

初三数学模拟试卷

(满分 150 分, 100 分钟完成)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本调研卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

[每小题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂]

1. 下列各数中, 与 $8^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}$ 相等的是 ()

A. $2^{\frac{1}{2}}$ B. $6^{\frac{1}{2}}$ C. 2 D. 4

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了幂的乘方逆运算和同底数幂乘法的逆运算, 正确运用公式是解题关键. 先利用幂的乘方的逆运算将 $8^{\frac{1}{2}}$ 的底变为 2, 再通过同底数幂乘法的逆运算变出 $2^{\frac{1}{2}}$, 即可计算.

【详解】 解: $8^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}} = 2 \times 2^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$,

故选: A.

2. 某公司三月份的产值为 a 万元, 比二月份增长了 $m\%$, 那么二月份的产值 (单位: 万元) 为 ()

A. $a(1+m\%)$ B. $a(1-m\%)$ C. $\frac{a}{1+m\%}$ D. $\frac{a}{1-m\%}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了列代数式, 根据“三月份的产值为 a 万元, 比二月份增长了 $m\%$ ”, 得出答案即可, 理解题意、正确列出代数式是解题的关键.

【详解】 解: $\because$ 三月份的产值为 a 万元, 比二月份增长了 $m\%$,

$\therefore$ 二月份的产值 $= a \div (1+m\%) = \frac{a}{1+m\%}$,

故选: C.

3. 下列二次根式里, 被开方数中各因式的指数都为 1 的是 ()

A. $\sqrt{x^2 y^2}$

B. $\sqrt{x^2 + y^2}$

C. $\sqrt{(x+y)^2}$

D. $\sqrt{xy^2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次根式的定义判断即可.

【详解】解: A. x, y 的指数分别为 2, 2, 此选项错误;B. $x^2 + y^2$ 的指数为 1, 此选项正确;C. $x + y$ 的指数为 2, 此选项错误;D. x, y 的指数分别为 1, 2. 此选项错误;

故选: B.

【点睛】本题主要考查了二次根式的定义, 分清因数和指数是解答此题的关键.

4. 如果点 C 是线段 AB 的中点, 那么下列结论正确的是 ()

A. $AC + BC = 0$

B. $AC - BC = 0$

C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

D. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据点 C 是线段 AB 的中点, 可以判断 $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$, 但它们的方向相反, 继而即可得出答案.

【详解】解: 由题意,

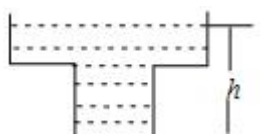
 $\therefore$ 点 C 是线段 AB 的中点,

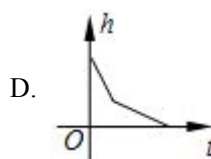
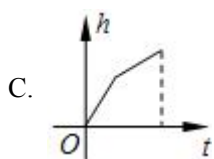
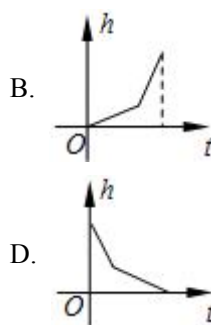
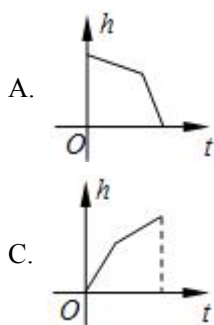
$$\therefore |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$$

 $\therefore \overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 为相反向量,

$$\therefore \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0};$$

故选: C.

【点睛】本题考查了平面向量的知识, 注意向量包括长度及方向, 及 0 与 $\vec{0}$ 的不同.5. 某蓄水池的横断面示意图如图所示, 分深水区和浅水区, 如果以固定的流量把水蓄满蓄水池, 下面的图象能大致表示水的深度 h 和注水时间 t 之间关系的是 ()



【答案】 C

【解析】

【分析】 首先看图可知，蓄水池的下部分比上部分的体积小，故 h 与 t 的关系为先快后慢.

【详解】 根据题意和图形的形状，可知水的最大深度 h 与时间 t 之间的关系分为两段，每一段 h 随 t 的增大而增大，增大的速度是先快后慢.

故选 C.

【点睛】 此题考查了函数的图象，根据几何图形的性质确定函数的图象和函数图象的作图能力. 要能根据几何图形和图形上的数据分析得出所对应的函数的类型和所需要的条件，结合实际意义画出正确的图象.

6. 已知四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AD \parallel BC$ ，下列判断中错误的是（ ）

- A. 如果 $AB = CD$ ， $AC = BD$ ，那么四边形 $ABCD$ 是矩形
- B. 如果 $AB \parallel CD$ ， $OA = OB$ ，那么四边形 $ABCD$ 是矩形
- C. 如果 $AD = BC$ ， $AC \perp BD$ ，那么四边形 $ABCD$ 是菱形
- D. 如果 $OA = OC$ ， $AC \perp BD$ ，那么四边形 $ABCD$ 是菱形

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定，根据平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定方法逐项进行分析判定即可得答案.

【详解】 解：A、如果 $AD \neq BC$ ， $AD \parallel BC$ ，那么四边形 $ABCD$ 是梯形，不是平行四边形也就不是矩形，故 A 选项错误，符合题意；

B、如果 $AB \parallel CD$ ， $AD \parallel BC$ ，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 $OA = \frac{1}{2}AC$ ， $OB = \frac{1}{2}BD$ ，因为 $OA = OB$ 所以 $AC = BD$ ，那么平行四边形 $ABCD$ 是矩形，故 B 选项正确，不符合题意；

C、如果 $AD = BC$ ， $AD \parallel BC$ ，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形，又 $AC \perp BD$ ，那么平行四边形 $ABCD$ 是菱形，故 C 选项正确，不符合题意；

D、如果 $AD \parallel BC$ ， $OA = OC$ ，则可以证得四边形 $ABCD$ 是平行四边形，又 $AC \perp BD$ ，那么平行四边形 $ABCD$ 是菱形，故 D 选项正确，不符合题意，

故选 A.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

[在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案]

7. 当 $x < -2$ 时, $\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-x - \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质与化简, 熟练掌握 $\sqrt{a^2} = |a|$ 是解题的关键.

