

上海市航头学校 2022 学年度第二学期

九年级数学 5 月调研卷

(考试时间: 90 分钟; 满分: 150 分)

班级_____姓名_____学号_____

一、选择题 (每题 4 分, 共 24 分)

1. 下列实数中, 属于有理数的是 ()

A. π

B. $\frac{5}{7}$

C. 0.3131131113..... (两个 3 之间依次多个 1)

D. $-\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据有理数的定义即可得出答案.

【详解】根据有理数定义: 有限小数和无限循环的小数都是有理数, 所以选项 A、C、D 都是无限不循环小数, 是无理数, B 选项是分数, 是有理数.

故选: B.

【点睛】本题考查有理数的定义, 掌握有理数是有限小数和无限循环小数是解题的关键.

2. 如果 $a > b$, 那么下列不等式一定成立的是 ()

A. $a + 6 > b + 6$

B. $-3a > -3b$

C. $-\frac{a}{2} > -\frac{b}{2}$

D. $a - b < 0$

【答案】A

【解析】

【分析】根据不等式两边加 (或减) 同一个数 (或式子), 不等号的方向不变, 不等式两边乘 (或除以) 同一个正数, 不等号的方向不变, 不等式两边乘 (或除以) 同一个负数, 不等号的方向改变.

【详解】解: A、不等式的两边都加 6, 则 $a + 6 > b + 6$, 故成立, 符合题意;

B、不等式的两边都乘以 -3 , 则 $-3a < -3b$, 故不成立, 不合题意;

C、不等式的两边都乘以 $-\frac{1}{2}$, 则 $-\frac{a}{2} < -\frac{b}{2}$, 故不成立, 不合题意;

D、不等式的两边都减 b , 则 $a - b > 0$, 故不成立, 不合题意;

故选: A.

【点睛】本题主要考查了不等式的基本性质. “0” 是很特殊的一个数, 因此, 解答不等式的问题时, 应密切关注 “0” 存在与否, 以防掉进 “0” 的陷阱. 不等式的基本性质: 不等式两边加 (或减) 同一个数 (或式子), 不等号的方向不变, 不等式两边乘 (或除以) 同一个正数, 不等号的方向不变, 不等式两边乘 (或

除以) 同一个负数, 不等号的方向改变.

3. 下列二次根式中, 最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{8}$ B. $-\sqrt{0.25}$ C. $\sqrt{y+1} (y \geq -1)$ D. $\sqrt{7x^2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据最简二次根式的意义进行判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, 不是最简二次根式, 故不符合题意;

B、 $-\sqrt{0.25} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$, 不是最简二次根式, 故不符合题意;

C、 $\sqrt{y+1} (y \geq -1)$ 是最简二次根式, 故符合题意;

D、 $\sqrt{7x^2} = |x| \cdot \sqrt{7}$, 不是最简二次根式, 故不符合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查最简二次根式, 理解“被开方数是整式且不含有能开得尽方的因数或因式的二次根式是最简二次根式”是正确判断的关键.

4. 一组数据 3、-1、2、5、-3、0 的中位数是 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 3.5

【答案】C

【解析】

【分析】根据中位数的定义, 对这组数据按大小排序, 找出最中间的两个数求平均数即可.

【详解】对这组数据按大小排序: -3、-1、0、2、3、5

这六个数最中间的数是第三个和第四个数, $\frac{0+2}{2} = 1$

故选: C.

【点睛】本题考查了中位数的计算, 注意当数据个数是奇数时, 按大小排序后, 最中间的数就是中位数; 当数据个数是偶数时, 按大小排序后, 最中间的两个数的平均数是中位数. 掌握中位数的定义计算是解题的关键.

5. 下列命题中, 真命题的是 ()

- A. 两条对角线相等的四边形是矩形
B. 两条对角线互相垂直的四边形是菱形
C. 两条对角线相等的四边形是矩形或等腰梯形

D. 两条对角互相平分的四边形是平行四边形

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据特殊四边形的判定方法即可判定.

【详解】 解: A、两条对角线相等的平行四边形是矩形, 故为假命题;

B、两条对角线互相垂直的平行四边形是菱形, 故为假命题;

C、两条对角线相等的四边形不一定是矩形或等腰梯形, 故为假命题;

D、两条对角互相平分的四边形是平行四边形, 故为真命题;

故选: D.

【点睛】 本题考查了命题的真假. 解决本题要熟悉常见四边形的判定方法.

