

2021 年上海市奉贤区中考数学三模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. 点 A 是数轴上的任意一点，则下列说法正确的是（ ）

- A. 点 A 表示的数一定是整数
- B. 点 A 表示的数一定是分数
- C. 点 A 表示的数一定是有理数
- D. 点 A 表示的数可能是无理数

【答案】D

【解析】

【分析】根据数轴上的点与实数一一对应，可得答案.

【详解】数轴上的点与实数一一对应，故 A 错误；

数轴上的点与实数一一对应，故 B 错误；

根据互为相反数的两个数的绝对值相等，故 C 错误；

数轴上的点与实数一一对应，所以点 A 有可能是无理数，故 D 正确；

故选 D.

2. 在下列二次根式中，与 $\sqrt{a}$ 是同类二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{2}a$
- B. $\sqrt{3a^2}$
- C. $\sqrt{a^3}$
- D. $\sqrt{a^4}$

【答案】C

【解析】

【分析】先将各选项化简，再找到被开方数为 a 的选项即可.

【详解】解：A、 $\sqrt{2}a$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式；

B、 $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3}|a|$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式；

C、 $\sqrt{a^3} = |a|\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数相同，故是同类二次根式；

D、 $\sqrt{a^4} = a^2$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了同类二次根式的定义，即：化成最简二次根式后，被开方数相同的二次根式叫做

同类二次根式.

3. 下列各式中, 当 $m < 2$ 时一定有意义的是 ()

A. $\frac{1}{m-3}$

B. $\frac{1}{m-1}$

C. $\frac{1}{m+1}$

D. $\frac{1}{m+3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据分式有意义的条件是分母不等于 0 判断即可.

【详解】解: A. 当 $m < 2$ 时, $m - 3 < -1$, 故分式 $\frac{1}{m-3}$ 一定有意义, 故本选项符合题意;

B. $m < 2$, 当 $m = 1$ 时, 分式 $\frac{1}{m-1}$ 没有意义, 故本选项不符合题意;

C. $m < 2$, 当 $m = -1$ 时, 分式 $\frac{1}{m+1}$ 没有意义, 故本选项不符合题意;

D. $m < 2$, 当 $m = -3$ 时, 分式 $\frac{1}{m+3}$ 没有意义, 故本选项不符合题意;

故选: A.

【点睛】本题主要考查的是分式有意义的条件, 即分母不等于 0.

4. 下列图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解即可.

【详解】解: A、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故此选项错误, 不符合题意;

B、是轴对称图形也是中心对称图形, 故此选项正确, 符合题意;

C、不是轴对称图形, 是中心对称图形. 故此选项错误, 不符合题意;

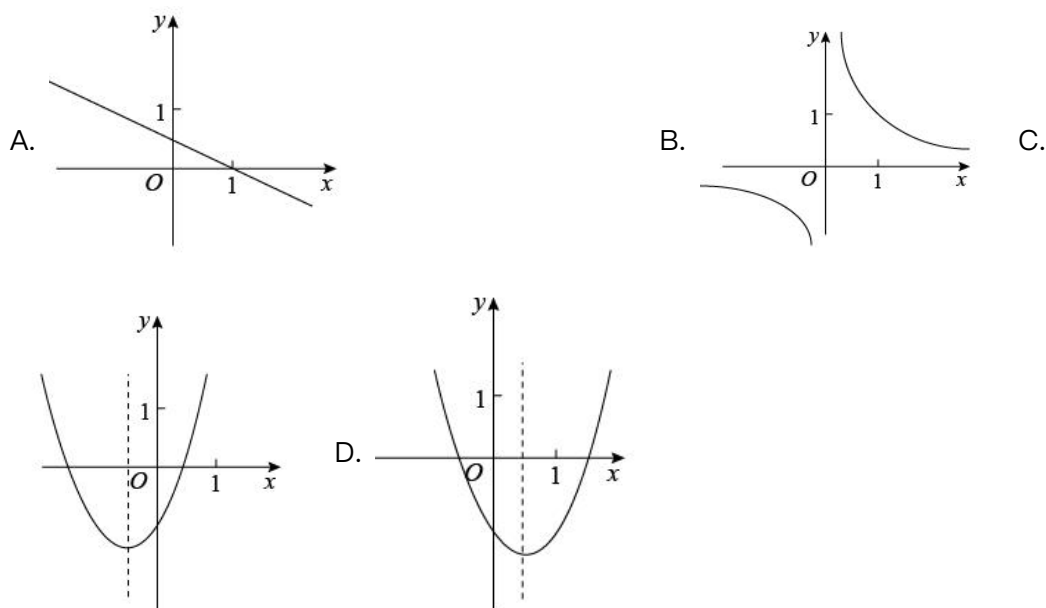
D、不是轴对称图形, 也不是中心对称图形, 故此选项错误, 不符合题意.

故选: B.

【点睛】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念, 解题的关键是掌握轴对称图形的关键是寻找对称

轴，图形沿对称轴折叠后可重合；中心对称图形关键是要寻找对称中心，图形旋转 180° 后与原图重合.

5. 下列四个函数图像中，当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大的是 ()



【答案】C

【解析】

【详解】A、错误，此函数为减函数， y 随 x 的增大而减小；

B、错误，此函数为反比例函数， $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小；

C、正确，此函数为二次函数， $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大；

D、错误，此函数为二次函数， $x > 0$ 时，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而减小，在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而增大.