根据 $\sqrt{a^2} = |a|$ 的进行计算即可.

【详解】 解: $\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{1}{2}\right|,$

$\because x < -2,$

$\therefore x + \frac{1}{2} < -2 + \frac{1}{2} < 0$

$\therefore \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = \left|x + \frac{1}{2}\right| = -x - \frac{1}{2}.$

故答案为: $-x - \frac{1}{2}.$

8. 不等式组 $\begin{cases} -x-1 > 0 \\ -2x-6 \leq 0 \end{cases}$ 的整数解是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-3, -2$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式组, 整数解的问题, 熟练掌握知识点是解题的关键.

写解每一个不等式, 再取解集的公共部分, 然后即可求解.

【详解】 解: $\begin{cases} -x-1 > 0 \text{ ①} \\ -2x-6 \leq 0 \text{ ②} \end{cases},$

由①得: $x < -1,$

由②得: $x \geq -3,$

$\therefore$ 原不等式的解集为: $-3 \leq x < -1,$

$\therefore$ 整数解为: $-3, -2,$

故答案为：-3，-2.

9. 如果关于 x 的方程 $ax^2 - x + 1 = 0$ 有实数根，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \leq \frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的判别式，根据关于 x 的方程 $ax^2 - x + 1 = 0$ 有实数根，得出 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ，代入数值进行计算，即可作答.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的方程 $ax^2 - x + 1 = 0$ 有实数根，

$$\therefore \Delta = (-1)^2 - 4a \times 1 \geq 0,$$

$$\text{解得 } a \leq \frac{1}{4},$$

故答案为： $a \leq \frac{1}{4}$.

10. 在实数范围内分解因式， $x^2y^2 - 3xy + 1 =$ _____.

【答案】 $\left(xy - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(xy - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解，二次根式的乘法，熟练掌握公式法进行因式分解是解决本题的关键. 根据题意，利用十字相乘因式分解.

【详解】 解： $x^2y^2 - 3xy + 1$

$$= (xy)^2 - 3xy + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \times \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \left(xy - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(xy - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

11. 如果实数 x 满足 $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$ ，那么 $x + \frac{1}{x}$ 的值是_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题主要考查了用换元法解一元二次方程、解分式方程，利用完全平方公式把方程变形是解题的关键.

利用完全平方公式把方程变形为 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$ ，利用换元法，设 $x + \frac{1}{x} = m$ ，则

$m^2 - 2m - 3 = 0$ ，转化为解一元二次方程，求出 $x + \frac{1}{x}$ 可能的值，分别得出分式方程，计算检验是否有解，即可得出答案。

【详解】解： $\because x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$ ，

$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$ ，

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$ ，

设 $x + \frac{1}{x} = m$ ，则 $m^2 - 2m - 3 = 0$ ，

因式分解得： $(m-3)(m+1) = 0$ ，

$\therefore m-3=0$ 或 $m+1=0$ ，

解得： $m=3$ 或 $m=-1$ ，

当 $m=3$ 时，则 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，

整理得： $x^2 - 3x + 1 = 0$ ，

$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ，

解得： $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ， $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ，

经检验， $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ， $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 都是方程 $x + \frac{1}{x} = 3$ 的解，

$\therefore x + \frac{1}{x}$ 的值为 3；

当 $m=-1$ 时，则 $x + \frac{1}{x} = -1$ ，

整理得： $x^2 + x + 1 = 0$ ，

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$ ，

$\therefore x + \frac{1}{x} = -1$ 时, 方程无解.

综上所述, $x + \frac{1}{x}$ 的值为 3,

故答案为: 3.

12. 如果一次函数 $y = (m-1)x + m^2 - 1$ 的图像一定经过第二、三象限, 那么常数 m 的取值范围为_____.

【答案】 $m > -1$ 且 $m \neq 1$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的图像与性质, 运用数形结合思想解题是解题的关键, 根据“一次函数 $y = (m-1)x + m^2 - 1$ 的图像一定经过第二、三象限”可知, 此图像与 x 轴的交点在原点的左边, 即与 x 轴交点的横坐标小于 0, 从而得解.

【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y = (m-1)x + m^2 - 1$ 的图像一定经过第二、三象限,

$\therefore$ 此图像与 x 轴的交点在原点的左边, 且 $m-1 \neq 0$, 即 $m \neq 1$,

$\therefore$ 此图像与 x 轴交点的横坐标小于 0,

令 $y = (m-1)x + m^2 - 1 = 0$, 解得: $x = -\frac{m^2 - 1}{m - 1} = -m - 1 < 0$,

解得: $m > -1$,

$\therefore$ 常数 m 的取值范围为 $m > -1$ 且 $m \neq 1$,

故答案为: $m > -1$ 且 $m \neq 1$.

13. 某班进行一次班级活动, 要在 2 名男同学和 3 名女同学中, 随机选出 2 名学生担任主持人, 那么选出的 2 名学生恰好是一男一女的概率是_____.

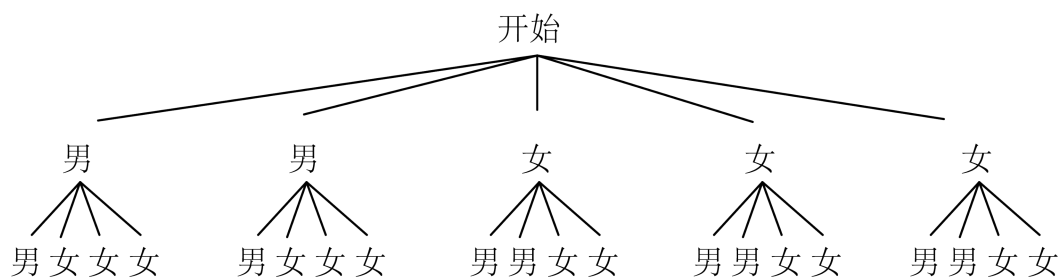
【答案】 $\frac{3}{5}$ 或 0.6

【解析】

【分析】 本题考查的是画树状图法求概率. 树状图法适合两步或两步以上完成的事件; 用到的知识点为: 概率 = 所求情况数与总情况数之比.

