\circ$ ，

∴ $\angle FAC = 180^\circ - \angle C = 90^\circ$ ，

∴ $\angle FAC = \angle C = \angle AMD = 90^\circ$ ，

∴ 四边形 $AMDC$ 为矩形，

∴ $AM = CD$ ，

∵ $AC = BC = 3$ ， $CH = 1$ ，

∴ $\angle B = \angle CAB = 45^\circ$ ， $AH = AC - CH = 2$ ，

∵ $\angle AEH = \angle BED$ ， $\angle BED = \angle AEF$ ，

∴ $\angle AEH = \angle AEF$ ，

∵ $AF \parallel BC$ ，

∴ $\angle FAE = \angle B$ ， $\angle F = \angle EDB$ ， $\angle FAD = \angle ADC$ ，

∴ $\angle CAB = \angle FAE = 45^\circ$ ，

19. 计算: $(27)^{\frac{1}{3}} + |1 - \sqrt{3}| + \frac{1}{\sqrt{3} + 2} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}$.

【答案】 $4 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 此题考查了实数的运算. 根据分数指数幂、负整数指数幂、绝对值的性质以及分母有理化的方法分别进行计算, 即可得出答案.

【详解】 解: $(27)^{\frac{1}{3}} + |1 - \sqrt{3}| + \frac{1}{\sqrt{3} + 2} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}$

$$= 3 + \sqrt{3} - 1 + \frac{\sqrt{3} - 2}{(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2)} - \sqrt{3}$$

$$= 3 + \sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$= 4 - \sqrt{3}.$$

20. 解方程: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$

【答案】 $x = -5$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程和解一元二次方程, 解题的关键是熟练掌握解分式方程和解一元二次方程的方法和步骤. 先去分母, 将分式方程化为整式方程, 再进行求解即可.

【详解】 解: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$,

$$(x+2)^2 - 16 = x - 2,$$

$$x^2 + 4x + 4 - 16 = x - 2,$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0,$$

$$(x+5)(x-2) = 0,$$

$$x+5=0, x-2=0,$$

$$x_1 = -5, x_1 = 2,$$

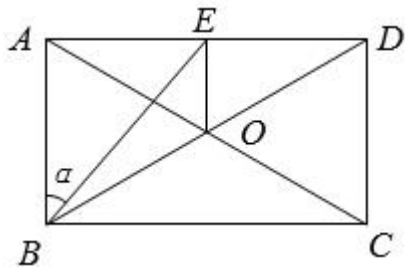
检验, 当 $x = -5$ 时, $x^2 - 4 \neq 0$,

$\therefore x = -5$ 是原方程的解,

当 $x = 2$ 时, $x^2 - 4 = 0$,

$\therefore x = 2$ 不是原方程的解.

21. 已知: 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , $\angle BOC = 120^\circ, AB = 2$.



(1) 求矩形对角线的长.

(2) 过 O 作 $OE \perp AD$ 于点 E , 连结 BE . 记 $\angle ABE = \alpha$, 求 $\tan \alpha$ 的值.

【答案】 (1) 4; (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 根据矩形对角线的性质, 得出 $\triangle ABO$ 是等腰三角形, 且 $\angle BOC = 120^\circ$, 即 $\angle AOB = 60^\circ$, 则 $\triangle ABO$ 为等边三角形, 即可求得对角线的长;

(2) 首先根据勾股定理求出 AD , 再由矩形的对角线的性质得出 $OA = OD$, 且 $OE \perp AD$, 则 $AE = \frac{1}{2}AD$, 在 $Rt\triangle ABE$ 中即可求得 $\tan \alpha$.

【详解】 解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形

$$\therefore AC = BD, OA = OC = \frac{1}{2}AC, OB = OD = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore OA = OC = OB = OD$$

$$\because \angle BOC = 120^\circ, \therefore \angle AOB = 60^\circ$$

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形,

$$\therefore OB = AB = 2,$$

$$\text{所以 } AC = BD = 2OB = 4.$$

故答案为: 4.

(2) 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 90^\circ$.

$$\therefore AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$$

由 (1) 得, $OA = OD$.