故选 C.

6. 已知在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，添加下列一个条件后，一定能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是 ()

- A. $AD = BC$ B. $AC = BD$ C. $\angle A = \angle C$ D. $\angle A = \angle B$

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定进行判断即可.

【详解】解：A、B. $\because$ 在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$,

$\therefore AD = BC$ 或 $AC = BD$ ，都不能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形，故 A、B 错误；

$$C. \because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

$$\because \angle A = \angle C,$$

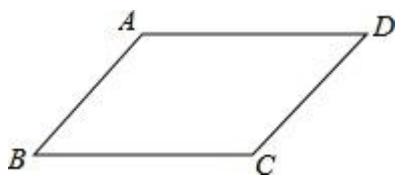
$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，故 C 正确.

D. 当 $\angle A = \angle B$ 时，无法判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形，故 D 错误.

故选：C.



【点睛】本题主要考查了平行四边形的判定，解题的关键是熟练掌握平行四边形的判定方法，是解题的关键.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 当 $x < 1$ 时，化简： $|x-1| =$ _____.

【答案】 $1-x$

【解析】

【分析】正数的绝对值等于它本身，负数的绝对值等于它的相反数，0 的绝对值是 0.

【详解】解： $\because x < 1,$

$$\therefore x-1 < 0,$$

$$\therefore \text{原式} = -(x-1)$$

$$= 1-x$$

故答案为： $1-x$.

【点睛】本题考查了绝对值的性质，判断出 $x-1$ 是负数是解题的关键.

8. 计算： $(2a+b)(2a-b) =$ _____.

【答案】 $4a^2 - b^2$

【解析】

【分析】根据平方差公式，即可解答.

【详解】解： $(2a+b)(2a-b) = 4a^2 - b^2,$

故答案为： $4a^2 - b^2$.

【点睛】本题主要考查平方差公式，解决本题的关键是熟记平方差公式.

9. 使得 $\frac{1}{3}x-1$ 的值不大于 1 的 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \leq 6$

【解析】

【分析】根据题意，得 $\frac{1}{3}x-1 \leq 1$ ，通过求解一元一次不等式，即可得到答案.

【详解】 $\because$ 代数式 $\frac{1}{3}x-1$ 的值不大于 1，即 $\frac{1}{3}x-1 \leq 1$

$$\therefore \frac{1}{3}x \leq 2$$

$$\therefore x \leq 6$$

故答案为： $x \leq 6$.

【点睛】本题考查了代数式、一元一次不等式的知识；解题的关键是熟练掌握一元一次不等式的解法.

10. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x-6}$ ，那么 $f(10) =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】根据已知直接将 $x=10$ 代入求出答案.

【详解】解： $\because f(x) = \sqrt{x-6}$ ，

$$\therefore f(10) = \sqrt{10-6} = 2,$$

故答案为： 2.

【点睛】此题主要考查了函数值，正确将已知数据代入是解题关键.

11. 已知一斜坡的坡比为 1: 2，坡角为 α ，那么 $\sin \alpha =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】坡比 = 坡角的正切值，设竖直直角边为 x ，水平直角边为 $2x$ ，由勾股定理求出斜边，进而可求出 α 的正弦值 .

【详解】解： 如图所示：

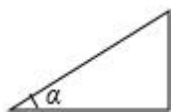
由题意，得： $\tan \alpha = i = \frac{1}{2}$ ，

设竖直直角边为 x ，水平直角边为 $2x$ ，

则斜边 $= \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{5}x$ ，

$$\text{则 } \sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{5}x} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故答案为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.



【点睛】此题主要考查坡比、坡角的关系以及勾股定理；熟记坡角的正切等于坡比是解决问题的关键.

12. 已知一组数据 24、27、19、13、23、12，那么这组数据中的中位数是_____.

【答案】 21

【解析】

【分析】求中位数要把数据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数或两个数的平均数为中位数.

【详解】解：将这组数据从小到大的顺序排列：12、13、19、23、24、27，处于中间位置的两个数是 19、23，那么由中位数的定义可知，这组数据的中位数是 $(19+23) \div 2 = 21$.

故答案为：21.

【点睛】本题为统计题，考查中位数的意义. 中位数是将一组数据从小到大（或从大到小）重新排列后，最中间的那个数（或最中间两个数的平均数），叫做这组数据的中位数.

13. 将直线 $y = (k+1)x - 2$ 平移能和直线 $y = -3x$ 重合，那么 k 的值是_____.

【答案】 -4

【解析】

【分析】根据直线 $y = (k+1)x - 2$ 平移能和直线 $y = -3x$ 重合，可得 $k+1 = -3$ ，即可得 k 的值.

【详解】解：∵将直线 $y = (k+1)x - 2$ 平移能和直线 $y = -3x$ 重合，

∴直线 $y = (k+1)x - 2$ 和直线 $y = -3x$ 平行，

∴ $k+1 = -3$,

解得 $k = -4$,

故答案为：-4.

【点睛】本题主要考查一次函数图像与几何变换，熟练掌握两直线平行问题，两直线平行， k 值相等是关键.

14. 欧阳修的《卖油翁》中写道：“（翁）乃取一葫芦置于地，以钱覆盖其口，徐以杓酌油沥之，自钱孔入，而钱不湿”，可见“行行出状元”，卖油翁的技艺让人叹为观止. 若铜钱是直径为 3cm 的圆面，中间有边长为 1cm 的正方形孔. 现随机向铜钱上滴一滴油（油滴的大小忽略不计），那么油滴落入孔中的概率为_____.