6. 在平面直角坐标系中, 以点 $A(4,3)$ 为圆心、以 R 为半径作圆 A 与 x 轴相交, 且原点 O 在圆 A 的外部, 那么半径 R 的取值范围是 ()

A. $0 < R < 5$

B. $3 < R < 4$

C. $3 < R < 5$

D. $4 < R < 5$

【答案】 C

【解析】

【分析】 分别根据原点 O 在圆 A 的外部, 圆 A 与 x 轴相交, 可得半径 R 的取值范围.

【详解】 解: $\because A(4,3)$,

$$\therefore OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$\because$ 原点 O 在圆 A 的外部,

$\therefore R < OA$, 即 $R < 5$,

$\because$ 圆 A 与 x 轴相交,

$\therefore R > 3$,

$\therefore 3 < R < 5$,

故选 C.

【点睛】 本题考查了坐标与图形性质, 勾股定理, 直线、点与圆的位置关系等知识点, 能熟记直线、点与圆的位置关系是解此题的关键.

二、填空题 (每题 4 分, 共 48 分)

7. 计算: $a^5 \div a^3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 a^2

【解析】

【分析】 根据底数不变，指数相减计算即可.

【详解】 $a^5 \div a^3 = a^2$,

故答案为: a^2 .

【点睛】 本题考查了同底数幂的除法，熟练掌握计算法则是解题的关键.

8. 函数 $y = \sqrt{x-2}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \geq 2$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质，被开方数大于等于 0，可知: $x-2 \geq 0$ ，解得 x 的范围.

【详解】 解: 根据题意得: $x-2 \geq 0$,

解得: $x \geq 2$,

故答案为: $x \geq 2$.

【点睛】 本题考查的是函数自变量取值范围的求法. 函数自变量的范围一般从三个方面考虑: (1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数; (2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0; (3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数为非负数.

9. 分解因式: $a^2 - 2a + 1 =$ _____.

【答案】 $(a-1)^2$

【解析】

【分析】 观察原式发现，此三项符合差的完全平方公式 $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ ，即可把原式化为积的形式.

【详解】 $a^2 - 2a + 1 = a^2 - 2 \times 1 \times a + 1^2 = (a-1)^2$.

故答案为: $(a-1)^2$.

【点睛】 此题考查完全平方公式分解因式，熟练掌握完全平方公式的结构特点是解题的关键.

10. 一元二次方程 $x^2 + 5x + 3 = 0$ 根的情况是_____.

【答案】 有两个不相等的实数根

【解析】

【分析】 先求根的判别式的值，然后根据根的判别式的意义判断方程根的情况.

【详解】 解: $\because \Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 3 = 13 > 0$,

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.

故答案为: 有两个不相等的实数根.

【点睛】 本题考查了根的判别式：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：

当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

11. 方程 $\sqrt{y+4} = 3$ 的解是_____.

【答案】 $y = 5$

【解析】

【分析】 方程两边平方得出 $y + 4 = 9$ ，求出方程的解，再进行检验即可.

【详解】 解： $\sqrt{y+4} = 3$,

方程两边平方得： $y + 4 = 9$,

解得： $y = 5$,

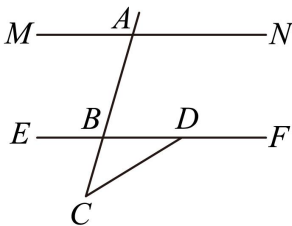
经检验 $y = 5$ 是原方程的解，

即原方程的解是 $y = 5$,

故答案为： $y = 5$.

【点睛】 本题考查了解无理方程，能把无理方程转化成有理方程是解此题的关键.

12. 如图，已知 $MN \parallel EF$ ，点 A 在 MN 上，点 B 和 D 在 EF 上，点 C 在 AB 的延长线上， $\angle MAB = 76^\circ$ ， $\angle C = 36^\circ$ ，则 $\angle BDC$ 的度数是_____.



【答案】 40° ##40 度

【解析】

【分析】 利用平行线的性质求出 $\angle ABD = 76^\circ$ ，再利用三角形外角的性质计算即可.