又 $\because OE \perp AD$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AD = \sqrt{3}$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $\tan \alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】 本题考查了矩形的对角线性质, 等边三角形的判定, 等腰三角形的三线合一以及在直角三角形中求锐角正切的知识点, 灵活应用矩形对角线的性质是解题的关键.

22. 某停车场入口“曲臂直杆道闸”在工作时, 一曲臂杆 OA 绕点 O 匀速旋转, 另一曲臂杆 AB 始终保持与地面平行. 如图 1, 是曲臂直杆道闸关闭时的示意图, 此时 O, A, B 在一条直线上. 已知闸机高度 CD 为 1.2m , $OA = AB = 1.5\text{m}$, $OD = 0.2\text{m}$, 入口宽度为 3m .

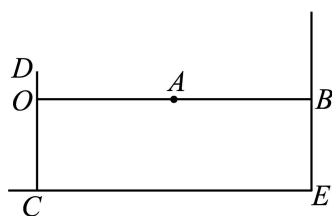


图1

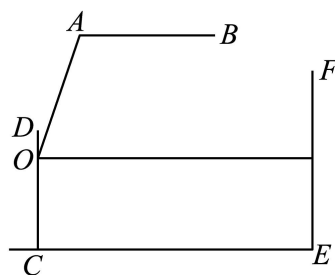


图2

- (1) 如图 2, 因机器故障, 曲臂杆 OA 最多可逆时针旋转 72° , 求此时点 A 到地面的距离;
- (2) 在 (1) 的条件下, 一辆宽为 2.58m 、高为 2.2m 的货车可否顺利通过入口? 请说明理由. (参考数据: $\sin 72^\circ \approx 0.95$, $\tan 72^\circ \approx 3$)

【答案】 (1) 点 A 到地面的距离约为 2.43m ;

(2) 一辆宽为 2.58m 、高为 2.2m 的货车可顺利通过入口.

【解析】

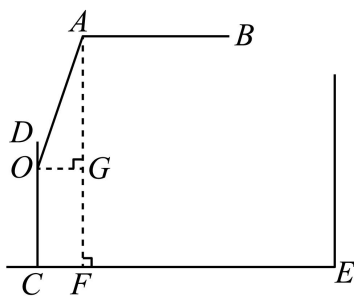
【分析】 本题考查了解直角三角形的应用, 根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

(1) 过点 A 作 $AF \perp CE$, 垂足为 F , 过点 O 作 $OG \perp AF$, 垂足为 G , 根据题意可得: $OC = GF$, $\angle AOG = 72^\circ$, 然后在 $\text{Rt}\triangle AOG$ 中, 利用锐角三角函数的定义求出 AG 的长, 再根据已知易得 $OC = GF = 1$, 从而利用线段的和差关系进行计算, 即可解答;

(2) 当 $MN \perp CE$, 且 $MN = 2.2\text{m}$ 时, 设 MN 交 OG 于点 P , 根据题意可得: $OP = CN$, $PN = GF = 1\text{m}$, 从而可得 $MP = 1.2\text{m}$, 然后在 $\text{Rt}\triangle MOP$ 中, 利用锐角三角函数的定义求出 OP 的长, 从而求出 EN 的长, 比较即可解答.

【小问 1 详解】

解：过点 A 作 $AF \perp CE$ ，垂足为 F，过点 O 作 $OG \perp AF$ ，垂足为 G，



由题意得： $OC = GF$ ， $\angle AOG = 72^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AOG$ 中， $AO = 1.5\text{m}$ ，

$$\therefore AG = AO \cdot \sin 72^\circ \approx 1.5 \times 0.95 = 1.425(\text{m}),$$

$$\because DC = 1.2\text{m}, \quad OD = 0.2\text{m},$$

$$\therefore OC = GF = DC - OD = 1.2 - 0.2 = 1(\text{m}),$$

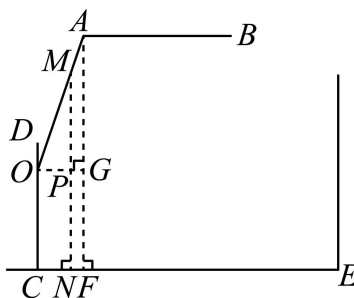
$$\therefore AF = AG + GF = 1.425 + 1 = 2.425 \approx 2.43(\text{m}),$$

