

2021 年上海市杨浦区中考数学三模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上]

1. 在下列四个实数中，最小的数是（ ）

A. -2

B. $\frac{1}{3}$

C. 0

D. $\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】正实数都大于 0，负实数都小于 0，正实数大于一切负实数，两个负实数绝对值大的反而小，据此判断即可.

【详解】解：根据实数大小比较的方法，可得 $-2 < 0 < \frac{1}{3} < \sqrt{3}$,

所以四个实数中，最小的数是-2.

故选：A.

【点睛】此题主要考查了实数大小比较的方法，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：正实数 $> 0 >$ 负实数，两个负实数绝对值大的反而小.

2. 在下列二次根式中，与 $\sqrt{a}$ 是同类二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{2a}$

B. $\sqrt{3a^2}$

C. $\sqrt{a^3}$

D. $\sqrt{a^4}$

【答案】C

【解析】

【分析】先将各选项化简，再找到被开方数为 a 的选项即可.

【详解】解：A、 $\sqrt{2}a$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式；

B、 $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3}|a|$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式；

C、 $\sqrt{a^3} = |a|\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数相同，故是同类二次根式；

D、 $\sqrt{a^4} = a^2$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了同类二次根式的定义，即：化成最简二次根式后，被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式.

3. 将抛物线 $y = x^2$ 向左平移 2 个单位后, 所得新抛物线的解析式是 ()

- A. $y = x^2 - 2$ B. $y = x^2 + 2$ C. $y = (x - 2)^2$ D. $y = (x + 2)^2$

【答案】D

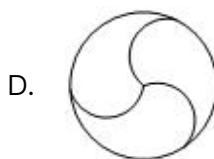
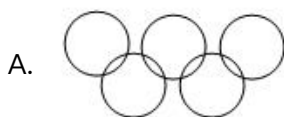
【解析】

【分析】根据平移的规律: 左加右减, 求出得到的抛物线的解析式即可.

【详解】解: 由“左加右减”的原则可知, 将抛物线 $y = x^2$ 向左平移 2 个单位, 所得抛物线的解析式为: $y = (x + 2)^2$,
故选: D.

【点睛】此题主要考查了函数图象的平移, 要求熟练掌握平移的规律: 左加右减, 上加下减. 并用规律求函数解析式.

4. 下列图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的概念判断即可.

【详解】解: A、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故此选项不符合题意;
B、是轴对称图形也是中心对称图形, 故此选项符合题意;
C、不是轴对称图形, 是中心对称图形. 故此选项不符合题意;
D、不是轴对称图形, 也不是中心对称图形, 故此选项不符合题意.
故选: B.

【点睛】本题主要考查轴对称图形与中心对称图形的概念问题. 如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合, 这样的图形叫做轴对称图形, 这条直线叫做对称轴.

如果一个图形绕某一点旋转 180° 后能够与自身重合, 那么这个图形就叫做中心对称图形, 这个点叫做对称中心. 结合概念正确判断图形是解题关键.

5. 在平面直角坐标系中, 以点 $A(2,1)$ 为圆心, 1 为半径的圆与 x 轴的位置关系是 ()

- A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 不确定

【答案】B

【解析】

【分析】先求出圆心到 x 轴的距离, 再根据半径比较, 若圆心到 x 轴的距离大于圆心距, x 轴与圆相离; 小于圆心距, x 轴与圆相交; 等于圆心距, x 轴与圆相切.

【详解】解: $\because$ 点 $A(2, 1)$ 到 x 轴的距离为 1, 圆的半径=1,

$\therefore$ 点 $A(2, 1)$ 到 x 轴的距离=圆的半径,

$\therefore$ 圆与 x 轴相切;

故选: B.

【点睛】此题考查的是圆与直线的关系, 即圆心到直线的距离大于圆心距, 直线与圆相离; 小于圆心距, 直线与圆相交; 等于圆心距, 则直线与圆相切.

6. 已知在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 添加下列一个条件后, 一定能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是 ()

- A. $AD = BC$ B. $AC = BD$ C. $\angle A = \angle C$ D. $\angle A = \angle B$

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定进行判断即可.

【详解】解: A、B. $\because$ 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$,

$\therefore AD = BC$ 或 $AC = BD$, 都不能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 故 A、B 错误;

C. $\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ$,

$\because \angle A = \angle C$,

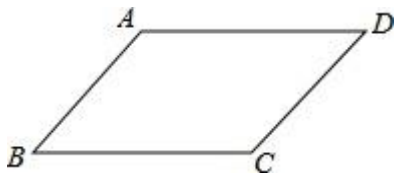
$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 故 C 正确.

D. 当 $\angle A = \angle B$ 时, 无法判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 故 D 错误.

故选: C.



【点睛】 本题主要考查了平行四边形的判定，解题的关键是熟练掌握平行四边形的判定方法，是解题的关键.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 当 $x < 1$ 时，化简： $|x-1| =$ _____.

