

2013 年上海市静安区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[每小题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂]

1. (4 分) 下列式子中，从左到右的变形为多项式因式分解的是 ()

A. $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
B. $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = x^2 - 2$

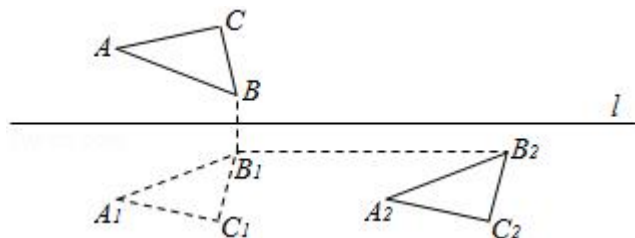
C. $x - 4 = (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)$
D. $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2) = x - 4$
2. (4 分) 下列方程中，有实数根的是 ()

A. $\sqrt{1+x} = -1$
B. $\sqrt{x-1} = -x$
C. $x^3 + 3 = 0$
D. $x^4 + 4 = 0$
3. (4 分) 函数 $y = kx - k - 1$ (常数 $k > 0$) 的图象不经过的象限是 ()

A. 第一象限
B. 第二象限
C. 第三象限
D. 第四象限
4. (4 分) 已知一组数据 3、4、4、5、6、7、4、7，那么这组数据的 ()

A. 中位数是 5.5，众数是 4
B. 中位数是 5，平均数是 5
C. 中位数是 5，众数是 4
D. 中位数是 4.5，平均数是 5
5. (4 分) 如果 $\square ABCD$ 的对角线相交于点 O ，那么在下列条件中，能判断 $\square ABCD$ 为菱形的是 ()

A. $\angle OAB = \angle OBA$
B. $\angle OAB = \angle OBC$
C. $\angle OAB = \angle OCD$
D. $\angle OAB = \angle OAD$
6. (4 分) 一个图形沿一条直线翻折后再沿这条直线的方向平移，我们把这样的图形运动称为图形的翻移，这条直线称为翻移线．如图 $\triangle A_2B_2C_2$ 是由 $\triangle ABC$ 沿直线 l 翻移后得到的．在下列结论中，图形的翻移所具有的性质是 ()



- A. 各对应点之间的距离相等
- B. 各对应点的连线互相平行
- C. 对应点连线被翻移线平分

D. 对应点连线与翻移线垂直

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) [在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案]

7. (4 分) 计算: $2^{-\frac{1}{2}}$ = _____.

8. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} 2x-3 > 0 \\ -x+2 < 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

9. (4 分) 如果一个数的倒数等于它本身, 则这个数是_____.

10. (4 分) 如果关于 x 的方程 $x^2 - 6x + m - 1 = 0$ 没有实数根, 那么 m 的取值范围是_____.

11. (4 分) 如果点 $A(-1, 2)$ 在一个正比例函数 $y = f(x)$ 的图象上, 那么 y 随着 x 的增大而_____ (填“增大”或“减小”).

12. (4 分) 将抛物线 $y = 2x^2 + 1$ 向右平移 3 个单位, 所得抛物线的表达式是_____.

13. (4 分) 某校 200 名学生一次数学测试的分数均大于 75 且小于 150, 分数段的频数分布情况如下: 75 ~ 90 有 15 人, 90 ~ 105 有 42 人, 105 ~ 120 有 58 人, 135 ~ 150 有 35 人 (其中每个分数段可包括最小值, 不包括最大值), 那么测试分数在 120 ~ 135 分数段的频率是_____.

14. (4 分) 从点数为 1、2、3、4、5 的五张扑克牌中随机摸出两张牌, 摸到的两张牌的点数之和为素数的概率是_____.

15. (4 分) 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 3AD$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{CD}$ = _____.

16. (4 分) 如果 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内含, $O_1O_2 = 4$, $\odot O_1$ 的半径是 3, 那么 $\odot O_2$ 的半径的取值范围是_____.

17. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 40^\circ$, $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转后点 C 落在边 AB 上的点 C' , 点 B 落到点 B' , 如果点 C 、 C' 、 B' 在同一直线上, 那么 $\angle B$ 的度数是_____.

18. (4 分) 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 、 G 、 H 分别在边 AB 、 BC 、 CD 、 AD 上, 四边形 $EFGH$ 是矩形, $EF = 2FG$, 那么矩形 $EFGH$ 与正方形 $ABCD$ 的面积比是_____.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分) [将下列各题的解答过程, 做在答题

纸的相应位置上]

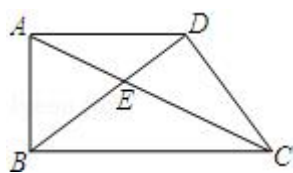
19. (10分) 化简: $(1 - \frac{1}{x^2})^{-1} + (\frac{1}{x} - x)^{-1}$, 并求当 $x = \sqrt{3} - 2$ 时的值.

20. (10分) 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 9 \\ x^2 - y^2 - 4x + 4y = 0. \end{cases}$$

21. (10分) 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB \perp AD$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 E , $BD \perp CD$, $AB = 12$, $\cot \angle ADB = \frac{4}{3}$.