先画出树状图得出所有等可能的情况数, 再找出符合条件的情况数, 然后根据概率公式即可得到答案.

【详解】 解: 根据题意画图如下:



共有 20 种等可能的情况数，选出的 2 位同学恰好为一男一女的有 12 种，

则主持人是一男一女的概率为 $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ 。

故答案为： $\frac{3}{5}$ 。

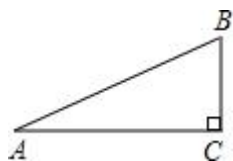
14. 一斜坡的坡角为 α ，坡长比坡高多 100 米，那么斜坡的高为_____（用 α 的锐角三角比表示）。

【答案】 $\frac{100\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$

【解析】

【分析】 本题考查了正弦函数的应用。利用所给角的正弦函数求解。

【详解】 解：如图所示。由题意得 $AB = BC + 100$ ，



$$\because \angle C = 90^\circ, \sin A = \sin \alpha = \frac{BC}{AB},$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{BC}{BC + 100},$$

$$\text{整理得 } BC = \frac{100\sin\alpha}{1-\sin\alpha},$$

$$\therefore \text{斜坡的高为 } \frac{100\sin\alpha}{1-\sin\alpha} \text{ 米.}$$

故答案为： $\frac{100\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$ 。

15. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 G 是重心，如果 $AG = 3$ ， $BG = 4$ ，那么 $CG =$ _____。

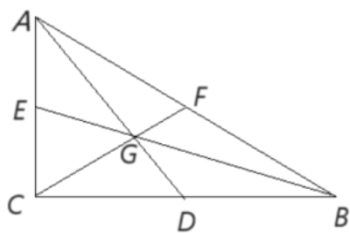
【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了重心的定义与性质，结合勾股定理，直角三角形斜边中线的性质，关键是掌握重心性质并运用勾股定理列式求解是解题关键。本题先利用重心求出 AD 和 BE ，再利用勾股定理列式整体法求出

AB ，最后利用直角三角形斜边中线性质的重心性质求出 CG 。

【详解】解：如图，设 AG 延长线交 BC 于点 D ， BG 延长线交 AC 于点 E ， CG 延长线交 AB 于点 F ，



$\because$ 点 G 是重心， $AG = 3$ ， $BG = 4$ ，

$$\therefore AD = \frac{3}{2}AG = \frac{9}{2}, \quad BE = \frac{3}{2}BG = 6,$$

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\therefore AD^2 = AC^2 + CD^2, \quad BE^2 = CE^2 + BC^2,$$

$$\therefore \begin{cases} \left(\frac{9}{2}\right)^2 = AC^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 & \text{①} \\ 6^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + BC^2 & \text{②} \end{cases},$$

$$\text{①+②得: } \frac{81}{4} + 36 = \frac{5}{4}AC^2 + \frac{5}{4}BC^2,$$

$$\text{化简得: } AC^2 + BC^2 = 45,$$

$$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 = 45,$$

$$\therefore AB = 3\sqrt{5},$$

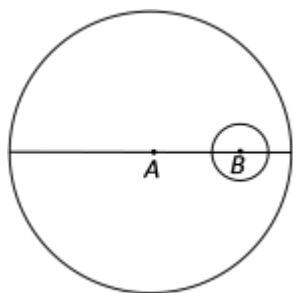
$\because$ 点 G 是重心， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\therefore CF = \frac{1}{2}AB = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore CG = \frac{2}{3}CF = \sqrt{5},$$

故答案为： $\sqrt{5}$ 。

16. 如图， $\odot A$ 和 $\odot B$ 的半径分别为 5 和 1， $AB = 3$ ，点 O 在直线 AB 上， $\odot O$ 与 $\odot A$ 、 $\odot B$ 都内切，那么 $\odot O$ 半径是_____。



【答案】 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{9}{2}$.

【解析】

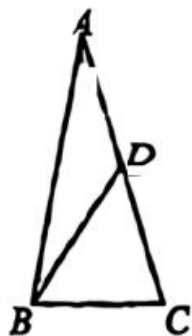
【分析】 根据两圆内切时圆心距=两圆半径之差的绝对值，分两种情况求解即可.

【详解】 当点 O 在点 A 左侧时， $\odot O$ 半径 $r = \frac{10-1}{2} = \frac{9}{2}$ ，当点 O 在点 B 右侧时， $\odot O$ 半径 $r = \frac{10-7}{2} = \frac{3}{2}$.

故填 $\frac{9}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$.

【点睛】 此题考查圆与圆之间的位置关系，解题的关键是掌握两圆位置关系与圆心距 d ，两圆半径 R ， r 的数量之间的联系.

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 4$ ， $\cos B = \frac{1}{4}$ ， BD 是中线，将 $\triangle ABC$ 沿直线 BD 翻折后，点 A 落在点 E，那么 CE 的长为_____.

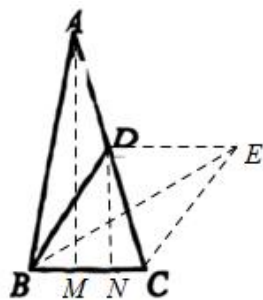


【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查三角形的翻折综合计算，涉及三角函数，等腰三角形，平行四边形及勾股定理，能正确进行线段的转换及作辅助线解非直角三角形是解题关键. 本题先过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M，计算得出 $AD = CD = DE = BC$ ，再证明四边形 $BCED$ 是平行四边形，得 $CE = BD$ ，再在 $\triangle BCD$ 中求解 BD 即可.