【详解】 解： $\because MN \parallel EF$,

$\therefore \angle MAB = \angle ABD = 76^\circ$,

$\because \angle C = 36^\circ$,

$\therefore \angle BDC = \angle ABD - \angle C = 40^\circ$,

故答案为： 40° ．

【点睛】本题考查了平行线的性质，三角形外角的性质，熟练掌握三角形外角的性质、平行线的性质是解决本题的关键．

13. 已知函数 $f(x) = 2x - x^2$ ，则 $f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】 -3

【解析】

【分析】将 $x = 3$ 代入该函数解析式进行计算可得此题结果．

【详解】解： $\because f(x) = 2x - x^2$ ，

$$\therefore f(3) = 2 \times 3 - 3^2 = -3,$$

故答案为： -3 ．

【点睛】此题考查了运用实数的计算，求解函数值的能力，关键是能准确代入、计算．

14. 一个不透明的口袋中有除了标号不同外，五个完全相同的小球，分别标号 1，2，3，4，5，从中随机摸出一个小球，其标号是奇数的概率等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】 $\frac{3}{5}$ 或 0.6

【解析】

【分析】由在一个不透明的口袋中装有 5 个完全相同的小球，把它们分别标号为 1，2，3，4，5，直接利用概率公式求解即可求得答案．

【详解】解： $\because$ 在一个不透明的口袋中装有 5 个完全相同的小球，把它们分别标号为 1，2，3，4，5，

$\therefore$ 从中随机摸出一个小球，其标号是奇数的概率为 $\frac{3}{5}$ ．

故答案为： $\frac{3}{5}$ ．

【点睛】此题考查了概率公式的应用．用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比．

15. 已知甲乙两位运动员在一次射击训练中各射五发，射击成绩的平均环数相同，甲的方差是 1.5；乙的成绩（环）为 7、8、10、9、6，那么甲、乙两位运动员中 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的成绩稳定．

【答案】 甲

【解析】

【分析】利用方差的公式求得乙的方差，与甲的方差比较，方差较小的成绩稳定．

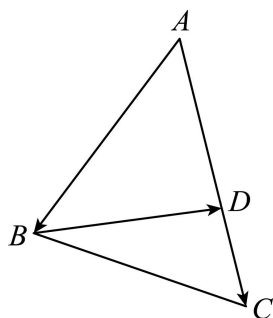
【详解】解：乙的平均成绩为 $(7 + 8 + 10 + 6 + 9) \div 5 = 8$ ，

$$\text{方差为：} \frac{1}{5}[(7-8)^2 + (8-8)^2 + (10-8)^2 + (9-8)^2 + (6-8)^2] = 2,$$

$\therefore$ 甲的方差为 1.5,
 $\therefore$ 甲的方差较小,
 $\therefore$ 成绩较稳定的是甲,
 故答案为: 甲.

【点睛】 本题考查了方差的知识, 解题的关键是了解方差的意义并牢记方差的计算公式, 难度不大.

16. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AC 上, $AD = 2DC$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BD}$ _____. (用含向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的式子表示)



【答案】 $-\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】 利用三角形法则可知: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$, 求出 $\overrightarrow{AD}$ 即可解决问题.

【详解】 解: $\because AD = 2DC$,

$$\therefore AD = \frac{2}{3}AC,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD},$$

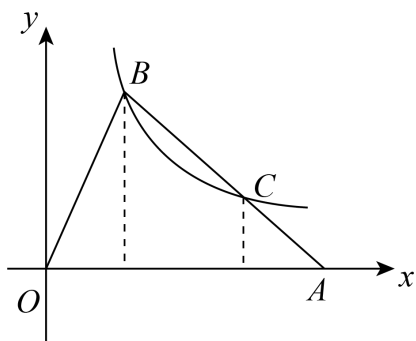
$$\therefore \overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b},$$

故答案为: $-\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

【点睛】 本题考查平面向量, 三角形法则等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识.

17. 如图, 点 A 在 x 轴的正半轴上, 函数 $y = \frac{12}{x} (x > 0)$ 的图像经过 $\triangle OAB$ 的顶点 B 和边 AB 上的点 C , 且

$\frac{BC}{AC} = 2$, 点 B 的横坐标为 2, 则点 C 的坐标是_____.



【答案】(6,2)

【解析】

【分析】分别过 B, C 作 $BD \perp OA, CE \perp OA$, 垂足为 D, E , 得到 $BD \parallel CE$, 求出点 B 的坐标, 证明 $\triangle ACE \sim \triangle ABD$, 得到 $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD} = \frac{1}{3}$, 设 $CE = a$, 代入函数表达式, 求出 a 值, 可得 CE , 进一步计算可得 OE , 从而得到点 C 的坐标.