【答案】 $1-x$

【解析】

【分析】 正数的绝对值等于它本身，负数的绝对值等于它的相反数，0 的绝对值是 0.

【详解】 解： $\because x < 1$,

$$\therefore x-1 < 0,$$

$$\therefore \text{原式} = -(x-1)$$

$$= 1-x$$

故答案为： $1-x$.

【点睛】 本题考查了绝对值的性质，判断出 $x-1$ 是负数是解题的关键.

8. 计算： $(2a+b)(2a-b) =$ _____.

【答案】 $4a^2 - b^2$

【解析】

【分析】 根据平方差公式，即可解答.

【详解】 解： $(2a+b)(2a-b) = 4a^2 - b^2$,

故答案为： $4a^2 - b^2$.

【点睛】 本题主要考查平方差公式，解决本题的关键是熟记平方差公式.

9. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x-6}$ ，那么 $f(10) =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 根据已知直接将 $x=10$ 代入求出答案.

【详解】 解： $\because f(x) = \sqrt{x-6}$,

$$\therefore f(10) = \sqrt{10-6} = 2,$$

故答案为：2.

【点睛】此题主要考查了函数值，正确将已知数据代入是解题关键.

10. 正八边形的中心角等于_____度

【答案】45

【解析】

【分析】已知该多边形为正八边形，代入中心角公式即可得出 $\frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

【详解】 $\because$ 该多边形为正八边形，故 $n=8$

$$\therefore \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

故答案为：45.

【点睛】本题考查了正多边形的中心角，把一个圆分成 n (n 是大于 2 的自然数) 等份，依次连接各分点所得的多边形是这个圆的内接正多边形，这个圆叫做这个正多边形的外接圆. 正多边形每一边所对的圆心角叫做正多边形的中心角，正 n 边形的每个中心角都等于 $\frac{360^\circ}{n}$.

11. 已知一斜坡的坡比为 1: 2，坡角为 α ，那么 $\sin \alpha =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】坡比 = 坡角的正切值，设竖直直角边为 x ，水平直角边为 $2x$ ，由勾股定理求出斜边，进而可求出 α 的正弦值.

【详解】解：如图所示：

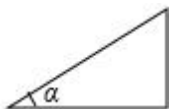
由题意，得： $\tan \alpha = i = \frac{1}{2}$,

设竖直直角边为 x ，水平直角边为 $2x$ ，

$$\text{则斜边} = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{5}x,$$

$$\text{则} \sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{5}x} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故答案为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.



【点睛】此题主要考查坡比、坡角的关系以及勾股定理；熟记坡角的正切等于坡比是解决问题的关键.

12. 已知一组数据 24、27、19、13、23、12，那么这组数据中的中位数是_____.

【答案】 21

【解析】

【分析】求中位数要把数据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数或两个数的平均数为中位数.

【详解】解：将这组数据从小到大的顺序排列：12、13、19、23、24、27，处于中间位置的两个数是 19，23，那么由中位数的定义可知，这组数据的中位数是 $(19+23) \div 2 = 21$.

故答案为：21.

【点睛】本题为统计题，考查中位数的意义. 中位数是将一组数据从小到大（或从大到小）重新排列后，最中间的那个数（或最中间两个数的平均数），叫做这组数据的中位数.

13. 在 “Wishyousuccess” 中，任选一个字母，这个字母为 “s” 的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{7}$

【解析】

【分析】根据概率公式进行计算即可.

【详解】解：任选一个字母，这个字母为 “s” 的概率为： $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$,

故答案为： $\frac{2}{7}$.

【点睛】本题考查了概率，如果一个事件有 n 种可能，而且这些事件的可能性相同，其中事件 A 出现 m 种结果，那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

14. 已知直线 $y = kx + b$ 在 y 轴上的截距为 3，且经过点 $(1, 4)$ ，那么这条直线的表达式为_____.

【答案】 $y = x + 3$

【解析】

【分析】根据“在 y 轴上的截距为 3”计算求出 b 值，然后代入点 $(1, 4)$ 即可得解.

【详解】解： $\because$ 直线 $y = kx + b$ 在 y 轴上的截距为 3，

$$\therefore b = 3,$$

$$\therefore y = kx + 3,$$

$$\because \text{经过点 } (1, 4),$$

$$\therefore 4=k+3,$$

$$\therefore k=1,$$

$\therefore$ 这条直线的解析式是 $y=x+3$.

故答案是: $y=x+3$.

【点睛】 本题考查了待定系数法求一次函数解析式, 一次函数图象上点的坐标特征, 熟练掌握待定系数法是解题的关键.

15. 用换元法解方程 $\frac{x-1}{x^2} + \frac{x^2}{x-1} + 2 = 0$ 时, 如果设 $\frac{x-1}{x^2} = y$, 那么原方程可化为关于 y 的整式方程为

_____.

【答案】 $y^2+2y+1=0$

【解析】

【分析】 换元法即是整体思想的考查, 解题的关键是找到这个整体, 此题的整体是 $\frac{x-1}{x^2}$, 设 $\frac{x-1}{x^2} = y$, 换元后整理即可求得.