$\therefore$ 此时点 A 到地面的距离约为 2.43m；

【小问 2 详解】

解：一辆宽为 2.58m、高为 2.2m 的货车可顺利通过入口，

理由：如图：当 $MN \perp CE$ ，且 $MN = 2.2\text{m}$ 时，设 MN 交 OG 于点 P，



由题意得： $OP = CN$ ， $PN = GF = 1\text{m}$ ，

$$\therefore MP = MN - PN = 2.2 - 1 = 1.2(\text{m}),$$

在 $\text{Rt}\triangle MOP$ 中， $\angle MOP = 72^\circ$ ，

$$\therefore OP = \frac{MP}{\tan 72^\circ} \approx \frac{1.2}{3} = 0.4(\text{m}),$$

$$\therefore OP = CN = 0.4\text{m},$$

$\therefore$ 入口宽度 CE 为 3m，

$$\therefore NE = CE - CN = 3 - 0.4 = 2.6(\text{m}),$$

$$\because 2.6\text{m} > 2.58\text{m},$$

$\therefore$ 一辆宽为 2.58m、高为 2.2m 的货车可顺利通过入口.

23. 爱动脑筋的小李同学在学习完角平分线的性质后意犹未尽, 经过思考发现里面还有一个有趣的结论:

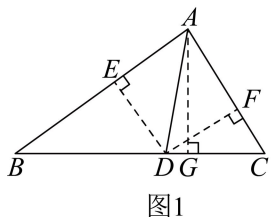


图1

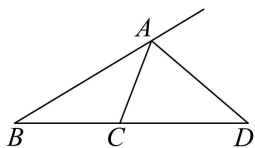


图2

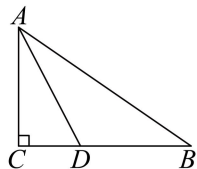


图3

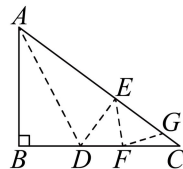


图4

(1) 【问题发现】如图 1 所示, 若 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线, 可得到结论: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

小李的解法如下: 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , $DF \perp AC$ 于点 F , 过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G ,

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线, 且 $DE \perp AB$, $DF \perp AC$,

$\therefore$ _____.

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times DE}{\frac{1}{2} AC \times DF} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times AG}{\frac{1}{2} CD \times AG} = \frac{BD}{CD},$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC};$$

(2) 【类比探究】如图 2 所示, 若 AD 是 $\angle BAC$ 的外角平分线, AD 与 BC 的延长线交于点 D . 求证:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC};$$

(3) 【直接应用】如图 3 所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, 且交 BC 于 D , 若 $BD = 15$, $CD = 9$, 请利用小李的方法在不添加辅助线的情况下求出 AB ;

(4) 【拓展应用】如图 4 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 9$, $BC = 12$, 将 $\triangle ABC$ 先沿 $\angle BAC$ 的平分线 AD 折叠, B 点刚好落在 AC 上的 E 点, 剪掉重叠部分 (即四边形 $ABDE$), 再将余下部分 ($\triangle ABC$) 沿 $\angle DEC$ 的平分线 EF 折叠, 再剪掉重叠部分 (即四边形 $DEGF$), 直接写出剩余部分的面积为_____.