【详解】解: 分别过 B, C 作 $BD \perp OA, CE \perp OA$, 垂足为 D, E ,
则 $BD \parallel CE$,

$\because$ 点 B 在 $y = \frac{12}{x} (x > 0)$ 图象上, 横坐标为 2,

$\therefore$ 纵坐标为 $\frac{12}{2} = 6$, 即 $B(2, 6)$,

$\therefore OD = 2, BD = 6$,

$\because BD \parallel CE$,

$\therefore \triangle ACE \sim \triangle ABD$,

$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD}$,

$\because \frac{BC}{AC} = 2$,

$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD} = \frac{1}{3}$,

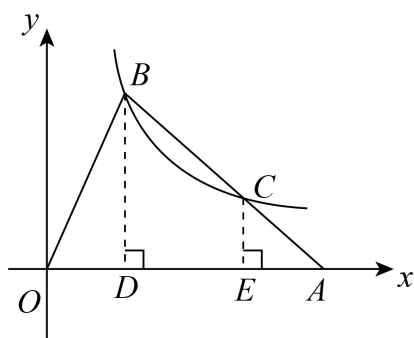
设 $CE = a$, 则 $BD = 3a = 6$,

则 $a = 2$, 即 $y_C = 2$, 代入 $y = \frac{12}{x}$, 得 $2 = \frac{12}{x}$,

解得: $x_C = 6$, 即 $OE = 6$,

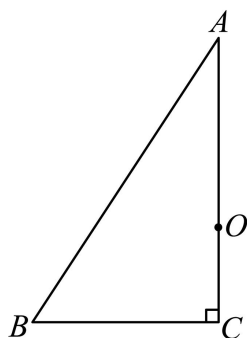
$\therefore C(6, 2)$,

故答案为: (6,2).



【点睛】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，相似三角形的判定和性质，解题的关键是将点的坐标和线段的长相互转化.

18. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 35^\circ$ ，点 O 在边 AC 上，且 $OA = 2OC$ ，将 OA 绕着点 O 逆时针旋转，点 A 落在 $\triangle ABC$ 的一条边上的点 D 处，那么旋转角 $\angle AOD$ 的度数是_____.

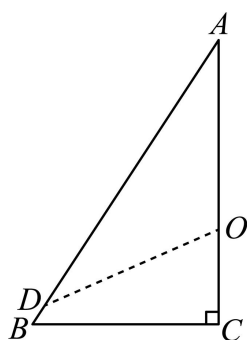


【答案】 110° 或 120°

【解析】

【分析】分类讨论：当点 D 在 AB 上，根据等边对等角和三角形内角和即可求得；当点 D 在 BC 上，根据 30° 度所对的直角边是斜边的一半和三角形的外角性质即可求得.

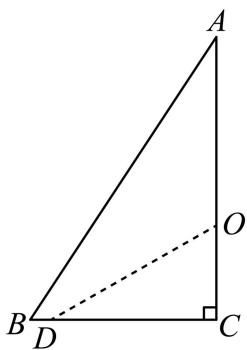
【详解】当点 D 在 AB 上，如图：



$$\because AO = OD, \therefore \angle A = \angle ADO = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 180^\circ - 35^\circ - 35^\circ = 110^\circ,$$

当点 D 在 BC 上，如图：



$$\therefore AO = OD = 2OC,$$

$$\therefore \angle ODC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ,$$

故答案为: 110° 或 120°

【点睛】本题考查旋转的性质，等边对等角，三角形内角和， 30° 度角的直角三角形性质，三角形的外角性质，解题的关键是分类讨论思想的运用。

三、解答题 (第 19~22 题每题 10 分, 第 22、23 题每题 12 分, 第 25 题 14 分, 共 78 分)

19. 先化简, 再求值: $\frac{x^2-4}{x^2+2x} \div (\frac{x^2+4}{x} - 4)$, 其中 $x = \sqrt{3}$.

【答案】 $\frac{1}{x-2}$; $-\sqrt{3}-2$

【解析】

【分析】先计算括号内的分式减法, 再计算除法运算, 化简后, 代入 x 的值求解.

【详解】解: 原式 $= \frac{(x+2)(x-2)}{x(x+2)} \div \frac{x^2-4x+4}{x}$

$$= \frac{x-2}{x} \cdot \frac{x}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{x-2}.$$

当 $x = \sqrt{3}$ 时, 原式 $= \frac{1}{x-2} = \frac{1}{\sqrt{3}-2} = -\sqrt{3}-2$.

【点睛】本题考查分式的化简求值和二次根式的化简, 关键是对多项式进行因式分解, 然后化简求值.