【详解】 解: $\because \frac{x-1}{x^2} = y$,

$$\therefore y + \frac{1}{y} + 2 = 0,$$

整理得: $y^2+2y+1=0$.

故答案为: $y^2+2y+1=0$.

【点睛】 本题考查了换元法解分式方程, 用换元法解一些复杂的分式方程是比较简单的一种方法, 根据方程特点设出相应未知数, 解方程能够使问题简单化.

16. 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, 且 $BD=2DC$. 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{AD}$ 等于

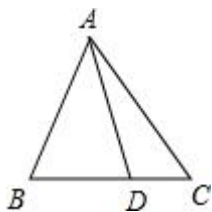
_____ (结果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示);

【答案】 $\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$;

【解析】

【分析】 首先根据题意画出图形, 由 $BD=2DC$, 可求得 $\overrightarrow{BD}$, 再利用三角形法则求解即可求得答案

【详解】 解: 如图, $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\vec{b}$, $BD=2DC$,



$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b},$$

故答案为 $\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

【点睛】此题考查了平面向量的知识，注意掌握三角形法则的应用是解此题的关键.

17. 我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一副“弦图”，后人称其为“赵爽弦图”（如图1）. 图2由弦图变化得到，它是由八个全等的直角三角形拼接而成. 记图中正方形 $ABCD$ 、正方形 $EFGH$ 、正方形 $MNKT$ 的面积分别为 S_1 、 S_2 、 S_3 ，如果 $S_1 + S_2 + S_3 = 48$ ，那么 S_2 的值是_____.

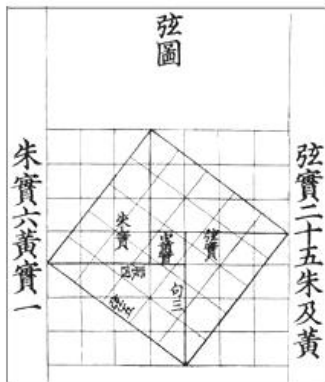


图1

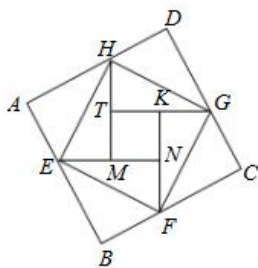


图2

【答案】16

【解析】

【分析】根据正方形的面积和勾股定理即可求解.

【详解】解：设全等的直角三角形的两条直角边为 a 、 b 且 $a > b$,

由题意可知： $S_1 = (a+b)^2$, $S_2 = a^2 + b^2$, $S_3 = (a-b)^2$,

因为 $S_1 + S_2 + S_3 = 48$,

即 $(a+b)^2 + a^2 + b^2 + (a-b)^2 = 48$,

$\therefore 3(a^2 + b^2) = 48$,

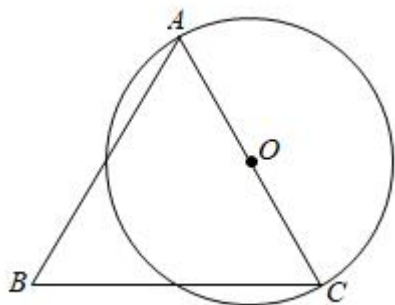
$\therefore 3S_2 = 48$,

$\therefore S_2$ 的值是 16.

故答案为 16.

【点睛】 本题考查了勾股定理，正方形的面积，解决本题的关键是随着正方形的边长的变化表示面积.

18. 如图，已知在等边 $\triangle ABC$ 中， $AB=4$ ，点 P 在边 BC 上，如果以线段 PB 为半径的 $\odot P$ 与以边 AC 为直径的 $\odot O$ 外切，那么 $\odot P$ 的半径长是_____.

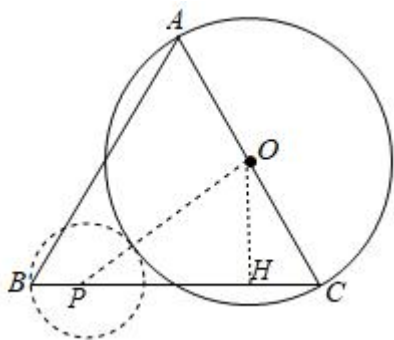


【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】 由等边三角形的性质和直角三角形的性质可求 CH ， OH ，由勾股定理可求解.

【详解】 解：如图，连接 OP ，过点 O 作 $OH \perp BC$ 于 H ，



在等边 $\triangle ABC$ 中， $AB=4$ ，

$\therefore AC=BC=AB=4$ ， $\angle ACB=60^\circ$ ，

$\therefore$ 点 O 是 AC 的中点，

$\therefore AO=OC=2$ ，

$\therefore$ 以线段 PB 为半径的 $\odot P$ 与以边 AC 为直径的 $\odot O$ 外切，

$\therefore PO=2+BP$ ，

$\therefore OH \perp BC$ ，

$\therefore \angle COH=30^\circ$ ，

$\therefore HC=1$ ， $OH=\sqrt{3}$ ，

$\therefore OP^2=OH^2+PH^2$ ，

$$\therefore (2+BP)^2 = (\sqrt{3})^2 + (4-1-BP)^2$$

$$\therefore BP = \frac{4}{5},$$

故答案为 $\frac{4}{5}$.