【答案】 $\frac{4}{9\pi}$

【解析】

【分析】 分别求出铜钱和中间正方形孔的面积，然后利用几何概率计算.

【详解】 解： $\because S_{\text{正方形}} = 1, S_{\text{圆}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \pi = \frac{9\pi}{4},$

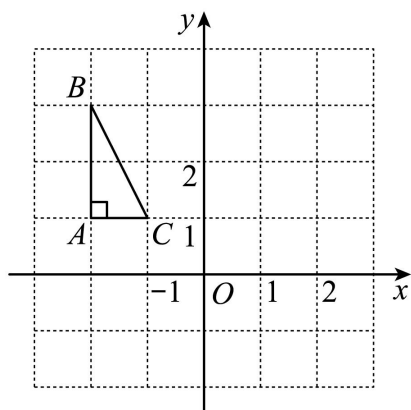
$$\therefore P = \frac{1}{\frac{9\pi}{4}} = \frac{4}{9\pi}.$$

故答案为： $\frac{4}{9\pi}$.

【点睛】 本题考查了几何概率，解题的关键是：能分别求出满足基本事件和总的基本事件的“几何度量”，最后代入公式求解.

15. 如图, 在方格纸上建立的平面直角坐标系中, 将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转 90° , 得到 $\text{Rt}\triangle FEC$,

则点 A 的对应点 F 的坐标是_____.



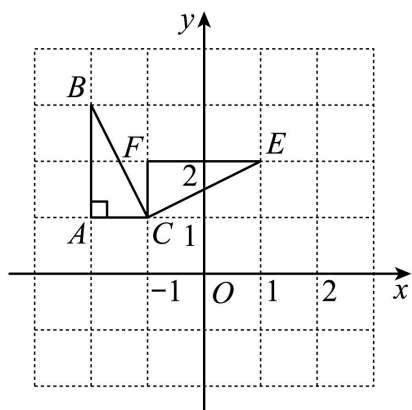
【答案】 $(-1, 2)$

【解析】

【分析】 根据网格图形找出点 A 、 B 顺时针旋转 90° 后的对应点的位置，然后顺次连接，再根据平面直角坐标系写出点 F 的坐标即可.

【详解】 解： 如图，点 F 的坐标为 $(-1, 2)$.

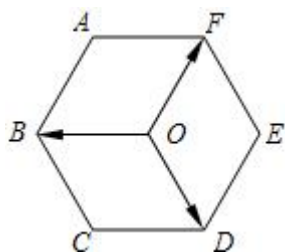
故答案为： $(-1, 2)$.



【点睛】 本题考查了坐标与图形变化－旋转，熟练掌握网格结构，准确找出对应点的位置是解题的关键.

16. 如图，已知点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，记 $\overrightarrow{OD} = \vec{n}$ ， $\overrightarrow{OF} = \vec{n}$ ，那么 $\overrightarrow{OB} =$ _____

(用向量 $\vec{n}$ 、 $\vec{n}$ 表示).

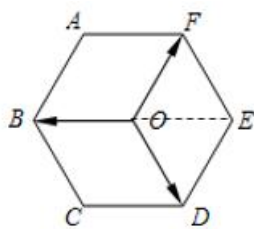


【答案】 $-\vec{n} - \vec{n}$

【解析】

【分析】 根据正六边形性质，得 $\triangle OEF$ 为等边三角形，根据平行线性质，得 $FE \parallel OD$ ；结合向量性质，得 $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OD}$ ，再根据向量性质计算，即可得到答案.

【详解】 连接 OE ,



$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形,

$$\therefore \angle EOD = \angle EOF = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ, \quad OE = OF = OD = OB$$

$$\therefore FE = OE = OF = OD$$

$\therefore \triangle OEF$ 为等边三角形

$$\therefore \angle OEF = \angle EOF$$

$$\therefore FE \parallel OD$$

$$\therefore \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OD}$$

$$\therefore \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FE} = \vec{m} + \vec{n}$$

$$\therefore \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OE} = -\vec{m} - \vec{n}$$

故答案为： $-\vec{m} - \vec{n}$.

【点睛】 本题考查了正多边形、等边三角形、平行线、向量的知识；解题的关键是熟练掌握正多边形、向量的性质，从而完成求解.

17. 我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一副“弦图”，后人称其为“赵爽弦图”（如图1）. 图2由弦图变化得到，它是由八个全等的直角三角形拼接而成. 记图中正方形 $ABCD$ 、正方形 $EFGH$ 、正方形 $MNKT$ 的面积分别为 S_1 、 S_2 、 S_3 ，如果 $S_1 + S_2 + S_3 = 48$ ，那么 S_2 的值是_____.

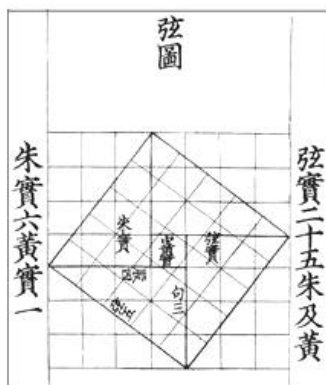


图1

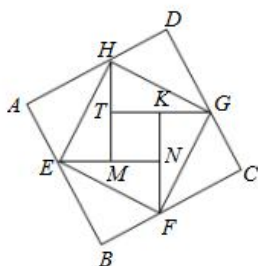


图2

【答案】 16

【解析】

【分析】 根据正方形的面积和勾股定理即可求解.