20. 解方程组: $\begin{cases} y^2 + 2x = 1 \\ y - 2x = 5 \end{cases}$.

【答案】 $\begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases}$

【解析】

【分析】利用加减消元法，得到 $y^2 + y = 6$ ，解之求出 y 值，再代入求出 x 值即可.

【详解】解：
$$\begin{cases} y^2 + 2x = 1 \text{ ①} \\ y - 2x = 5 \text{ ②} \end{cases},$$

①+②得： $y^2 + y = 6$,

解得： $y = -3$ 或 $y = 2$,

当 $y = -3$ 时，代入②中，

解得： $x = -4$;

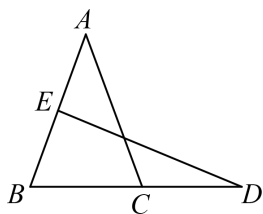
当 $y = 2$ 时，代入②中，

解得： $x = -\frac{3}{2}$,

∴ 方程组的解为
$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases}.$$

【点睛】本题考查了二元二次方程组，解题的关键是掌握消元的思想.

21. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 6$ ， $BC = 4$ ，边 AB 的垂直平分线，交 BC 的延长线于点 D ，交边 AB 于点 E .



(1) 求 CD 的长;

(2) 求点 C 到直线 ED 的距离.

【答案】(1) 5 (2) $\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】(1) 过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F ，由等腰三角形的性质可得 $BF = FC = 2$ ， $\angle BFA = 90^\circ$ ，求得 $\cos \angle B = \frac{1}{3}$ ，再根据垂直平分线的性质可得 $AE = EB = 3$ ， $\angle DEB = 90^\circ$ ，从而可得 $\cos \angle B = \frac{BE}{BD} = \frac{1}{3}$ ，即 $\frac{3}{BD} = \frac{1}{3}$ ，求得 $BD = 9$ ，即可求解;

(2) 过点 C 作 $CH \perp DE$ 于点 H ，证明 $CH \parallel AB$ ，根据平行线段成比例定理即可求解.

【小问 1 详解】

解：如图，过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F ，

$$\because AB = AC = 6, \quad BC = 4, \quad AF \perp BC,$$

$$\therefore BF = FC = 2, \quad \angle BFA = 90^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABF \text{ 中, } \cos \angle B = \frac{BF}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

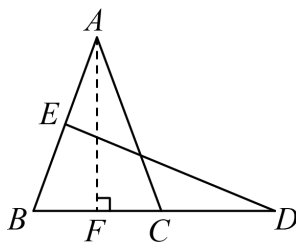
$$\because DE \text{ 垂直平分 } AB,$$

$$\therefore AE = EB = 3, \quad \angle DEB = 90^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle DEB \text{ 中, } \cos \angle B = \frac{BE}{BD} = \frac{1}{3}, \quad \text{即 } \frac{3}{BD} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BD = 9,$$

$$\therefore CD = 9 - 4 = 5.$$



【小问 2 详解】

解：过点 C 作 $CH \perp DE$ 于点 H ，

$$\because CH \perp DE, \quad AB \perp DE,$$

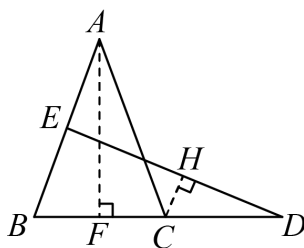
$$\therefore \angle DHC = \angle DEB = 90^\circ,$$

$$\therefore CH \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle DCH \sim \triangle DBE,$$

$$\therefore \frac{CH}{BE} = \frac{DC}{BD}, \quad \text{即 } \frac{CH}{3} = \frac{5}{9},$$

$$\therefore CH = \frac{5}{3}.$$



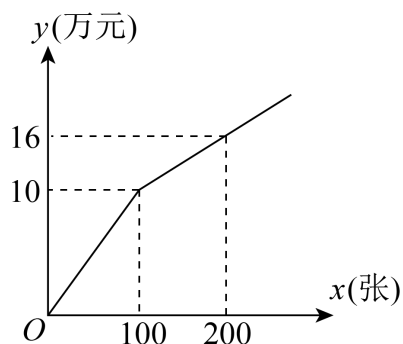
【点睛】 本题考查等腰三角形的性质、垂直平分线的性质、锐角三角函数、相

似三角形的判定与性质，熟练掌握相关性质及判定定理是解题的关键．

22. 某演唱会购买门票有两种方式：

方式一：若单位赞助广告费 10 万元，则购买门票的单价是每张 0.02 万元；

方式二：设总费用 y 万元，购买门票 x 张。如图所示是 y 关于 x 的函数图像。



- (1) 方式一中：总费用 = 赞助广告费 10 万元 + 门票费，求方式一中 y 关于 x 的函数解析式；
- (2) 若甲、乙两个单位分别采用方式一、方式二购买这场演唱会门票共 400 张，且乙单位购买超过 100 张，两个单位的总共花费 27.2 万元，求甲、乙两个单位各购买门票多少张？