【答案】(1) $DE = DF$

(2) 见解析 (3) $AB = 30$;

(4) $\frac{27}{14}$

【解析】

【分析】(1) 根据角的平分线性定理解答即可;

(2) 过点 D 作 $DN \perp AB$ 于 N , 过点 D 作 $DM \perp AC$ 于 M . 过点 A 作 $AP \perp BD$ 于点 P . 仿照第一问的解

答求解即可；

(3) 利用 (1) 的结论，求得 $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$ ，设 $AB = 5a$ ，则 $AC = 3a$ ，利用勾股定理列式计算即可；

(4) 先算 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 15$ ，后两次运用 (1) 的结论，依次计算即可。

【小问 1 详解】

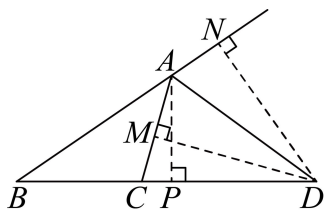
解：∵ AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，且 $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，

$$\therefore DE = DF,$$

故答案为： $DE = DF$ ；

【小问 2 详解】

证明：过点 D 作 $DN \perp AB$ 于 N ， $DM \perp AC$ 于 M 。过点 A 作 $AP \perp BD$ 于点 P 。



∵ AD 是 $\angle NAC$ 的角平分线，

$$\therefore DM = DN.$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times DN}{\frac{1}{2} AC \times DM} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times AP}{\frac{1}{2} CD \times AP} = \frac{BD}{CD},$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD};$$

【小问 3 详解】

解：∵ $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，且交 BC 于 D ，

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD},$$

$$\therefore BD = 15, \quad CD = 9,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3},$$

设 $AB = 5a$ ，则 $AC = 3a$ ，

由勾股定理得 $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ，即 $(5a)^2 = (3a)^2 + (15 + 9)^2$ ，

解得 $a = \pm 6$ （负值舍去），

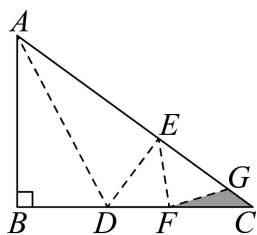
$$\therefore AB = 5 \times 6 = 30;$$

【小问 4 详解】

解：∵ $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 9$ ， $BC = 12$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 15,$$

$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 先沿 $\angle BAC$ 的平分线 AD 折叠,



$$\therefore AB = AE = 9, \quad \angle BAD = \angle EAD, \quad \angle B = \angle AED = 90^\circ, \quad BD = DE,$$

$$\therefore EC = AC - AE = 6, \quad \text{由 (1) 可得 } \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore BD = DE = 4.5, \quad DC = 12 - 4.5 = 7.5,$$

$$\therefore S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} \times DE \times CE = \frac{1}{2} \times 4.5 \times 6 = 13.5,$$

$$\text{同理可求: } \frac{ED}{EC} = \frac{DF}{FC} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{3}{7} \times 13.5 = \frac{81}{14},$$

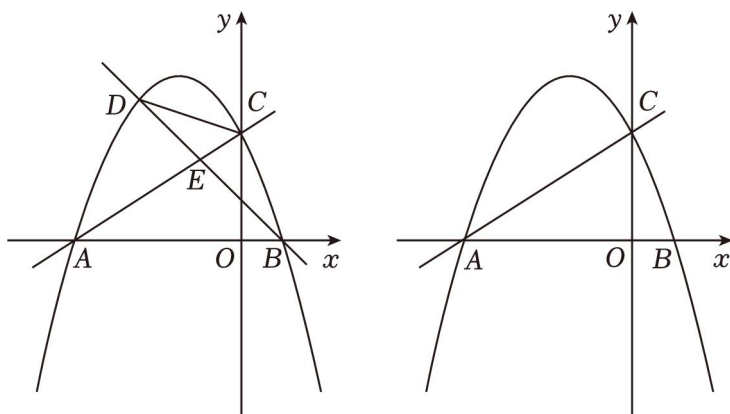
$$\therefore S_{\triangle FCG} = 13.5 - 2 \times \frac{81}{14} = \frac{27}{14}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{27}{14}.$$

【点睛】 本题考查了角的平分线的性质定理，三角形全等的判定和性质，勾股定理，三角形面积的性质，熟练掌握角的平分线的性质定理，三角形全等的判定和性质，勾股定理是解题的关键.

24. 如图，在平面直角坐标系中，点 A 坐标为 $(-3,0)$ ，点 C 在 y 轴正半轴，且 $\tan \angle CAO = \frac{2}{3}$ ，抛物线

$y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过 A 、 C 两点，与 x 轴的另一交点为点 B .