【详解】 解： 设全等的直角三角形的两条直角边为 a 、 b 且 $a > b$,

由题意可知： $S_1 = (a+b)^2$ ， $S_2 = a^2 + b^2$ ， $S_3 = (a-b)^2$ ，

因为 $S_1 + S_2 + S_3 = 48$,

即 $(a+b)^2 + a^2 + b^2 + (a-b)^2 = 48$,

$\therefore 3(a^2 + b^2) = 48$,

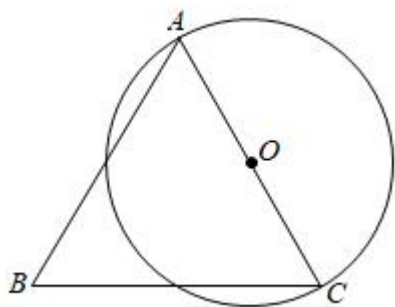
$\therefore 3S_2 = 48$,

$\therefore S_2$ 的值是 16.

故答案为 16.

【点睛】 本题考查了勾股定理，正方形的面积，解决本题的关键是随着正方形的边长的变化表示面积.

18. 如图, 已知在等边 $\triangle ABC$ 中, $AB=4$, 点 P 在边 BC 上, 如果以线段 PB 为半径的 $\odot P$ 与以边 AC 为直径的 $\odot O$ 外切, 那么 $\odot P$ 的半径长是_____.

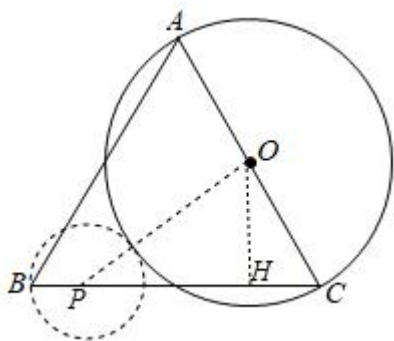


【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】由等边三角形的性质和直角三角形的性质可求 CH , OH , 由勾股定理可求解.

【详解】解: 如图, 连接 OP , 过点 O 作 $OH \perp BC$ 于 H ,



在等边 $\triangle ABC$ 中, $AB=4$,

$$\therefore AC=BC=AB=4, \quad \angle ACB=60^\circ,$$

$\therefore$ 点 O 是 AC 的中点,

$$\therefore AO=OC=2,$$

$\therefore$ 以线段 PB 为半径的 $\odot P$ 与以边 AC 为直径的 $\odot O$ 外切,

$$\therefore PO=2+BP,$$

$$\therefore OH \perp BC,$$

$$\therefore \angle COH=30^\circ,$$

$$\therefore HC=1, \quad OH=\sqrt{3},$$

$$\therefore OP^2 = OH^2 + PH^2,$$

$$\therefore (2+BP)^2 = (\sqrt{3})^2 + (4-1-BP)^2$$

$$\therefore BP = \frac{4}{5},$$

故答案为 $\frac{4}{5}$.

【点睛】 本题主要考查圆与圆的位置关系、等边三角形性质以及勾股定理得应用，利用勾股定理列出关于 BP 的方程是解题的关键.

三、解答题 (共 7 小题, 满分 78 分)

19. 计算: $(\pi-3)^0 - |\sqrt{3}-2| + \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}+2}.$

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据零指数幂，化解绝对值，分数指数幂，二次根式分母有理化等运算法则计算即可.

【详解】 解: 原式 = $1 - (2 - \sqrt{3}) + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} + \frac{2(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})},$

$$= 1 - 2 + \sqrt{3} + \sqrt{3} + 2(2 - \sqrt{3}),$$

$$= 1 - 2 + \sqrt{3} + \sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3},$$

$$= 3.$$

【点睛】 本题主要考查零指数幂，化解绝对值，分数指数幂，二次根式分母有理化等知识点，掌握以上知识点的运算法则是解题关键.

20. 解方程: $\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - 1.$

【答案】 $x = -1.$

【解析】

【分析】 观察可得最简公分母是 $(x+2)(x-2)$ ，方程两边乘最简公分母，可以把分式方程转化为整式方程求解.

【详解】 解: 去分母，得 $4 = (x+2) - (x+2)(x-2),$

整理，得 $x^2 - x - 2 = 0,$

解得 $x_1 = -1, x_2 = 2.$

经检验: $x_1 = -1$ 是原方程的根， $x_2 = 2$ 是增根.

故原方程的根为 $x = -1.$

【点睛】 本题主要考查解分式方程，解题的关键是熟知分式方程与一元二次方程的解法.

21. 如图，在单位长度为 1 的正方形网格中，一段圆弧经过网格的交点 A 、 B 、 C .

(1) 请完成如下操作：

①以点 O 为原点、网格边长为单位长，建立平面直角坐标系；

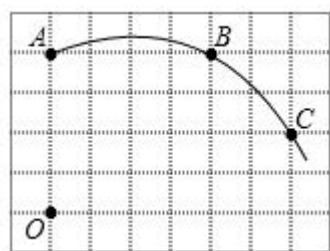
②根据图形提供的信息，标出该圆弧所在圆的圆心 D ，并连接 AD 、 CD .