【答案】 (1) $y = 10 + 0.02x$

(2) 甲、乙两单位购买门票分别为 270 张和 130 张

【解析】

【分析】 (1) 方案一中，总费用 = 广告赞助费 + 门票单价 $\times$ 票的张数；

(2) 方案二中，当 $x > 100$ 时，设出一次函数解析式，把其中两点的坐标代入即可求得相应的函数解析式；
设乙单位购买了 a 张门票，则甲单位购买了 $(400 - a)$ 张门票，进而根据 (1) 得甲单位的总费用，再根据两单位共花费 27.2 万元，列出方程解答便可。

【小问 1 详解】

解：方案一：单位赞助广告费 10 万元，该单位所购门票的价格为每张 0.02 万元，

则 $y = 10 + 0.02x$ ；

【小问 2 详解】

方案二：当 $x > 100$ 时，设解析式为 $y = kx + b$ 。

将 $(100, 10)$ ， $(200, 16)$ 代入，

$$\text{得} \begin{cases} 100k + b = 10 \\ 200k + b = 16 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 0.06 \\ b = 4 \end{cases},$$

$$\therefore y = 0.06x + 4.$$

设乙单位购买了 a 张门票，则甲单位购买了 $(400 - a)$ 张门票，根据题意得

$$0.06a + 4 + [10 + 0.02(400 - a)] = 27.2,$$

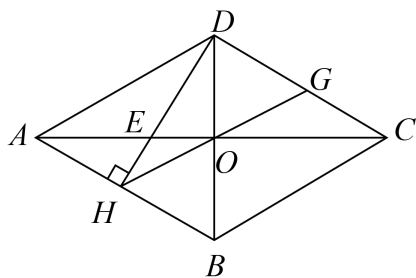
解得， $a = 130$ ，

$$\therefore 400 - a = 270,$$

答：甲、乙两单位购买门票分别为 270 张和 130 张。

【点睛】本题考查了一次函数的应用，待定系数法求一次函数的解析式的运用，及一元一次方程解决实际问题的运用，在解答的过程中求出一次函数的解析式 $y = 0.06x + 4$ 是解答的关键，根据自变量不同的取值，对总门票费分情况进行探讨是解决本题的易错点。

23. 如图，已知四边形 $ABCD$ 是菱形，两对角线 AC 和 BD 相交于点 O ，过点 D 作 $DH \perp AB$ ，垂足为点 H ， DH 和 AC 交于点 E ，联结 HO 并延长 HO 交边 CD 于点 G 。求证：



$$(1) \angle DHG = \angle OCD;$$

$$(2) OG \cdot AE = DE \cdot CG.$$

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 先判断出 $OB = OD$ ，进而判断出 $OH = OD$ ，得出 $\angle DHO = \angle BDH$ ，再用等角的余角相等判断出 $\angle DHG = \angle BAO$ ，即可得出结论；

(2) 先判断出 $\angle ADH = \angle COG$ ，进而判断出 $\triangle ADE \sim \triangle COG$ ，得出 $AE \cdot OG = DE \cdot CG$ 。

【小问 1 详解】

证明： $\because AC$ 是菱形 $ABCD$ 的对角线，

$$\therefore \angle BCD = \angle BAD = 2\angle BAO = 2\angle OCD,$$

$\because$ 点 O 是菱形 $ABCD$ 的两条对角线的交点，

$$\therefore OB = OD,$$

$\because DH \perp AB$,

$$\therefore \angle BHD = 90^\circ,$$

$$\therefore OH = OD,$$

$$\therefore \angle DHO = \angle BDH,$$

在 $\text{Rt } BHD$ 中， $\angle BDH + \angle ABO = 90^\circ$,

$$\because \angle BAO + \angle ABO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDH = \angle BAO,$$