【点睛】 本题主要考查圆与圆的位置关系、等边三角形性质以及勾股定理得应用，利用勾股定理列出关于 BP 的方程是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 先化简, 再求值: $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x-1} \div \frac{x+2}{x^2-2x+1}$, 其中 $x = \sqrt{3}$.

【答案】 $\frac{1}{x+2}, 2-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据分式的运算法则进行化简, 然后将 x 的值代入原式即可求出答案.

【详解】 解: $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x-1} \div \frac{x+2}{x^2-2x+1}$

$$= \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{x+2}$$

$$= \frac{x}{x+2} - \frac{x-1}{x+2}$$

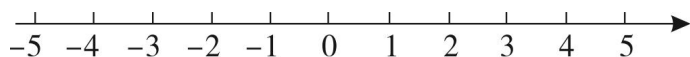
$$= \frac{1}{x+2}$$

当 $x = \sqrt{3}$ 时,

$$\text{原式} = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = 2-\sqrt{3}.$$

【点睛】 本题考查分式的运算, 二次根式的除法, 解题的关键是熟练运用运算法则, 本题属于基础题型.

20. 解不等式组: $\begin{cases} 3(x+2) > x-2 \\ x-\frac{2}{3} \leq \frac{1+x}{2} \end{cases}$ 并将解集在数轴上表示出来.



【答案】 $-4 < x \leq \frac{7}{3}$, 数轴表示见解析

【解析】

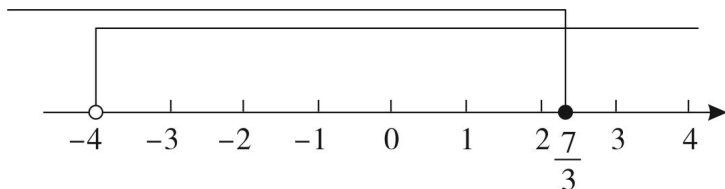
【分析】 分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

【详解】解：解不等式 $3(x+2) > x-2$ ，得： $x > -4$ ，

解不等式 $x - \frac{2}{3} \leq \frac{1+x}{2}$ ，得： $x \leq \frac{7}{3}$ ，

则不等式组的解集为 $-4 < x \leq \frac{7}{3}$ ，

将不等式组的解集表示在数轴上如下：

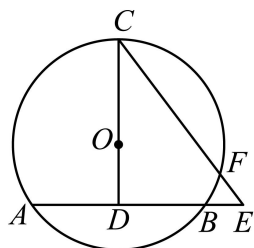


【点睛】本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

21. 如图，已知在 $\odot O$ 中， $OD \perp AB$ ，垂足为点 D ， DO 的延长线与 $\odot O$ 相交于点 C ，点 E 在弦 AB 的延长线上， CE 与 $\odot O$ 相交于点 F ， $AB = CD = 8$ ， $\tan C = 1$

(1) 求 $\odot O$ 的半径长；

(2) 求 $\frac{CF}{EF}$ 的值.



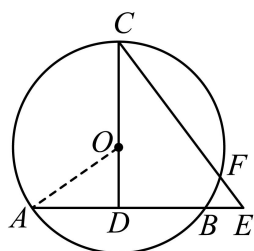
【答案】(1) 5；(2) $\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】(1) 连接 OA ，设半径为 r ，利用垂径定理结合勾股定理即可求出 r ；

(2) 延长 CD 交 $\odot O$ 于点 Q ，连接 QF ，利用圆周角定理以及已知条件求出 CE 和 CF 的长即可计算 $\frac{CF}{EF}$ 的值.

【详解】解：(1) 连接 OA ，如图所示：



设 $\odot O$ 半径为 r ，则由题意可知： $OA = OC = r$ ， $OD = CD - OC = 8 - r$ ，

又 $\because OD \perp AB$ ，垂足为点 D ，

$$\therefore AD = \frac{1}{2} \times AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