(2) 请在 (1) 的基础上，完成下列填空：

①写出点的坐标： C _____、 D _____；

② $\odot D$ 的半径 = _____；

(3) 求 $\angle ACO$ 的正弦值.



【答案】 (1) 答案见解析； (2) ① $(6,2)$ ， $(2,0)$ ， ② $2\sqrt{5}$ ； (3) $\frac{3}{5}$.

【解析】

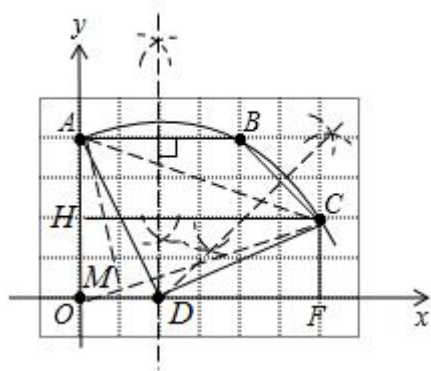
【分析】 (1) 根据点的坐标表示， C 的坐标即可得到，首先作出弦 AB 与 BC 的中垂线，中垂线的交点就是 D ，即可确定点 D 的坐标；

(2) ①根据 (1) 中的平面直角坐标系直接填空；

②在直角 $\triangle AOD$ 中，利用勾股定理即可求解；

(3) 连接 AC 、 OC . 过 C 作 $CH \perp AO$ 于点 H ，过点 A 作 $AM \perp CO$ 于点 M ，利用 $\triangle AOC$ 的面积等积转换求得 AM 的长度，然后在 $Rt\triangle AMC$ 中利用正弦函数的定义求得 $\angle ACO$ 的正弦值.

【详解】 解：(1) 作弦 AB 与 BC 的中垂线，中垂线的交点就是 D ，
在直角坐标系中，点 D 的在该坐标系中的位置如图所示：



(2) 解：①根据图示知， $C(6, 2)$ ， $D(2, 0)$ ，

故答案为： $(6, 2)$ ， $(2, 0)$ ；

②解：在直角 $\triangle AOD$ 中，根据勾股定理知 $\odot D$ 的半径 $AD = \sqrt{OD^2 + AO^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ ，

故答案为： $2\sqrt{5}$ ；

(3) 解：连接 AC 、 OC 。过 C 作 $CH \perp AO$ 于点 H ，过点 A 作 $AM \perp CO$ 于点 M 。

则 $\frac{1}{2}OA \cdot CH = \frac{1}{2}OC \cdot AM$ ，即 $\frac{1}{2} \times 4 \times 6 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \cdot AM$ ，

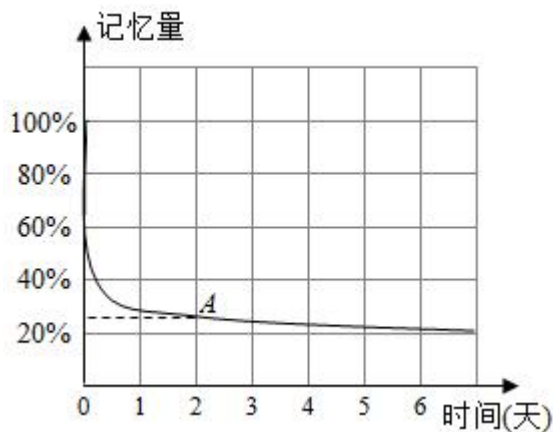
解得， $AM = \frac{6\sqrt{10}}{5}$ ；

在 $\text{Rt}\triangle AMC$ 中， $\sin \angle ACO = \frac{AM}{AC} = \frac{\frac{6\sqrt{10}}{5}}{2\sqrt{10}} = \frac{3}{5}$ 。

【点睛】本题考查了圆的综合题，涉及的知识点有：坐标与图形性质，垂径定理，勾股定理，三角函数；利用了数形结合的思想，根据题意画出相应的图形是解本题的关键。

22. 阅读下列有关记忆的资料，分析保持记忆的措施和方法。资料：德国心理学家艾宾浩斯对人的记忆进行了研究，他采用无意义的音节作为记忆的材料进行实验，获得了如下表中的相关数据，然后他又根据表中的数据绘制了一条曲线，这就是著名的艾宾浩斯遗忘曲线。其中横轴表示时间，纵轴表示学习中的记忆量。

时间	记忆量
刚记忆完	100%
20 分钟后	58.2%
1 小时后	44.2%
9 小时后	35.8%
1 天后	33.7%
2 天后	27.8%
6 天后	25.4%
30 天后	21.1%



观察表格和图像，回答下列问题：

- (1) 图中点 A 的坐标表示的实际意义是_____；
- (2) 在下面哪个时间段内遗忘的速度最快 ()
A. 0—20 分钟； B. 20 分钟—1 小时 C. 1 小时—9 小时； D. 1 天—2 天.
- (3) 王老师每节数学课最后五分钟都会对本节课进行回顾总结，并要求学生每天晚上对当天课堂上所学的知识进行复习。据调查这样一天后记忆量能保持 98%。如果小明同学一天没有复习，那么记忆量大约会比复习过的记忆量减少多少？由此对你的学习有什么启示？

【答案】 (1) 2 天大约记忆量保持了 27.8%； (2) A ； (3) 减少约 66.3%； ①每天上午、下午、晚上各复习 10 分钟； ②坚持每天复习，劳逸结合（答案不唯一）。