$$\therefore \angle DHG = \angle BAO,$$

$$\therefore \angle BCD = 2\angle DHO,$$

$$\therefore \angle DHG = \frac{1}{2}\angle BCD,$$

$$\therefore \angle OCD = \frac{1}{2}\angle BCD,$$

$$\therefore \angle DHG = \angle OCD;$$

【小问 2 详解】

证明：由 (1) 知， $\angle DHO = \angle BAO$ ，

$\because AC$ 是菱形 $ABCD$ 的对角线，

$$\therefore OA = OC, \angle DAO = \angle BAO,$$

$$\therefore \angle DHO = \angle DAO,$$

$$\therefore \angle AED = \angle HEO,$$

$$\therefore \angle AOH = \angle ADE,$$

$$\therefore \angle AOH = \angle COG,$$

$$\therefore \angle ADH = \angle COG,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle OCG,$$

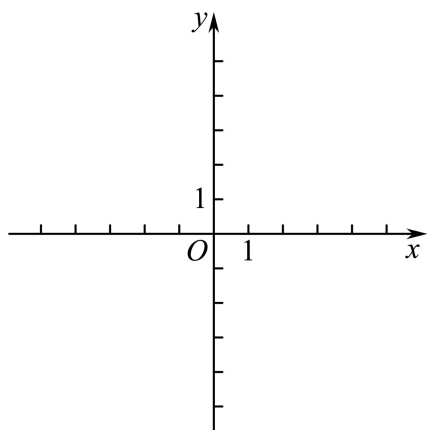
$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle COG,$$

$$\therefore \frac{AE}{CG} = \frac{DE}{OG},$$

$$\therefore AE \cdot OG = DE \cdot CG.$$

【点睛】此题主要考查了菱形的性质，相似三角形的判定和性质，同角的余角相等，判断出 $\angle DHG = \angle BAO$ 是解本题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $A(3,0)$ 和点 $B(0,3)$ ，其顶点为 C .



(1) 求抛物线的解析式和顶点 C 的坐标;

(2) 求 $\angle ACB$ 的正切值;

(3) 点 P 在第一象限的抛物线上, 且 $\angle POA = \angle ACB$, 求点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 3$, $C(1, 4)$

(2) 3 (3) $P\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-3+3\sqrt{13}}{2}\right)$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求解即可;

(2) 先根据两点坐标距离公式求得 AB 、 AC 、 BC , 然后可利用勾股定理的逆定理得到 $\angle ABC = 90^\circ$, 进而利用正切定义求解即可;

(3) 设点 $P(m, -m^2 + 2m + 3)$, $m > 0$, 过 P 作 $PH \perp x$ 轴于 H , 由 $\tan \angle POA = \tan \angle ACB = 3$ 求解 m 值即可求解.

【小问 1 详解】

解: 将点 $A(3, 0)$ 和点 $B(0, 3)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$ 中, 得

$$\begin{cases} -9 + 3b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$,

又 $\because y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$,

$\therefore$ 顶点 C 的坐标为 $(1, 4)$;

【小问 2 详解】

解: $\because A(3, 0)$ 、 $B(0, 3)$ 、 $C(1, 4)$,

$$\therefore AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$$

$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{5},$$

$$BC = \sqrt{(1-0)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

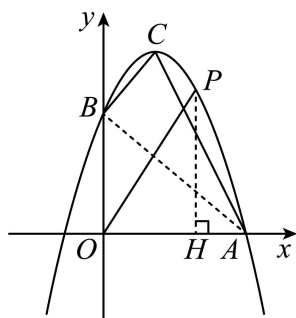
$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $\angle ABC = 90^\circ$,

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AB}{BC} = 3;$$

【小问 3 详解】

解：由题意，设点 $P(m, -m^2 + 2m + 3)$ ， $m > 0$ ，

过 P 作 $PH \perp x$ 轴于 H ，则 $PH = -m^2 + 2m + 3$ ， $OH = m$ ， $\angle OHP = 90^\circ$ ，



$$\therefore \angle POA = \angle ACB,$$

$$\therefore \tan \angle POA = \tan \angle ACB = 3,$$

$$\therefore \frac{PH}{OH} = \frac{-m^2 + 2m + 3}{m} = 3,$$

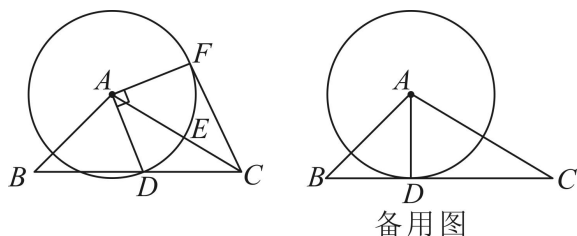
$$\text{解得 } m_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \quad m_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \text{ (舍去)},$$

$$\text{又 } -m^2 + 2m + 3 = -\left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right) + 3 = \frac{-3 + 3\sqrt{13}}{2},$$

$$\therefore \text{满足条件的点 } P \text{ 坐标为 } \left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{-3 + 3\sqrt{13}}{2}\right).$$