【详解】 解：如图，过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M，过点 D 作 $DN \perp BC$ 于点 N，



$\therefore AB = AC = 4$,

$$\therefore BM = CM,$$

$$\because \cos B = \frac{BM}{AB} = \frac{BM}{4} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore BM = CM = 1,$$

$$\therefore BC = 2,$$

$\because BD$ 是中线,

$$\therefore CD = AD = \frac{1}{2}AC = 2,$$

由翻折知 $AD = DE = 2$,

$$\therefore AD = CD = DE = BC,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle CDB,$$

设 $\angle DCB = \alpha$,

$$\therefore \angle CDB = \frac{180^\circ - \alpha}{2},$$

$$\therefore \angle ADB = 180^\circ - \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2},$$

由翻折知 $\angle EDB = \angle ADB = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$,

$$\therefore \angle EDC = \angle EDB - \angle CDB = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} - \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \alpha,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle DCB,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $BCED$ 是平行四边形,

$$\therefore CE = BD,$$

$$\because DN \perp BC,$$

$$\therefore \cos C = \cos B = \frac{CN}{CD} = \frac{CN}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore CN = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BN = BC - CN = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad DN = \sqrt{CD^2 - CN^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2},$$

$$\therefore BD = \sqrt{DN^2 + BN^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{6},$$

$$\therefore CE = BD = \sqrt{6},$$

故答案为: $\sqrt{6}$.

18. 在一个三角形中, 如果一个内角是另一内角的 n 倍 (n 为整数), 那么我们称这个三角形为 n 倍三角形. 如果一个三角形既是 2 倍角三角形, 又是 3 倍角三角形, 那么这个三角形最小的内角度数为_____.

【答案】 30° 或 20° 或 18° 或 $(\frac{360}{11})^\circ$

【解析】

【分析】 根据 n 倍三角形的定义结合三角形内角和定理, 进行分类讨论计算即可.

【详解】 设最小的内角为 x° . 分类讨论:

①当 2 倍角为 $2x^\circ$, 3 倍角为 $3x^\circ$ 时, 可得: $x^\circ + 2x^\circ + 3x^\circ = 180^\circ$,

解得 $x = 30$.

②当 2 倍角为 $2x^\circ$, 3 倍角为 $6x^\circ$ 时, 可得: $x^\circ + 2x^\circ + 6x^\circ = 180^\circ$,

解得 $x = 20$.

③当 3 倍角为 $3x^\circ$, 2 倍角为 $6x^\circ$ 时, 可得: $x^\circ + 3x^\circ + 6x^\circ = 180^\circ$,

解得 $x = 18$.

④当 $3x^\circ$ 即是 2 倍角又是三倍角时, 即另一个内角为 $\frac{3}{2}x^\circ$, 可得: $x^\circ + \frac{3}{2}x^\circ + 3x^\circ = 180^\circ$,

解得 $x = \frac{360}{11}$.

综上所述, 最小的内角为 30° 或 20° 或 18° 或 $(\frac{360}{11})^\circ$.

【点睛】 本题考查三角形内角和定理. 理解题干中 n 倍三角形的定义以及利用分类讨论的思想是解答本题的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

[将下列各题的解答过程, 做在答应纸上]

19. 已知: $x = y^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$, 求: $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2$ 值.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了负整数指数幂、分母有理化以及完全平方公式的运算, 先整理得出 $x = 2 + \sqrt{3}$,

$y = 2 - \sqrt{3}$, $xy = 1$, 再运用完全平方公式展开代入数值, 进行计算即可作答.

【详解】 解: $\because x = y^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$,

$\therefore x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$, $xy = 1$.

$$\therefore \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x + y - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} - 2 \times 1^{\frac{1}{2}} = 2$$

20. 已知点 $A(2, m+3)$ 在双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 上.

(1) 求此双曲线的表达式与点 A 的坐标;

(2) 如果点 $B(a, 5-a)$ 在此双曲线上, 图像经过点 A、B 的一次函数的函数值 y 随 x 的增大而增大, 求此一次函数的解析式.

【答案】 (1) $y = -\frac{6}{x}$, $A(2, -3)$; (2) $y = \frac{1}{2}x - 4$.

【解析】

【分析】 (1) 把点 $A(2, m+3)$ 代入 $y = \frac{m}{x}$ 求得 m , 即可求出结果;

(2) 把点 $B(a, 5-a)$ 代入 $y = \frac{m}{x}$ 求得 a 得到 B 点的坐标, 根据 A 点坐标和函数的增减性排除掉不符合题意的点, 再由待定系数法求出一次函数解析式.

【详解】 解: (1) $\because$ 点 $A(2, m+3)$ 在双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 上,

$$\therefore m+3 = \frac{m}{2},$$

解得: $m = -6$,

$$\therefore m+3 = -3,$$

$$\therefore \text{此双曲线的表达式为 } y = \frac{-6}{x},$$

点 A 的坐标为 $(2, -3)$;

(2) $\because$ 点 $B(a, 5-a)$ 在此双曲线 $y = \frac{-6}{x}$ 上,

$$\therefore 5-a = \frac{-6}{a},$$

解得: $a = -1$ 或 $a = 6$,

经检验: $a = -1, a = 6$ 都是原方程的根, 且符合题意,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-1, 6)$ 或 $(6, -1)$,

$\because$ 一次函数的函数值 y 随 x 的增大而增大, 由 (1) 知 $A(2, -3)$,

$\therefore$ 点 B 的坐标只能为 $(6, -1)$,

设一次函数的解析式为 $y = kx + b$,

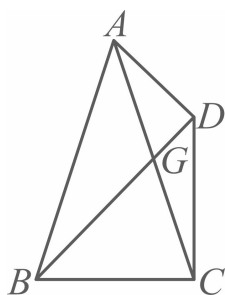
$$\therefore \begin{cases} -3 = 2k + b \\ -1 = 6k + b \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} k = \frac{1}{2}, \\ b = -4 \end{cases}$,

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 4$.

【点睛】 本题主要考查了待定系数法求反比例函数解析式和一次函数解析式以及一次函数的性质，熟练掌握待定系数法求解析式是解题的关键.

21. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $DC \perp BC$, $DC = BC = 2$, $\angle ADB = 90^\circ$, BD 与 AC 相交于点 G .



求:

- (1) AB 的长;
- (2) AG 的长.