备用图

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 点 D 为直线 AC 上方抛物线上一动点;

①联结 BC 、 CD ，设直线 BD 交线段 AC 于点 E ， $\triangle CDE$ 的面积为 S_1 ， $\triangle BCE$ 的面积为 S_2 ，当点 D 的横坐标为 m 时，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值 (用含 m 的代数式表示);

②是否存在点 D ，使 $\angle DCA$ 等于 $\angle BAC$ 的 2 倍? 若存在，求点 D 的坐标; 若不存在，请说明理由.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x + 2$;

(2) ① $\frac{S_1}{S_2} = -\frac{9m^2 + 27m}{52}$; ② $D\left(-\frac{1}{3}, \frac{20}{9}\right)$

【解析】

【分析】(1) 根据三角函数的定义，求出 C 点坐标，将 A ， C 坐标代入抛物线解析式求解即可;

(2) ①因为 $\triangle CDE$ 和 $\triangle BCE$ 等高，所以它们的面积比就是底边 DE 和 BE 的比，先用待定系数法求出直线 AC 和 BD 的表达式，联立求出 E 的坐标，从而得解;

②延长 DC 交 x 轴于 F ，在直线 AC 上取点 G ， G 在 C 上方，由对顶角相等可知， $\angle DCA = \angle GCF$ ，由三角形外角的性质可知， $\angle CAO = \angle CFO$ ，再根据两个坐标轴垂直可知， $OA = OF$ ，从而得解.

【小问 1 详解】

解: $\because A(-3, 0)$,

$\therefore OA = 3$,

$\because \tan \angle CAB = \frac{OC}{OA} = \frac{2}{3}$,

$\therefore OC = 2$,

$\because C$ 在 y 的正半轴,

$\therefore C(0, 2)$,

$\therefore c = 2$,

将 A 点坐标代入抛物线表达式得: $0 = -\frac{9}{2} - 3b + 2$,

解得: $b = -\frac{5}{6}$,

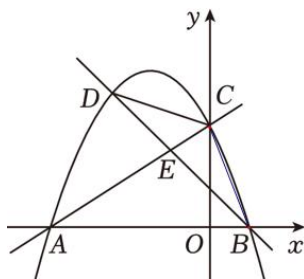
$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x + 2$;

【小问 2 详解】

解: ①设直线 AC 的表达式为: $y = kx + 2$,

将 A 点坐标代入得: $0 = -3k + 2$,

解得: $k = \frac{2}{3}$,



$\therefore$ 直线 AC 的表达式为: $y = \frac{2}{3}x + 2$,

$\because D$ 的横坐标为 m ,

$\therefore D\left(m, -\frac{1}{2}m^2 - \frac{5}{6}m + 2\right)$,

令抛物线 $y = 0$, 得: $0 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x + 2$,

解得: $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{4}{3}$,

$\therefore B\left(\frac{4}{3}, 0\right)$,

设直线 BD 的表达式为: $y = n\left(x - \frac{4}{3}\right)$,

将 D 点坐标代入直线 BD 的表达式得: $-\frac{1}{2}m^2 - \frac{5}{6}m + 2 = n\left(m - \frac{4}{3}\right)$,

$\therefore n = -\frac{m+3}{2}$,

$\therefore$ 直线 BD 的表达式: $y = -\frac{m+3}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right)$,

联立直线 AC 和 BD 的表达式:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 2 \\ y = -\frac{m+3}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right) \end{cases},$$