在 $Rt\triangle AOD$ 中， $AO^2 = OD^2 + AD^2$ ，

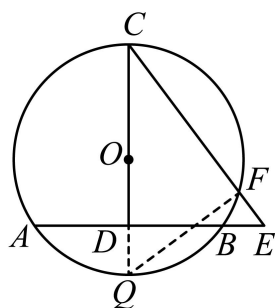
$$\text{即 } r^2 = 4^2 + (8 - r)^2,$$

解得： $r = 5$ ，

$\therefore \odot O$ 的半径长为5；

(2) 延长 CD 交 $\odot O$ 于点 Q ，连接 QF ，则 $\angle CFQ = 90^\circ$ ，

由(1)可知 $CQ = 10$ ，



$$\therefore \tan C = 1,$$

$$\therefore \angle C = 45^\circ,$$

在 $Rt\triangle CAF$ 中： $QC^2 = CF^2 + QF^2$ ，

而 $CQ = CF$ ， $CQ = 10$ ，

$$\therefore CF = 5\sqrt{2},$$

在 $Rt\triangle CDE$ 中， $\angle C = \angle E = 45^\circ$ ，

$$CE = \frac{CD}{\sin 45^\circ} = \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 8\sqrt{2},$$

$$\therefore EF = CE - CF = 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 3\sqrt{2},$$

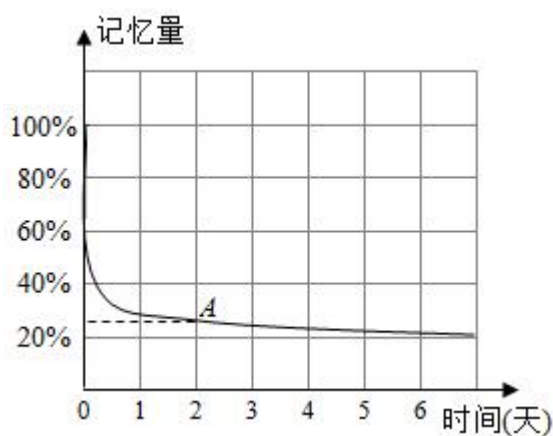
$$\therefore \frac{CF}{EF} = \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{5}{3}.$$

【点睛】 本题考查了圆的垂径定理,勾股定理,特殊角的三角函数值,熟练掌握垂径定理,灵活运用勾股定理,特殊角的三角函数值是解题的关键.

22. 阅读下列有关记忆的资料，分析保持记忆的措施和方法．资料：德国心理学家艾宾浩斯对人的记忆进

行了研究，他采用无意义的音节作为记忆的材料进行实验，获得了如下表中的相关数据，然后他又根据表中的数据绘制了一条曲线，这就是著名的艾宾浩斯遗忘曲线。其中横轴表示时间，纵轴表示学习中的记忆量。

时间	记忆量
刚记忆完	100%
20 分钟后	58.2%
1 小时后	44.2%
9 小时后	35.8%
1 天后	33.7%
2 天后	27.8%
6 天后	25.4%
30 天后	21.1%



观察表格和图像，回答下列问题：

- (1) 图中点 A 的坐标表示的实际意义是_____；
- (2) 在下面哪个时间段内遗忘的速度最快 ()
A. 0—20 分钟； B. 20 分钟—1 小时 C. 1 小时—9 小时； D. 1 天—2 天.
- (3) 王老师每节数学课最后五分钟都会对本节课进行回顾总结，并要求学生每天晚上对当天课堂上所学的知识进行复习。据调查这样一天后记忆量能保持 98%。如果小明同学一天没有复习，那么记忆量大约会比复习过的记忆量减少多少？由此对你的学习有什么启示？

【答案】(1) 2 天大约记忆量保持了 27.8%；(2) A ；(3) 减少约 66.3%；①每天上午、下午、晚上各复习

10 分钟；②坚持每天复习，劳逸结合（答案不唯一）.

【解析】

【分析】 (1) 依据图象中点的坐标，即可得到 A 点表示的意义；

(2) 根据图象判断即可；

(3) 依据函数图象，可得如果一天不复习，记忆量只能保持 33.7% 左右.

【详解】 解：(1) 由题可得，点 A 表示：2 天大约记忆量保持了 27.8%；

故答案为：2 天大约记忆量保持了 27.8%

(2) 由图可得，0-20 分钟 内记忆保持量下降 41.8%，故 0-20 分钟内内遗忘的速度最快，
故选：A；

(3) 如果一天不复习，记忆量只能保持 33.7%，记忆量减少约 66.3%；

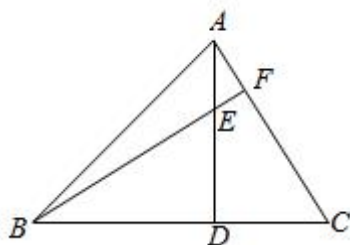
学习计划两条：①每天上午、下午、晚上各复习 10 分钟；②坚持每天复习，劳逸结合（答案不唯一）.

【点睛】 本题考查了函数图象，观察函数图象获得有效信息是解题关键.

23. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ ，垂足为点 D ， $AD = BD$ ，点 E 为边 AD 上一点，且 $DE = DC$ ，连接 BE 并延长，交边 AC 于点 F .

(1) 求证： $BF \perp AC$ ；

(2) 过点 A 作 BC 的平行线交 BF 的延长线于点 G ，连接 CG . 如果 $DE^2 = AE \cdot AD$ ，求证：四边形 $ADCG$ 是矩形.