【答案】 (1) $AB = \sqrt{10}$

(2) $AG = \frac{\sqrt{10}}{2}$

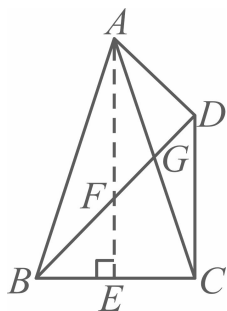
【解析】

【分析】 (1) 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E , 交 BD 于 F . 则 $\angle CDB = \angle CBD = 45^\circ$, 由勾股定理得, $BD = 2\sqrt{2}$. 由 $AB = AC$, $AE \perp BC$, 可得 $BE = \frac{1}{2}BC = 1$, $\angle EFB = 45^\circ = \angle EBF$, 则 $EF = BE = 1$, $\angle AFD = \angle EFB = 45^\circ$, $AD = DF$, 由勾股定理得, $BF = \sqrt{2}$, 则 $AD = DF = BD - BF = \sqrt{2}$, 由勾股定理得, $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2}$, 计算求解即可;

(2) 由题意知, $AF = \frac{DF}{\cos 45^\circ} = 2 = CD$, 证明 $\triangle AGF \cong \triangle CGD$ (AAS), 则 $AG = CG$, 由 $AG + CG = \sqrt{10}$, 可求 AG .

【小问 1 详解】

解: 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E , 交 BD 于 F .



$$\therefore \angle BCD = 90^\circ, \quad BC = CD = 2,$$

$$\therefore \angle CDB = \angle CBD = 45^\circ,$$

$$\text{由勾股定理得, } BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 2\sqrt{2}.$$

$$\therefore AB = AC, \quad AE \perp BC,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC = 1, \quad \angle EFB = 45^\circ = \angle EBF,$$

$$\therefore EF = BE = 1, \quad \angle AFD = \angle EFB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF = 45^\circ = \angle AFD,$$

$$\therefore AD = DF,$$

$$\text{由勾股定理得, } BF = \sqrt{BE^2 + EF^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore AD = DF = BD - BF = \sqrt{2},$$

$$\text{由勾股定理得, } AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore AB = \sqrt{10};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 由题意知, } AF = \frac{DF}{\cos 45^\circ} = 2 = CD,$$

$$\text{又} \therefore \angle AFG = 45^\circ = \angle CDG, \quad \angle AGF = \angle CGD,$$

$$\therefore \triangle AGF \cong \triangle CGD (\text{AAS}),$$

$$\therefore AG = CG,$$

$$\therefore AG + CG = \sqrt{10},$$

$$\therefore AG = GC = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore AG = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

【点睛】 本题考查了等腰三角形的判定与性质，勾股定理，余弦，全等三角形的判定与性质等知识．熟练掌握等腰三角形的判定与性质，勾股定理，余弦，全等三角形的判定与性质是解题的关键．

22. 20个集装箱装满了甲、乙、丙三种商品共120吨，每个集装箱都只装载一种商品，根据下表提供的信息，解答以下问题：

商品类型	甲	乙	丙
每个集装箱装载量（吨）	8	6	5
每吨价值（万元）	12	15	20

(1) 如果甲种商品装 x 个集装箱，乙种商品装 y 个集装箱，求 y 与 x 之间的关系式；

(2) 如果其中5个集装箱装了甲种商品，求每个集装箱装载商品总价值的中位数．

【答案】 (1) $y = -3x + 20$

(2) 每个集装箱装载商品总价值的中位数是 98 万元

【解析】

【分析】 本题考查了根据实际问题列函数关系式及中位数，正确认识题中图表及理解题意是解题关键．

(1) 先列出三种商品装集装箱的个数的式子，再利用三种商品共120吨列式即可；

(2) 先得出三种商品装载集装箱的个数，再得出20个集装箱装载商品总价值分别是多少，利用中位数定义即可求解．

【小问1 详解】

解： $\because$ 甲种商品装 x 个集装箱，乙种商品装 y 个集装箱，一共20个集装箱，

$\therefore$ 丙种商品装 $(20 - x - y)$ 个集装箱，

$\therefore$ 由题意得： $8x + 6y + 5(20 - x - y) = 120$ ，

化简得： $y = -3x + 20$ ；

【小问2 详解】

当 $x = 5$ 时， $y = -3 \times 5 + 20 = 5$ ， $20 - x - y = 20 - 5 - 5 = 10$ ，

$\therefore$ 甲、乙、丙三种商品装载集装箱个数分别是5、5、10，

由表可知每个甲集装箱装载商品总价值为 $8 \times 12 = 96$ （万元），

每个乙集装箱装载商品总价值为 $6 \times 15 = 90$ （万元），

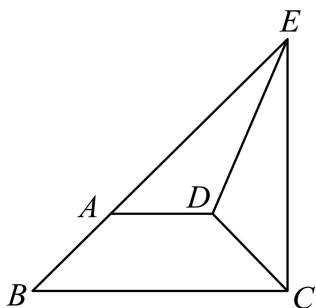
每个丙集装箱装载商品总价值为 $5 \times 20 = 100$ （万元），

$\therefore$ 20个集装箱装载商品总价值有5个90万元，5个96万元，10个100万元，

∴ 这 20 个数据从小到大排列后第 10、11 个数据分别是 96、100 万元，

∴ 每个集装箱装载商品总价值的中位数是 $\frac{96+100}{2} = 98$ (万元)。

23. 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = CD = AD$ ，点 E 在 BA 的延长线上， $AE = BC$ 。



(1) 求证： $\angle BCD = 2\angle AED$ ；

(2) 当 ED 平分 $\angle BEC$ 时，求证： $\triangle EBC$ 是等腰直角三角形。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