解得: $x = \frac{4m}{3m+13}$,

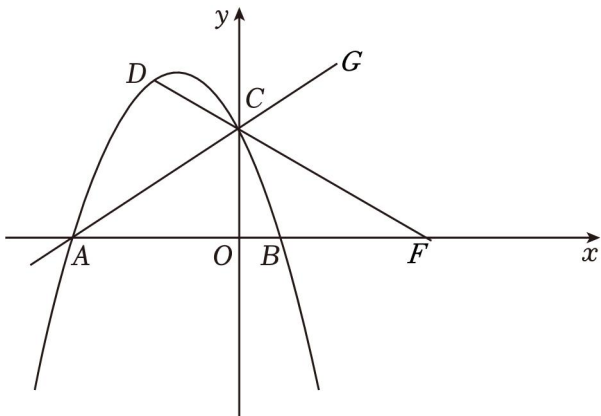
$\therefore \frac{BE}{DE} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{4m}{3m+13}}{\frac{4m}{3m+13} - m} = -\frac{52}{9m^2 + 27m}$,

$\because \triangle CDE$ 和 $\triangle BCE$ 等高,

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{DE}{BE} = -\frac{9m^2 + 27m}{52};$$

②存在,

延长 DC 交 x 轴于 F , 在直线 AC 上取点 G , G 在 C 上方, 如图:



$$\therefore \angle GCF = \angle DCA = 2\angle CAB,$$

$$\because \angle GCF = \angle CAB + \angle CFA,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle CFA,$$

$$\therefore CA = CF,$$

$$\text{又} \because OC \perp AF,$$

$$\therefore OA = OF,$$

$$\therefore F(3, 0),$$

设直线 DF 的表达式为: $y = tx + 2$,

将 F 点坐标代入表达式得: $0 = 3t + 2$,

$$\therefore t = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{直线 } DF \text{ 的表达式为: } y = -\frac{2}{3}x + 2,$$

$$\text{联立直线 } DF \text{ 和抛物线解析式得: } -\frac{2}{3}x + 2 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x + 2,$$

$$\text{解得: } x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{1}{3},$$

$$\therefore D\left(-\frac{1}{3}, \frac{20}{9}\right).$$

【点睛】 本题主要考查了二次函数综合, 合理运用待定系数法求二次函数表达式、待定系数法求一次函数性质、三角形外角的性质以及等腰三角形的判定与性质是本题解题的关键.

25. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC = 10$, 点 O 是 AC 边上动点, 以 O 为圆心, OC 为半

径的 $\odot O$ 与边 BC 的另一交点为 D ，过点 D 作 AC 的垂线，交 $\odot O$ 于点 E ，交 AC 于点 F ，连结 DE 、 AE 。

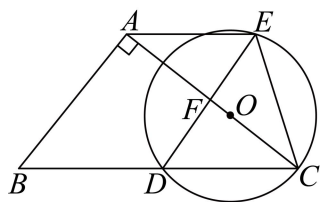


图1

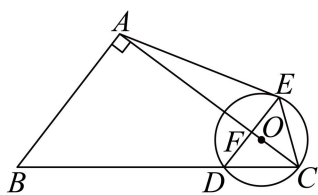
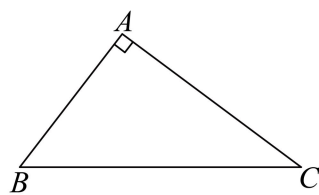


图2



备用图

(1) 如图 1，当 $AE \parallel BC$ 时，求 $\odot O$ 的半径长；

(2) 设 $OC = x$ ， $AE = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出定义域；

(3) 若以 A 为圆心的 $\odot A$ 与 $\odot O$ 有公共点 D 、 E ，当 $\odot A$ 恰好也过点 B 时，求 OC 的长。

【答案】(1) $\odot O$ 的半径长为 $\frac{25}{8}$ ；

$$(2) y = \frac{8\sqrt{x^2 - 8x + 25}}{5} \left(0 < x \leq \frac{25}{4} \right);$$

(3) OC 的长为 $\frac{25}{4}$ 或 $\frac{7}{4}$ 。

【解析】

【分析】(1) 连接 OD ，证明四边形 $ABDE$ 为平行四边形，利用相似求出 DF 、 CF ，再在 $\text{Rt}\triangle ODF$ 中，根据勾股定理求出半径；

(2) 作 $OM \perp CE$ 于 M ，利用相似表示出 EF 和 AF ，再根据勾股定理求出 AE 即可；当点 D 在点 B 处时，根据勾股定理求出半径即可讨论出 x 的取值范围；