【点睛】本题属于二次函数综合题，考查了待定系数法求函数解析式、解直角三角形、勾股定理的逆定理、两点坐标距离公式、解一元二次方程等知识，解题的关键是理解题意，学会用数形结合和方程思想解决问题，是中考压轴题型。

25. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = \sqrt{2}$ ， $BC = 3$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，点 D 在 BC 上，连接 AD ，以点 A 为圆心、以 AD 为半径作圆 A ，圆 A 和边 AC 交于点 E ，点 F 在圆 A 上，且 $AF \perp AD$ 。



- (1) 设 $BD = x$ ， $AF = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式；并写出 AC 的长；
- (2) 如果点 E 是弧 DF 的中点，求 $BD:CD$ 的值；
- (3) 连接 CF ，如果四边形 $ADCF$ 是梯形，求 BD 的长。

在 $\text{Rt}\triangle DCQ$ 中, $\tan \angle DCQ = \frac{DQ}{CQ}$,

在 $\text{Rt}\triangle AHC$ 中, $\tan \angle ACH = \frac{AH}{CH} = \frac{1}{2}$,

$\therefore \angle DCQ = \angle ACH$,

$$\therefore \frac{DQ}{CQ} = \frac{1}{2},$$

设 $DQ = k$, 则 $CQ = 2k$, $AQ = k$,

$$\therefore AC = 3k = \sqrt{5},$$

$$\text{解得: } k = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore DQ = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad CQ = \frac{2\sqrt{5}}{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle DCQ$ 中, $CD = \sqrt{DQ^2 + CQ^2} = \frac{5}{3}$,

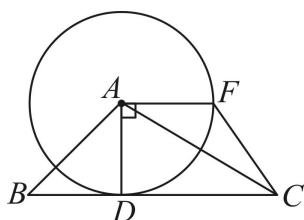
$$\therefore BD = BC - CD = \frac{4}{3},$$

$$\therefore BD : CD = 4 : 5;$$

【小问 3 详解】

解: 如果四边形 $ADCF$ 是梯形, 有两种情况:

当 $AF \parallel DC$ 时, 如图,

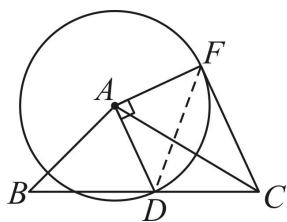


$$\therefore AF \perp AD,$$

$$\therefore AD \perp BC,$$

$\therefore D$ 和 (1) 图中的 H 重合, 则 $BD = BH = 1$;

当 $AD \parallel FC$ 时, 连接 DF , 如图,



$$\because AF = AD, AF \perp AD,$$

$$\therefore \angle CFD = \angle ADF = \angle AFD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle CFD, DF = \frac{AD}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}AD,$$

$$\because \angle ADC = \angle B + \angle BAD = \angle ADF + \angle FDC,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle FDC,$$

$$\therefore \triangle BAD \sim \triangle FDC,$$

$$\therefore \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{DF}, \text{ 又 } AB = \sqrt{2},$$

$$\therefore AD^2 = DC = BC - BD,$$

$$\therefore \left(\sqrt{x^2 - 2x + 2}\right)^2 = 3 - x, \text{ 即 } x^2 - x - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (负值舍去),}$$

$$\therefore BD = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

综上, 当四边形 $ADCF$ 是梯形时, BD 的长为 1 或 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

【点睛】 本题是圆的综合题, 涉及锐角三角函数、勾股定理、垂径定理的推论、直角三角形斜边中线性质的判定与性质、三角形的外角性质、解一元二次方程、梯形性质等知识, 综合性较强, 解答本题熟练掌握相关知识的联系与运用, 对学生的综合能力要求较高, 一定要注意将所学知识贯穿起来.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>)
致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群
出品的《老师请开讲》私享直播课等
增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>)
是学科网旗下智能题库，拥有小初高全
学科超千万精品试题，提供智能组卷、
拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能