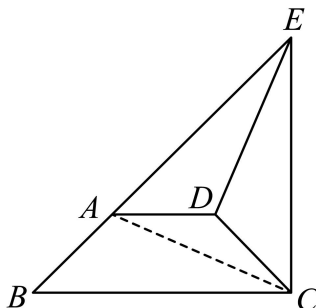
【解析】

【分析】(1) 连接 AC ，由梯形 $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ，可得 $\angle EAD = \angle B$ ， $\angle DAC = \angle BCA$ 。证明 $\triangle DEA \cong \triangle ACB$ (SAS)。则 $\angle AED = \angle BCA$ 。由 $AD = CD$ ，可得 $\angle DCA = \angle DAC = \angle BCA$ 。进而可得 $\angle BCD = \angle DCA + \angle BCA = 2\angle BCA = 2\angle AED$ 。

(2) 由 ED 平分 $\angle BEC$ ，可得 $\angle AEC = 2\angle AED$ 。即 $\angle AEC = \angle BCD$ ，由梯形 $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $AB = CD$ ，可得 $\angle EAD = \angle B = \angle BCD = \angle AEC$ 。则 $CE = BC = AE$ 。证明 $\triangle AED \cong \triangle CED$ (SSS)，则 $\angle ECD = \angle EAD = \angle B$ ，由 $\angle AEC + \angle ECD + \angle BCD + \angle B = 180^\circ$ ，可求 $\angle AEC = \angle ECD = \angle BCD = \angle B = 45^\circ$ ，进而可得 $\angle ECB = \angle ECD + \angle BCD = 90^\circ$ ，进而结论得证。

【小问 1 详解】

证明：连接 AC ，



∵ 梯形 $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ，

∴ $\angle EAD = \angle B$ ， $\angle DAC = \angle BCA$ 。

又 ∵ $AE = BC$ ， $AD = AB$ ，

$$\therefore \triangle DEA \cong \triangle ACB (\text{SAS}).$$

$$\therefore \angle AED = \angle BCA.$$

$$\because AD = CD,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle DAC = \angle BCA.$$

$$\therefore \angle BCD = \angle DCA + \angle BCA = 2\angle BCA = 2\angle AED,$$

$$\therefore \angle BCD = 2\angle AED.$$

【小问 2 详解】

证明： $\because ED$ 平分 $\angle BEC$,

$$\therefore \angle AEC = 2\angle AED.$$

$$\because \angle BCD = 2\angle AED,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle BCD,$$

$$\because \text{梯形 } ABCD, AD \parallel BC, AB = CD,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle B = \angle BCD = \angle AEC.$$

$$\therefore CE = BC = AE.$$

$$\because AE = CE, DE = DE, AD = CD,$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle CED (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle ECD = \angle EAD = \angle B,$$

$$\because \angle AEC + \angle ECD + \angle BCD + \angle B = 180^\circ,$$

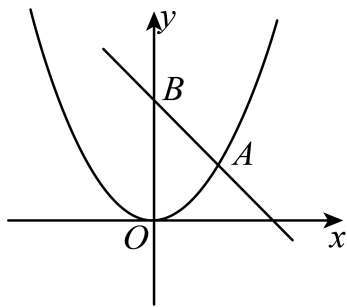
$$\therefore \angle AEC = \angle ECD = \angle BCD = \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ECB = \angle ECD + \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EBC \text{ 是等腰直角三角形.}$$

【点睛】 本题考查了等腰梯形的性质，平行线的性质，角平分线，全等三角形的判定与性质，三角形内角和定理，等腰三角形的判定等知识。熟练掌握等腰梯形的性质，平行线的性质，角平分线，全等三角形的判定与性质，三角形内角和定理，等腰三角形的判定是解题的关键。

24. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 顶点为坐标原点 O 、且经过点 $A(3,3)$ ，直线经过点 A 和点 $B(0,6)$ 。



(1) 求抛物线与直线的表达式;

(2) 如果将此抛物线平移, 平移后新抛物线的顶点 C 在原抛物线上, 新抛物线的对称轴与直线 AB 在原抛物线的内部相交于点 D , 且 $\angle COD = 45^\circ$, 求新抛物线的表达式.

【答案】 (1) 抛物线表达式为 $y = \frac{1}{3}x^2$, 直线的表达式为 $y = -x + 6$

(2) 新抛物线的表达式 $y = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ 或 $y = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3-3\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{9-3\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法求解即可;

(2) 设直线 $y = -x + 6$ 与 x 轴交于点 E , 求出 $E(6, 0)$, 设点 D 的坐标为 $(m, -m + 6)$, 则点 C 的坐标为 $\left(m, \frac{1}{3}m^2\right)$, 分 ① 当点 D 在线段 AB 上时, ② 当点 D 在 AB 延长线上时两种情况讨论即可;

本题考查二次函数的图象与性质, 相似三角形的判定与性质, 熟练掌握知识点的应用是解题的关键.

【小问 1 详解】

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 顶点为坐标原点 O ,

$\therefore b = 0, c = 0,$

$\because$ 点 $A(3, 3)$ 在二次函数图象上,

$\therefore 3 = 9a,$

$\therefore a = \frac{1}{3},$

$\therefore$ 抛物线表达式为 $y = \frac{1}{3}x^2,$

设直线的表达式为 $y = kx + b_1,$

$\because$ 直线经过点 A 和点 $B(0, 6),$

$\therefore \begin{cases} 3 = 3k + b_1 \\ 0 = 6k + b_1 \end{cases},$

$$\therefore \begin{cases} k = -1 \\ b_1 = 6 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线的表达式为 $y = -x + 6$;

【小问 2 详解】

设直线 $y = -x + 6$ 与 x 轴交于点 E ,

$\therefore$ 当 $y = 0$ 时, $x = 6$,

$\therefore E(6, 0)$,

$\therefore OE = OB = 6$,

$\therefore \angle EBO = 45^\circ$,

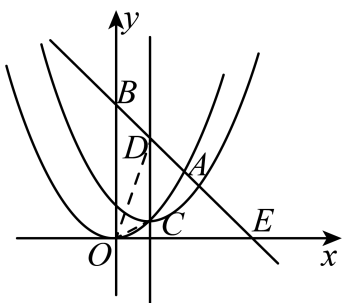
设点 D 的坐标为 $(m, -m + 6)$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $\left(m, \frac{1}{3}m^2\right)$,