【答案】 (1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 先证明 $\triangle BDE$ 和 $\triangle ADC$ 全等得出 $\angle EBD = \angle CAD$ ，再证 $\triangle BED \sim \triangle AEF$ ，即可得证；

(2) 先证 $\triangle AEG \sim \triangle DCA$ ，得出 $DC = AG$ ，证明出四边形 $ADCG$ 是平行四边形，再证一个角是直角即可得证.

【详解】 证明：(1) $\because AD \perp BC$,

$$\therefore \angle ADC = \angle BDE = 90^\circ,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BED$ 中，

$$\begin{cases} AD = BD \\ \angle ADC = \angle BDE, \\ DC = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BED \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle EBD = \angle CAD,$$

$$\text{又} \because \angle BED = \angle AEF,$$

$$\therefore \triangle BED \sim \triangle AEF,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle EDB = 90^\circ,$$

即 $BF \perp AC$;

$$(2): \because AG \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AGE = \angle EBD,$$

由 (1) 知 $\angle EBD = \angle CAD$,

$$\therefore \angle AGE = \angle CAD,$$

$$\text{又} \because \angle AEG = \angle BED = \angle ACD,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle DCA,$$

$$\therefore \frac{AE}{DC} = \frac{AG}{DA},$$

$$\therefore AE \cdot AD = DC \cdot AG,$$

$$\because DE^2 = AE \cdot AD, \quad DE = DC,$$

$$\therefore DC \cdot AG = DE^2 = DC^2,$$

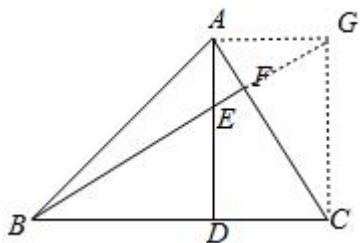
$$\therefore DC = AG,$$

$$\text{又} \because AG \parallel DC,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCG$ 是平行四边形,

$$\because AD \perp BC,$$

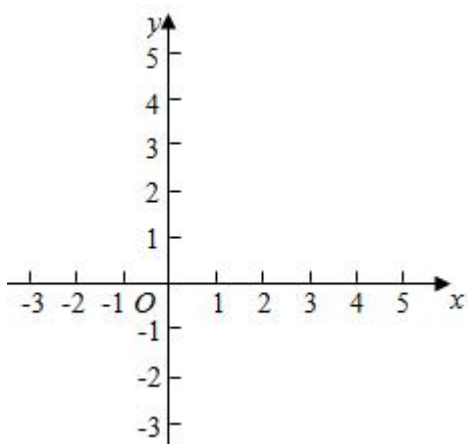
$\therefore$ 四边形 $ADCG$ 是矩形 (有一个角是直角的平行四边形是矩形).



【点睛】 本题主要考查了直角三角形的性质、相似三角形的判定与性质、矩形的判定与性质等知识点，关

键在于利用直角三角形的性质证明出角相等，再证明出三角形相似，用相似的性质证明出结论.

24. 如图，已知在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 $C(0, 2)$.



- (1) 求这条抛物线的表达式；
- (2) 如果将抛物线向下平移 m 个单位，使平移后的抛物线的顶点恰好落在线段 BC 上，求 m 的值；
- (3) 如果点 P 是抛物线位于第一象限上的点，联结 PA ，交线段 BC 于点 E ，当 $PE:AE = 4:5$ 时，求点 P 的坐标.

【答案】 (1) 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ ； (2) $m = \frac{15}{8}$ ； (3) 点 $P(2, 3)$

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法可求解析式；

(2) 求出平移前后的顶点坐标，即可求解；

(3) 通过证明 $\triangle AEF \sim \triangle APH$ ，可证 $\frac{AE}{AP} = \frac{AF}{AH} = \frac{EF}{PH} = \frac{5}{9}$ ，即可求解.

【详解】 解：(1) $\because y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ，与 y 轴交于点 $C(0, 2)$.

$$\therefore \begin{cases} c = 2 \\ 0 = -\frac{1}{2} - b + c \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ c = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ ；

$$(2) \because y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{8},$$

$$\therefore \text{顶点坐标为} \left(\frac{3}{2}, \frac{25}{8} \right),$$

$$\because y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \text{ 与 } x \text{ 轴交于点 } A, \text{ 点 } B,$$

$$\therefore 0 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2,$$

$$\therefore x_1 = -1, \quad x_2 = 4,$$

$$\therefore \text{点 } B(4, 0),$$

设直线 BC 解析式为 $y = kx + n$,

$$\begin{cases} n = 2 \\ 0 = 4k + n \end{cases},$$

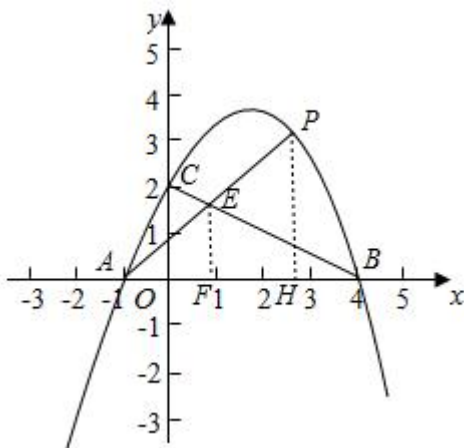
$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + 2,$$