【解析】

- 【分析】** (1) 依据图象中点的坐标，即可得到 A 点表示的意义；
- (2) 根据图象判断即可；
- (3) 依据函数图象，可得如果一天不复习，记忆量只能保持 33.7% 左右。

【详解】 解：(1) 由题可得，点 A 表示：2 天大约记忆量保持了 27.8%；
故答案为：2 天大约记忆量保持了 27.8%

(2) 由图可得，0-20 分钟 内记忆保持量下降 41.8%，故 0-20 分钟内遗忘的速度最快，
故选：A；

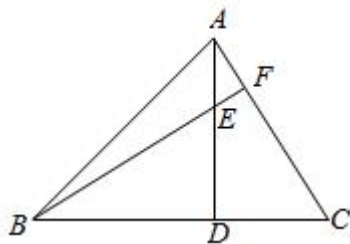
(3) 如果一天不复习，记忆量只能保持 33.7%，记忆量减少约 66.3%；
学习计划两条：①每天上午、下午、晚上各复习 10 分钟；②坚持每天复习，劳逸结合（答案不唯一）。

【点睛】 本题考查了函数图象，观察函数图象获得有效信息是解题关键。

23. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ ，垂足为点 D ， $AD = BD$ ，点 E 为边 AD 上一点，且 $DE = DC$ ，连接 BE 并延长，交边 AC 于点 F 。

- (1) 求证： $BF \perp AC$ ；

(2) 过点 A 作 BC 的平行线交 BF 的延长线于点 G , 连接 CG . 如果 $DE^2 = AE \cdot AD$, 求证: 四边形 $ADCG$ 是矩形.



【答案】(1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 先证明 $\triangle BDE$ 和 $\triangle ADC$ 全等得出 $\angle EBD = \angle CAD$, 再证 $\triangle BED \sim \triangle AEF$, 即可得证;

(2) 先证 $\triangle AEG \sim \triangle DCA$, 得出 $DC = AG$, 证明出四边形 $ADCG$ 是平行四边形, 再证一个角是直角即可得证.

【详解】证明: (1) $\because AD \perp BC$,

$$\therefore \angle ADC = \angle BDE = 90^\circ,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BED$ 中,

$$\begin{cases} AD = BD \\ \angle ADC = \angle BDE, \\ DC = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BED \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle EBD = \angle CAD,$$

$$\text{又} \because \angle BED = \angle AEF,$$

$$\therefore \triangle BED \sim \triangle AEF,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle EDB = 90^\circ,$$

即 $BF \perp AC$;

$$(2): \because AG \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AGE = \angle EBD,$$

由 (1) 知 $\angle EBD = \angle CAD$,

$$\therefore \angle AGE = \angle CAD,$$

$$\text{又} \because \angle AEG = \angle BED = \angle ACD,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle DCA,$$

$$\therefore \frac{AE}{DC} = \frac{AG}{DA},$$

$$\therefore AE \cdot AD = DC \cdot AG,$$

$$\because DE^2 = AE \cdot AD, \quad DE = DC,$$

$$\therefore DC \cdot AG = DE^2 = DC^2,$$

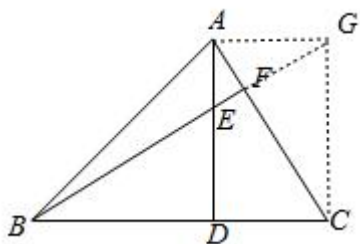
$$\therefore DC = AG,$$

$$\text{又} \because AG \parallel DC,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCG$ 是平行四边形,

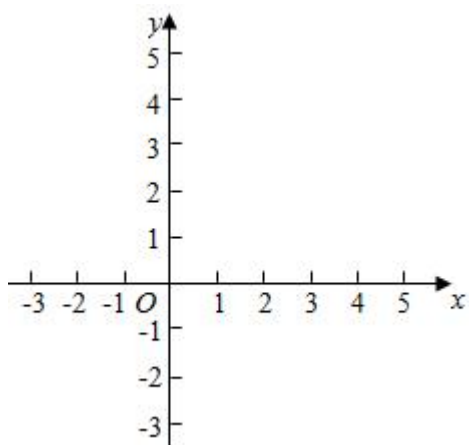
$$\because AD \perp BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCG$ 是矩形 (有一个角是直角的平行四边形是矩形).



【点睛】 本题主要考查了直角三角形的性质、相似三角形的判定与性质、矩形的判定与性质等知识点，关键在于利用直角三角形的性质证明出角相等，再证明出三角形相似，用相似的性质证明出结论.

24. 如图, 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 $C(0, 2)$.



(1) 求这条抛物线的表达式;

(2) 如果将抛物线向下平移 m 个单位, 使平移后的抛物线的顶点恰好落在线段 BC 上, 求 m 的值;

(3) 如果点 P 是抛物线位于第一象限上的点, 联结 PA , 交线段 BC 于点 E , 当 $PE : AE = 4 : 5$ 时, 求点 P 的坐标.

【答案】(1) 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$; (2) $m = \frac{15}{8}$; (3) 点 $P(2,3)$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法可求解析式;

(2) 求出平移前后的顶点坐标, 即可求解;

(3) 通过证明 $\triangle AEF \sim \triangle APH$, 可证 $\frac{AE}{AP} = \frac{AF}{AH} = \frac{EF}{PH} = \frac{5}{9}$, 即可求解.