求: (1) $\angle DBC$ 的余弦值;

(2) DE 的长.

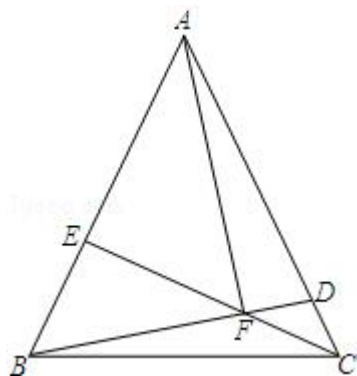


22. (10分) 一辆高铁列车与另一辆动车组列车在 1320 公里的京沪高速铁路上运行时, 高铁列车比动车组列车平均速度每小时快 99 公里, 用时少 3 小时, 求这辆高铁列车全程的运行时间和平均速度.

23. (12分) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 、 E 分别在边 AC 、 AB 上, $DA = DB$, BD 与 CE 相交于点 F , $\angle AFD = \angle BEC$.

求证: (1) $AF = CE$;

(2) $BF^2 = EF \cdot AF$.

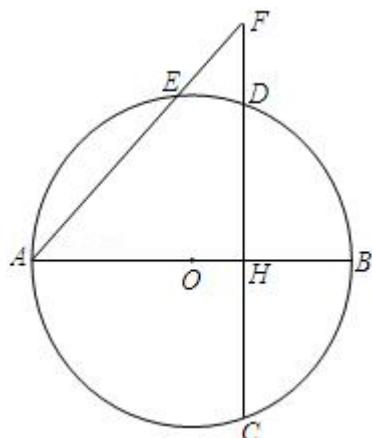


24. (12分) 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $CD \perp AB$, 垂足为 H , $AH = 5$, $CD = 4\sqrt{5}$, 点 E 在 $\odot O$ 上, 射线 AE 与射线 CD 相交于点 F , 设 $AE = x$, $DF = y$.

(1) 求 $\odot O$ 的半径;

(2) 如图, 当点 E 在弧 AD 上时, 求 y 与 x 之间的函数解析式, 并写出函数的定义域;

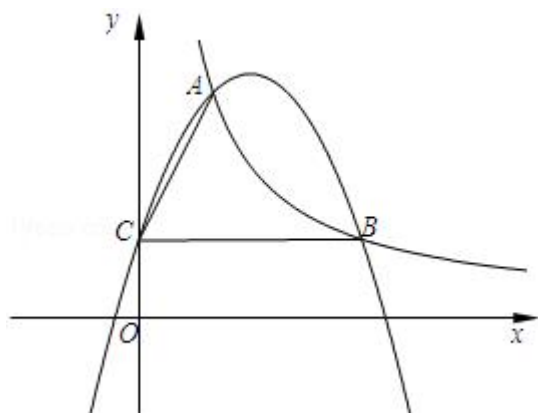
(3) 如果 $EF = \frac{3}{2}$, 求 DF 的长.



25. (14分) 如图, 点 $A(2, 6)$ 和点 B (点 B 在点 A 的右侧) 在反比例函数的图象上, 点 C 在 y 轴上, $BC \parallel x$ 轴, $\tan \angle ACB = 2$, 二次函数的图象经过 A 、 B 、 C 三点.

(1) 求反比例函数和二次函数的解析式;

(2) 如果点 D 在 x 轴的正半轴上, 点 E 在反比例函数的图象上, 四边形 $ACDE$ 是平行四边形, 求边 CD 的长.



2013 年上海市静安区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[每小题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂]

1.（4 分）下列式子中，从左到右的变形为多项式因式分解的是（ ）

A. $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

B. $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=x^2-2$

C. $x-4=(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)$

D. $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)=x-4$

【考点】51：因式分解的意义.

【分析】把一个多项式化为几个整式的积的形式，这种变形叫做把这个多项式因式分解，结合选项进行判断即可.

【解答】解：A、符合因式分解的定义，故本选项正确；

B、结果不是整式积的形式，不是因式分解，故本选项错误；

C、结果不是整式积的形式，不是因式分解，故本选项错误；

D、结果不是整式积的形式，不是因式分解，故本选项错误；

故选：A.

【点评】本题考查了因式分解的定义，属于基础题.

2.（4 分）下列方程中，有实数根的是（ ）

A. $\sqrt{1+x}=-1$

B. $\sqrt{x-1}=-x$

C. $x^3+3=0$

D. $x^4+4=0$

【考点】AG：无理方程.

【分析】根据任何数的算术平方根以及偶次方一定是非负数即可作出判断.

【解答】解：A、 $\sqrt{1+x} \geq 0$ ，因而方程一定无解；

B、 $x-1 \geq 0$ ，解得： $x \geq 1$ ，则 $-x < 0$ ，故原式一定不成立，方程无解；

C、 $x^3+3=0$ ，则 $x = -\sqrt[3]{3}$ ，故选项正确；

D、 $x^4+4 \geq 4$ ，故原式一定不成立，故方程无解.

故选：C.

【点评】本题考查了任何数的算术平方根以及偶次方一定是非负数.