$\therefore CD \parallel y$ 轴,

$\therefore \angle BOD = \angle ODC$,

当点 D 在线段 AB 上时, 如图,



$\therefore \angle COD = \angle DBO = 45^\circ$,

$\therefore \triangle CDO \sim \triangle DOB$,

$$\therefore \frac{CD}{DO} = \frac{DO}{OB},$$

$\therefore DO^2 = CD \cdot OB$,

$$\therefore OD^2 = m^2 + (m - 6)^2 = 2m^2 - 12m + 36, \quad CD = -m + 6 - \frac{1}{3}m^2,$$

$$\therefore 2m^2 - 12m + 36 = 6\left(-m + 6 - \frac{1}{3}m^2\right),$$

$$\therefore 4m^2 - 6m = 0,$$

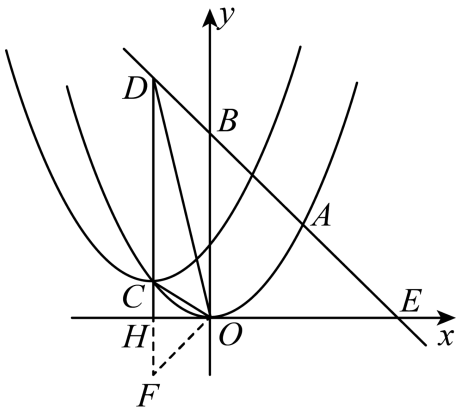
$$\because m \neq 0,$$

$$\therefore m = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right),$$

$$\therefore \text{新抛物线的表达式 } y = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

当点 D 在 AB 延长线上时，延长 DC 交 x 轴于点 H ，在 DH 的延长线上截取 $HF = HO$ ，连接 FO ，如图，



$$\text{则 } \angle HFO = \angle HOF = \angle COD = 45^\circ, \quad DF = 6 - m - m = 6 - 2m,$$

$$\because \angle ODF = \angle CDO,$$

$$\therefore \triangle CDO \sim \triangle ODF,$$

$$\therefore \frac{CD}{DO} = \frac{DO}{DF},$$

$$\therefore DO^2 = CD \cdot DF,$$

$$\therefore 2m^2 - 12m + 36 = (6 - 2m)\left(-m + 6 - \frac{1}{3}m^2\right),$$

$$\therefore m^3 - 3m^2 - 9m = 0,$$

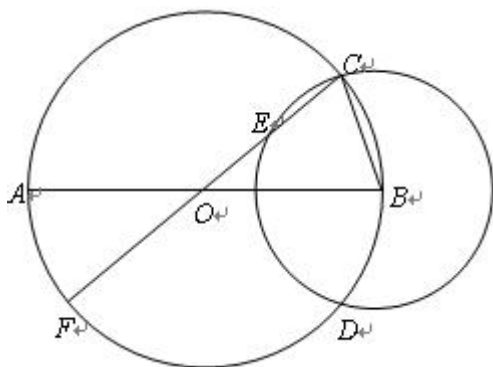
$$\because m \neq 0,$$

$$\therefore m = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \quad (\text{正值不符合题意, 舍去}),$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3-3\sqrt{5}}{2}, \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \right).$$

$$\therefore \text{新抛物线的表达式 } y = \frac{1}{3} \left(x - \frac{3-3\sqrt{5}}{2} \right)^2 + \frac{9-3\sqrt{5}}{2}.$$

25. 已知: $\odot O$ 的直径 $AB = 8$, $\odot B$ 与 $\odot O$ 相交于点 C, D , $\odot O$ 的直径 CF 与 $\odot B$ 相交于点 E , 设 $\odot B$ 的半径为 x , OE 的长为 y .



- (1) 如图, 当点 E 在线段 OC 上时, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;
- (2) 当点 E 在直径 CF 上时, 如果 OE 的长为 3, 求公共弦 CD 的长;
- (3) 设 $\odot B$ 与 AB 相交于 G , 试问 $\triangle OEG$ 能否为等腰三角形? 如果能够, 请直接写出 $\widehat{BC}$ 弧的长度 (不必写过程); 如果不能, 请简要说明理由

【答案】 (1) $y = 4 - \frac{1}{4}x^2 \quad (0 < x \leq 4)$

(2) $\sqrt{15}$ 或 $3\sqrt{7}$

(3) $\triangle OEG$ 能为等腰三角形, $\widehat{BC}$ 的长度为 $\frac{4}{5}\pi$ 或 $\frac{12}{7}\pi$

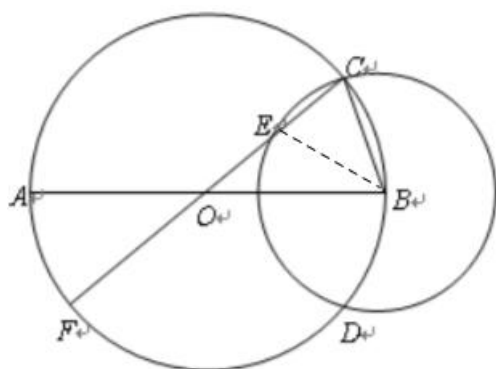
【解析】

【分析】 本题主要考查了垂径定理、相似三角形的性质与判定, 解直角三角形, 圆的基本知识, 做题时一定要分析各种情况, 不要遗漏.

- (1) 欲求 y 关于 x 的函数解析式, 连接 BE , 证明 $\triangle BCE \sim \triangle OCB$ 即可;
- (2) 求公共弦 CD 的长, 作 $BM \perp CE$, 垂足为 M . 通过圆的知识得出 $BM = \frac{1}{2}CD$, 转化为求 BM 的长; 分为两种情况: 点 E 在线段 OC 上时; 点 E 在线段 OF 上时, 求出 BM 的长;
- (3) $\triangle OEG$ 为等腰三角形, 分为两种情况: 点 E 在线段 OC 上时; 点 E 在线段 OF 上时, 根据角的关系先求出角的度数, 从而求出 $\widehat{BC}$ 的长度.