【详解】解: (1) $\because y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1,0)$, 与 y 轴交于点 $C(0,2)$.

$$\therefore \begin{cases} c = 2 \\ 0 = -\frac{1}{2} - b + c \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = \frac{3}{2}, \\ c = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$;

$$(2) \because y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{8},$$

$\therefore$ 顶点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{8}\right)$,

$\because y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ 与 x 轴交于点 A , 点 B ,

$$\therefore 0 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2,$$

$$\therefore x_1 = -1, \quad x_2 = 4,$$

$\therefore$ 点 $B(4,0)$,

设直线 BC 解析式为 $y = kx + n$,

$$\begin{cases} n = 2 \\ 0 = 4k + n \end{cases},$$

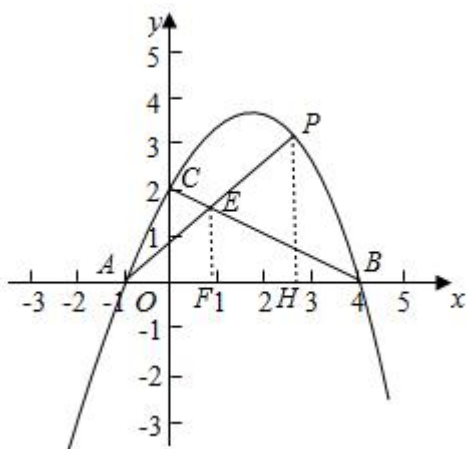
$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{1}{2}, \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$,

$$\text{当 } x = \frac{3}{2} \text{ 时, } y = \frac{5}{4},$$

$$\therefore m = \frac{25}{8} - \frac{5}{4} = \frac{15}{8};$$

(3) 如图, 过点 E 作 $EF \perp AB$ 于 F , 过点 P 作 $PH \perp AB$ 于 H ,



$$\therefore EF \parallel PH,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle APH,$$

$$\therefore \frac{AE}{AP} = \frac{AF}{AH} = \frac{EF}{PH},$$

$$\therefore PE : AE = 4 : 5,$$

$$\therefore \frac{AE}{AP} = \frac{AF}{AH} = \frac{EF}{PH} = \frac{5}{9},$$

$$\therefore AF = 5x, \quad AH = 9x,$$

$$\therefore OF = 5x - 1, \quad OH = 9x - 1,$$

$$\therefore \text{点 } P\left(9x-1, -\frac{1}{2}(5x-1)+2\right), \text{ 点 } E\left(5x-1, -\frac{1}{2}(9x-1)^2 + \frac{3}{2}(9x-1)+2\right),$$

$$\therefore EF = -\frac{1}{2}(5x-1)+2, \quad PH = -\frac{1}{2}(9x-1)^2 + \frac{3}{2}(9x-1)+2,$$

$$\therefore \frac{-\frac{1}{2}(5x-1)+2}{-\frac{1}{2}(9x-1)^2 + \frac{3}{2}(9x-1)+2} = \frac{5}{9},$$

$$\therefore x = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{点 } P(2, 3).$$

【点睛】本题是二次函数综合题, 考查了待定系数法求解析式, 平移的性质, 相似三角形的判定和性质, 灵活运用这些性质解决问题是本题的关键.

25. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 8$, $\cos B = \frac{4}{5}$, 点 D 是边 BC 上一点, 过点 D 作 $DE \perp AB$, 垂足为

点 E , 点 F 是边 AC 上一点, 联结 DF 、 EF , 以 DF 、 EF 为邻边作平行四边形 $EFDG$.

(1) 如图 1, 如果 $CD=2$, 点 G 恰好在边 BC 上, 求 $\angle CDF$ 的余切值;

(2) 如图 2, 如果 $AF=AE$, 点 G 在 $\triangle ABC$ 内, 求线段 CD 的取值范围;

(3) 在第 (2) 小题的条件下, 如果平行四边形 $EFDG$ 是矩形, 求线段 CD 的长.

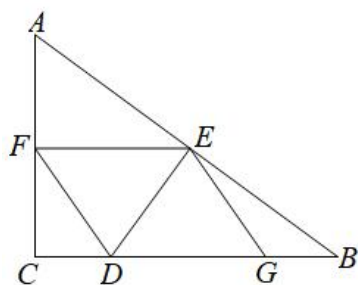


图1

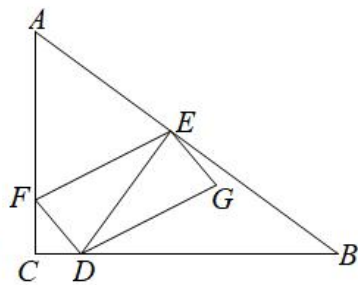
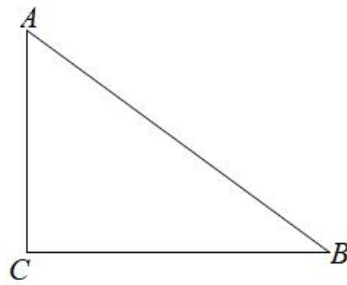


图2



备用图

【答案】 (1) $\frac{25}{36}$; (2) $0 \leq CD < \frac{48}{31}$; (3) $\frac{6}{7}$

【解析】

【分析】 (1) 由锐角三角函数的定义求出 $BC=8$, 由勾股定理求出 $AC=6$, 由平行线分线段成比例定理得出 $\frac{BE}{AB} = \frac{CF}{AC}$, 求出 CF , 则可得出答案;

(2) 当点 G 恰好在 AB 上时, 解直角三角形求出 CD 的长, 则可得出答案;

(3) 设 $CD=x$, 则 $BE = \frac{4}{5}(8-x)$, 设矩形 $EFDG$ 的对角线 FG 与 DE 相交于点 O , 连接 OA , 证明 $\triangle AFO \cong \triangle AEO$ (SSS), 由全等三角形的性质得出 $\angle AFO = \angle AEO = 90^\circ$, 过点 E 作 $EH \perp AC$ 于点 H , 由梯形的中位线定理得出 $EH + CD = 2OF = DE$, 解方程 $\frac{4}{5}[10 - \frac{4}{5}(8-x)] + x = \frac{3}{5}(8-x)$ 可得出答案.