(3) 若以 A 为圆心的 $\odot A$ 与 $\odot O$ 有公共点 D 、 E ，当 $\odot A$ 恰好也过点 B 时， $AE = AB = 6$ ，把 $y = 6$ 代入关系式，求出 x 即可解答。

【小问 1 详解】

解：如图 1，连接 OD ，

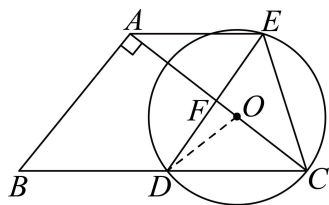


图1

设半径为 r ，

$\because \text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 10$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

$\because \angle BAC = 90^\circ$ ， $DE \perp AC$ ，

$$\therefore AB \parallel DE,$$

$$\therefore AE \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABDE$ 为平行四边形,

$$\therefore DE = AB = 6,$$

$$\therefore OF \perp DE,$$

$$\therefore DF = EF = 3,$$

$$\therefore AB \parallel DE,$$

$$\therefore \triangle CDF \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{CD}{CB} = \frac{DF}{AB} = \frac{CF}{CA},$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2} \times BC = 5,$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2} AC = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle ODF$ 中, $OF^2 + DF^2 = OD^2$,

$$\therefore (4-r)^2 + 3^2 = r^2,$$

$$\therefore r = \frac{25}{8},$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径长为 } \frac{25}{8};$$

【小问 2 详解】

解: 如图 2, 作 $OM \perp CE$ 于 M ,

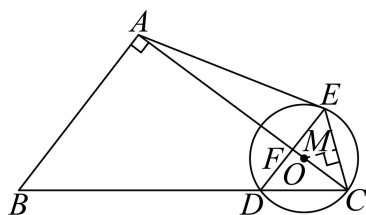


图2

$$\therefore OF \perp DE,$$

$$\therefore \angle DCF = \angle ECF,$$

$$\therefore \triangle OCM \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{OC}{BC} = \frac{MC}{AC},$$

$$\therefore CM = \frac{4x}{5},$$

$$\therefore CE = \frac{8x}{5},$$

$$\because \triangle CEF \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{EF}{AB} = \frac{CF}{AC},$$

$$\therefore EF = \frac{24x}{25}, \quad CF = \frac{32x}{25},$$

$$\therefore AF = AC - CF = 8 - \frac{32x}{25},$$

$$\therefore AE = \sqrt{AF^2 + EF^2}, \text{ 即 } y = \frac{8\sqrt{x^2 - 8x + 25}}{5},$$

当点 D 在点 B 处时,

如图 3, 连接 OD ,

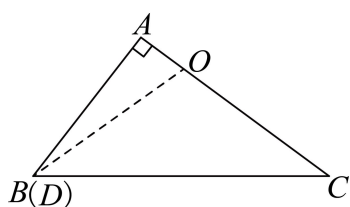


图3

在 $\text{Rt}\triangle ADO$ 中,

$$AD^2 + AO^2 = OD^2, \text{ 即 } (8-x)^2 + 6^2 = x^2,$$

$$\therefore x = \frac{25}{4},$$

$$\therefore 0 < x \leq \frac{25}{4},$$

$$\therefore y = \frac{8\sqrt{x^2 - 8x + 25}}{5} \left(0 < x \leq \frac{25}{4} \right);$$

【小问 3 详解】

解: 当 $\odot A$ 经过点 B 、点 E 时, $AE = AB = 6$,

$$\text{把 } y = 6 \text{ 代入 } y = \frac{8\sqrt{x^2 - 8x + 25}}{5},$$

$$\text{整理得 } 16x^2 - 128x + 175 = 0$$

$$\text{解得 } x = \frac{25}{4} \text{ 或 } x = \frac{7}{4},$$

$$\therefore OC \text{ 的长为 } \frac{25}{4} \text{ 或 } \frac{7}{4}.$$

【点睛】 本题考查了圆周角定理, 垂径定理, 相似三角形的应用及勾股定理的应用. 解题的关键是灵活运

用所学知识解决问题.