【小问 1 详解】

解：连接 BE ，



$\because \odot O$ 的直径 $AB = 8$,

$$\therefore OC = OB = \frac{1}{2}AB = 4.$$

$\because BC = BE, OC = OB$,

$$\therefore \angle BEC = \angle C = \angle CBO.$$

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle OCB.$$

$$\therefore \frac{CE}{CB} = \frac{BC}{OC}.$$

$$\because CE = OC - OE = 4 - y,$$

$$\therefore \frac{4 - y}{x} = \frac{x}{4}.$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数解析式为 } y = 4 - \frac{1}{4}x^2 \quad (0 < x \leq 4);$$

【小问 2 详解】

解：如图所所示，当点 E 在线段 OC 上时，作 $BM \perp CE$ ，垂足为 M ，

$$\because OC = 4, OE = 3,$$

$$\therefore CE = 1,$$

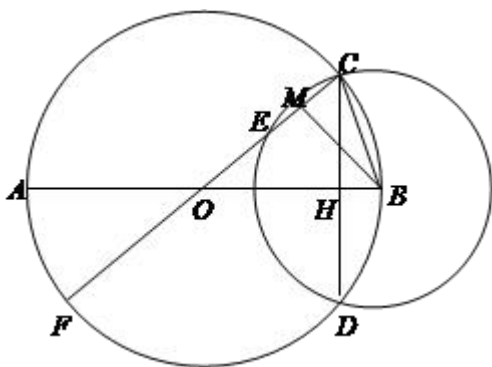
$$\therefore EM = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OM = \frac{7}{2},$$

$$\therefore BM = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2};$$

设两圆的公共弦 CD 与 AB 相交于 H ，则 AB 垂直平分 CD 。

$$\therefore CH = OC \cdot \sin \angle COB = OB \cdot \sin \angle COB = BM.$$



$$\therefore CD = 2CH = 2BM = \sqrt{15}.$$

当点 E 在线段 OF 上时，作 $BM \perp CE$ ，垂足为 M ，

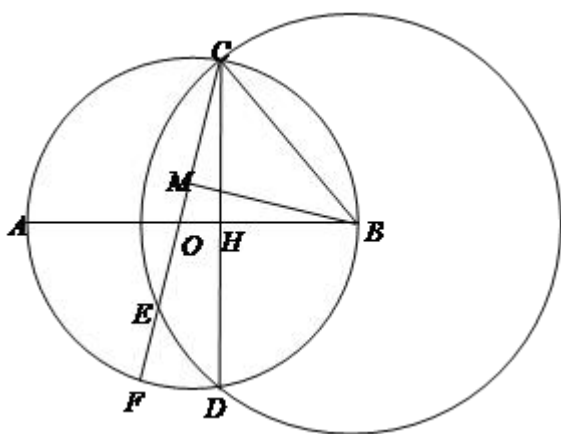
$$\therefore OE = OC + CE = 7,$$

$$\therefore EM = \frac{1}{2}CE = \frac{7}{2}$$

$$\therefore OM = EM - OE = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BM = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

同理可得 $CD = 2CH = 2BM = 3\sqrt{7}$



综上所述， CD 的长为 $\sqrt{15}$ 或 $3\sqrt{7}$ ；

【小问 3 详解】

解：如图所示，当点 E 在线段 OC 上时，

$$\therefore BG = BE,$$

$$\therefore \angle BEG = \angle BGE,$$

$$\therefore \angle BEG + \angle OEG \neq 180^\circ, \quad \angle BGE + \angle OGE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle OEG \neq \angle OGE, \quad \text{即 } OE \neq OG;$$

$$\therefore \angle EOB + \angle OEB + \angle EBG = 180^\circ,$$

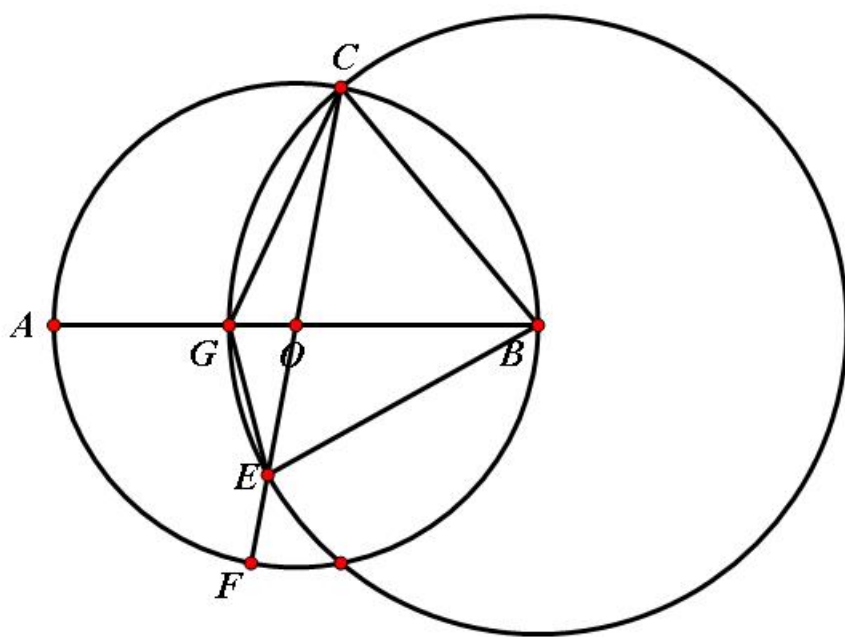
$$\because OC = OB,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 3x - 180^\circ,$$

$$\therefore 3x - 180^\circ + 180^\circ - 2x = 540^\circ - 6x,$$

$$\text{解得 } x = \left(\frac{540}{7}\right)^\circ,$$

$$\therefore \widehat{BC} \text{ 的长为 } \frac{\frac{540}{7} \times \pi \times 4}{180} = \frac{12}{7}\pi;$$



综上所述， $\triangle OEG$ 能为等腰三角形， $\widehat{BC}$ 的长度为 $\frac{4}{5}\pi$ 或 $\frac{12}{7}\pi$.