【详解】 解: (1) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$,

又 $BC=8$,

$\therefore AB=10$,

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$,

$\therefore DE \perp AB$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle BDE$ 中,

$\cos B = \frac{BE}{BD} = \frac{4}{5}$,

又 $CD=2$, $BD=6$,

$\therefore BE = \frac{24}{5}$,

$\therefore$ 四边形 $EFDG$ 是平行四边形,

$$\therefore EF \parallel DG,$$

$\because$ 点 G 在 BC 上,

$$\therefore EF \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{CF}{AC},$$

$$\therefore \frac{24}{10} = \frac{CF}{6},$$

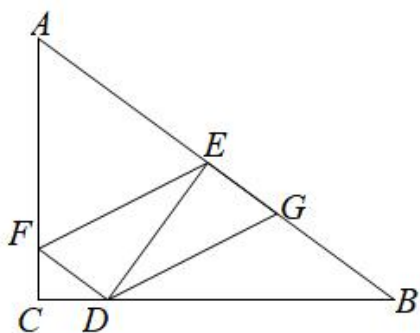
$$\therefore CF = \frac{72}{25},$$

$$\text{在 } Rt\triangle CFD \text{ 中, } \cos \angle CDF = \frac{CD}{CF} = \frac{2}{\frac{72}{25}} = \frac{25}{36};$$

(2) $\because$ 四边形 $EFDG$ 是平行四边形,

$$\therefore DF \parallel EG,$$

当点 G 恰好在 AB 上时,



$$\therefore DF \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{CF}{CA} = \frac{CD}{CB},$$

$$\text{设 } CD = x, \text{ 则 } \frac{CF}{6} = \frac{x}{8},$$

$$\therefore CF = \frac{3}{4}x,$$

$$\text{在 } Rt\triangle BDE \text{ 中, } \cos B = \frac{BE}{BD} = \frac{4}{5},$$

$$\text{又 } CD = x, \text{ 则 } BD = 8 - x,$$

$$\therefore BE = \frac{4}{5}(8 - x),$$

$$\because AE = AF,$$

$$\therefore 6 - \frac{3}{4}x = 10 - \frac{4}{5}(8 - x),$$

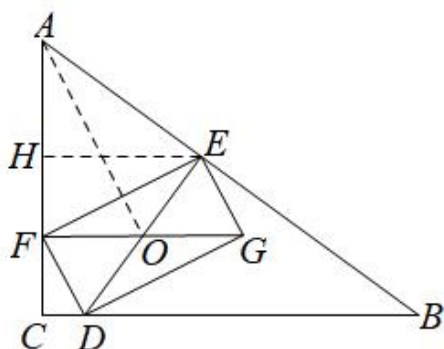
$$\therefore x = \frac{48}{31},$$

当点 G 在 $\triangle ABC$ 内时, $0 \leq CD < \frac{48}{31}$;

$$(3) \text{ 设 } CD = x, \text{ 则 } BE = \frac{4}{5} (8 - x),$$

$$\therefore AE = 10 - \frac{4}{5} (8 - x),$$

设矩形 $EFDG$ 的对角线 FG 与 DE 相交于点 O , 连接 OA ,



$\because$ 平行四边形 $EFDG$ 是矩形,

$$\therefore OF = OE = \frac{1}{2} DE,$$

$$\therefore AF = AE, \quad OA = OA,$$

$$\therefore \triangle AFO \cong \triangle AEO \quad (SSS),$$

$$\therefore \angle AFO = \angle AEO = 90^\circ,$$

过点 E 作 $EH \perp AC$ 于点 H ,

$$\text{又 } \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore EH \parallel HF \parallel CB,$$

$$\therefore OD = OE,$$

$$\therefore CF = HF,$$

$$\therefore EH + CD = 2OF = DE,$$

$$\therefore DE = \frac{3}{5} (8 - x), \quad EH = \frac{4}{5} \left[10 - \frac{4}{5} (8 - x) \right],$$

$$\therefore \frac{4}{5} \left[10 - \frac{4}{5} (8 - x) \right] + x = \frac{3}{5} (8 - x),$$

$$\therefore x = \frac{6}{7},$$

$$\therefore CD = \frac{6}{7}.$$

【点睛】 本题属于四边形综合题, 考查了平行四边形的性质, 矩形的性质, 相似三角形的判定和性质, 全

等三角形的判定和性质，直角三角形的性质，解直角三角形等知识，解题的关键是熟练掌握全等三角形的判定与性质及相似三角形的判定与性质，学会利用参数构建方程解决问题，属于中考压轴题.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>)
致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群
出品的《老师请开讲》私享直播课等
增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>)
是学科网旗下智能题库，拥有小初高全
学科超千万精品试题，提供智能组卷、
拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能