$$\text{当 } x = \frac{3}{2} \text{ 时, } y = \frac{5}{4},$$

$$\therefore m = \frac{25}{8} - \frac{5}{4} = \frac{15}{8};$$

(3) 如图, 过点 E 作 $EF \perp AB$ 于 F , 过点 P 作 $PH \perp AB$ 于 H ,



$$\therefore EF \parallel PH,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle APH,$$

$$\therefore \frac{AE}{AP} = \frac{AF}{AH} = \frac{EF}{PH},$$

$$\therefore PE : AE = 4 : 5,$$

$$\therefore \frac{AE}{AP} = \frac{AF}{AH} = \frac{EF}{PH} = \frac{5}{9},$$

$$\therefore AF = 5x, \quad AH = 9x,$$

$$\therefore OF = 5x - 1, \quad OH = 9x - 1,$$

$$\therefore \text{点 } P\left(9x-1, -\frac{1}{2}(5x-1)+2\right), \text{ 点 } E\left(5x-1, -\frac{1}{2}(9x-1)^2 + \frac{3}{2}(9x-1)+2\right),$$

$$\therefore EF = -\frac{1}{2}(5x-1)+2, \quad PH = -\frac{1}{2}(9x-1)^2 + \frac{3}{2}(9x-1)+2,$$

$$\therefore \frac{-\frac{1}{2}(5x-1)+2}{-\frac{1}{2}(9x-1)^2 + \frac{3}{2}(9x-1)+2} = \frac{5}{9},$$

$$\therefore x = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{点 } P(2, 3).$$

【点睛】本题是二次函数综合题，考查了待定系数法求解析式，平移的性质，相似三角形的判定和性质，灵活运用这些性质解决问题是本题的关键。

25. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 8$ ， $\cos B = \frac{4}{5}$ ，点 D 是边 BC 上一点，过点 D 作 $DE \perp AB$ ，垂足为点 E ，点 F 是边 AC 上一点，联结 DF 、 EF ，以 DF 、 EF 为邻边作平行四边形 $EFDG$ 。

点 E ，点 F 是边 AC 上一点，联结 DF 、 EF ，以 DF 、 EF 为邻边作平行四边形 $EFDG$ 。

(1) 如图1，如果 $CD = 2$ ，点 G 恰好在边 BC 上，求 $\angle CDF$ 的余切值；

(2) 如图2，如果 $AF = AE$ ，点 G 在 $\triangle ABC$ 内，求线段 CD 的取值范围；

(3) 在第(2)小题的条件下，如果平行四边形 $EFDG$ 是矩形，求线段 CD 的长。

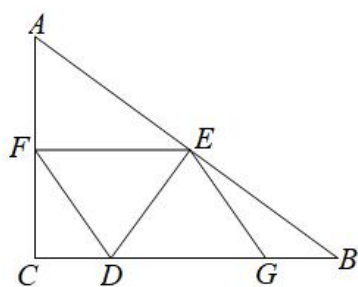


图1

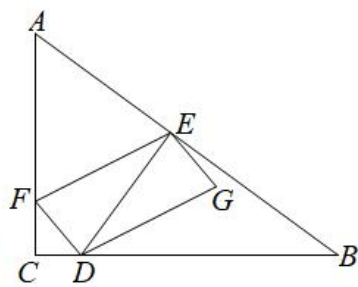
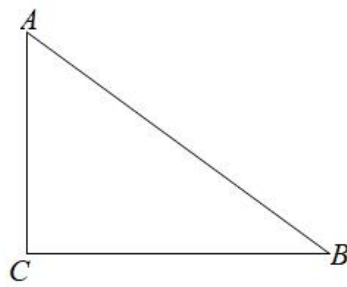


图2



备用图

【答案】(1) $\frac{25}{36}$; (2) $0 \leq CD < \frac{48}{31}$; (3) $\frac{6}{7}$

【解析】

【分析】(1) 由锐角三角函数的定义求出 $BC = 8$ ，由勾股定理求出 $AC = 6$ ，由平行线分线段成比例定理得出 $\frac{BE}{AB} = \frac{CF}{AC}$ ，求出 CF ，则可得出答案；

(2) 当点 G 恰好在 AB 上时，解直角三角形求出 CD 的长，则可得出答案；

(3) 设 $CD = x$, 则 $BE = \frac{4}{5}(8 - x)$, 设矩形 $EFDG$ 的对角线 FG 与 DE 相交于点 O , 连接 OA , 证明 $\triangle AFO \cong \triangle AEO$ (SSS), 由全等三角形的性质得出 $\angle AFO = \angle AEO = 90^\circ$, 过点 E 作 $EH \perp AC$ 于点 H , 由梯形的中位线定理得出 $EH + CD = 2OF = DE$, 解方程 $\frac{4}{5}[10 - \frac{4}{5}(8 - x)] + x = \frac{3}{5}(8 - x)$ 可得出答案.

【详解】解: (1) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$,

又 $BC = 8$,

$\therefore AB = 10$,

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$,

$\therefore DE \perp AB$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle BDE$ 中,

$$\cos B = \frac{BE}{BD} = \frac{4}{5},$$

又 $CD = 2$, $BD = 6$,

$$\therefore BE = \frac{24}{5},$$

$\therefore$ 四边形 $EFDG$ 是平行四边形,

$\therefore EF \parallel DG$,

$\therefore$ 点 G 在 BC 上,

$\therefore EF \parallel BC$,

$$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{CF}{AC},$$

$$\therefore \frac{\frac{24}{5}}{10} = \frac{CF}{6},$$

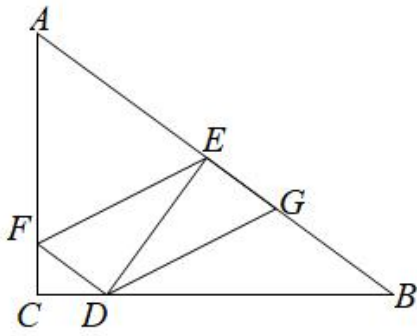
$$\therefore CF = \frac{72}{25},$$

$$\text{在 } Rt\triangle CFD \text{ 中, } \cos \angle CDF = \frac{CD}{CF} = \frac{2}{\frac{72}{25}} = \frac{25}{36};$$

(2) $\therefore$ 四边形 $EFDG$ 是平行四边形,

$\therefore DF \parallel EG$,

当点 G 恰好在 AB 上时,



$$\therefore DF \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{CF}{CA} = \frac{CD}{CB},$$

$$\text{设 } CD = x, \text{ 则 } \frac{CF}{6} = \frac{x}{8},$$

$$\therefore CF = \frac{3}{4}x,$$

$$\text{在 } Rt\triangle BDE \text{ 中, } \cos B = \frac{BE}{BD} = \frac{4}{5},$$

$$\text{又 } CD = x, \text{ 则 } BD = 8 - x,$$

$$\therefore BE = \frac{4}{5}(8 - x),$$

$$\because AE = AF,$$

$$\therefore 6 - \frac{3}{4}x = 10 - \frac{4}{5}(8 - x),$$

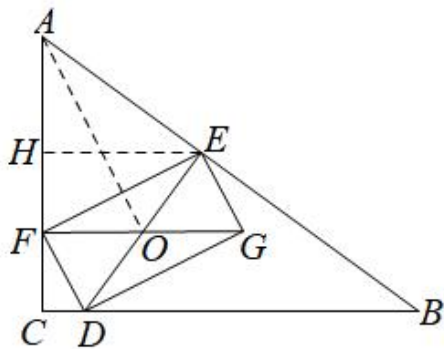
$$\therefore x = \frac{48}{31},$$

$$\text{当点 } G \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 内时, } 0 \leq CD < \frac{48}{31};$$

$$(3) \text{ 设 } CD = x, \text{ 则 } BE = \frac{4}{5}(8 - x),$$

$$\therefore AE = 10 - \frac{4}{5}(8 - x),$$

设矩形 $EFDG$ 的对角线 FG 与 DE 相交于点 O , 连接 OA ,



$\therefore$ 平行四边形 $EFDG$ 是矩形,

$$\therefore OF = OE = \frac{1}{2} DE,$$

$$\because AF = AE, \quad OA = OA,$$

$$\therefore \triangle AFO \cong \triangle AEO \quad (SSS),$$

$$\therefore \angle AFO = \angle AEO = 90^\circ,$$

过点 E 作 $EH \perp AC$ 于点 H ,

$$\text{又 } \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore EH \parallel HF \parallel CB,$$

$$\because OD = OE,$$

$$\therefore CF = HF,$$

$$\therefore EH + CD = 2OF = DE,$$

$$\because DE = \frac{3}{5} (8 - x), \quad EH = \frac{4}{5} \left[10 - \frac{4}{5} (8 - x) \right],$$

$$\therefore \frac{4}{5} \left[10 - \frac{4}{5} (8 - x) \right] + x = \frac{3}{5} (8 - x),$$

$$\therefore x = \frac{6}{7},$$

$$\therefore CD = \frac{6}{7}.$$

【点睛】 本题属于四边形综合题，考查了平行四边形的性质，矩形的性质，相似三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，直角三角形的性质，解直角三角形等知识，解题的关键是熟练掌握全等三角形的判定与性质及相似三角形的判定与性质，学会利用参数构建方程解决问题，属于中考压轴题。

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>) 致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群出品的《老师请开讲》私享直播课等增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>) 是学科网旗下智能题库，拥有小初高全学科超千万精品试题，提供智能组卷、拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能