3.（4 分）函数 $y=kx-k-1$ （常数 $k>0$ ）的图象不经过的象限是（ ）

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【考点】 F7: 一次函数图象与系数的关系.

【分析】 根据 k 的取值范围确定 $-k-1$ 的符号, 从而确定一次函数不经过的象限.

【解答】 解: $\because k > 0$

$$\therefore -k < 0,$$

$$\therefore -k-1 < 0$$

$\therefore y = kx - k - 1$ (常数 $k > 0$) 的图象经过一、三、四象限,

故选: B.

【点评】 本题考查了一次函数图象与系数的关系, 解题的关键是牢记比例系数对函数图象的影响.

4. (4 分) 已知一组数据 3、4、4、5、6、7、4、7, 那么这组数据的 ()

A. 中位数是 5.5, 众数是 4

B. 中位数是 5, 平均数是 5

C. 中位数是 5, 众数是 4

D. 中位数是 4.5, 平均数是 5

【考点】 W2: 加权平均数; W4: 中位数; W5: 众数.

【分析】 根据定义分别求出平均数、中位数、众数, 然后作出选择.

【解答】 解: 平均数 $= (3+4+4+5+6+7+4+7) \div 8 = 5$,

中位数是 $(4+5) \div 2 = 4.5$,

在这组数据中 4 出现 3 次, 最多, 则众数是 4.

故选: D.

【点评】 本题考查的是平均数、众数和中位数. 平均数是指在一组数据中所有数据之和再除以数据的个数. 平均数是表示一组数据集中趋势的量数, 它是反映数据集中趋势的一项指标. 解答平均数应用题的关键在于确定“总数量”以及和总数量对应的总份数.

5. (4 分) 如果 $\square ABCD$ 的对角线相交于点 O , 那么在下列条件中, 能判断 $\square ABCD$ 为菱形的是 ()

A. $\angle OAB = \angle OBA$

B. $\angle OAB = \angle OBC$ C. $\angle OAB = \angle$

OCD

D. $\angle OAB = \angle OAD$

【考点】L9：菱形的判定．

【分析】①定义：一组邻边相等的平行四边形是菱形；②四边相等；③对角线互相垂直平分的四边形是菱形．据此判断即可．

【解答】解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle ACD,$$

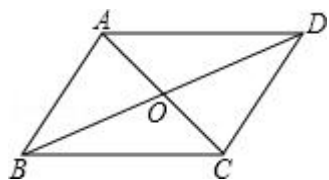
$$\because \angle OAB = \angle OAD,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA,$$

$$\therefore AD = CD,$$

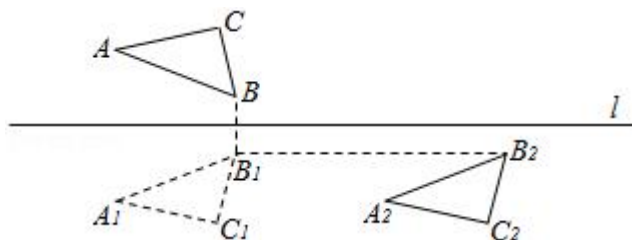
∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形（邻边相等的平行四边形是菱形）

故选：D．



【点评】本题考查菱形的判定方法有三种：①定义：一组邻边相等的平行四边形是菱形；②四边相等；③对角线互相垂直平分的四边形是菱形．

- 6.（4分）一个图形沿一条直线翻折后再沿这条直线的方向平移，我们把这样的图形运动称为图形的翻移，这条直线称为翻移线．如图 $\triangle A_2B_2C_2$ 是由 $\triangle ABC$ 沿直线 l 翻移后得到的．在下列结论中，图形的翻移所具有的性质是（ ）



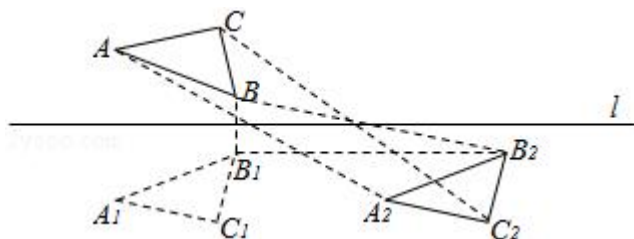
- A. 各对应点之间的距离相等
- B. 各对应点的连线互相平行
- C. 对应点连线被翻移线平分
- D. 对应点连线与翻移线垂直

【考点】RA：几何变换的类型．

【专题】23：新定义．

【分析】根据图象的翻折和平移的性质得出对应点连线被翻移线平分.

【解答】解：∵如图所示：△A₂B₂C₂是由△ABC沿直线*l*翻移后得到的，
∴图形的翻移所具有的性质是：对应点连线被翻移线平分.



故选：C.

【点评】此题主要考查了几何变换的类型，根据翻折和平移的性质得出是解题关键.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）[在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案]

7.（4 分）计算： $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

【考点】2F：分数指数幂.

【专题】11：计算题.

【分析】原式利用分数指数幂法则计算即可得到结果.

【解答】解：原式 = $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

故答案为： $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【点评】此题考查了分数指数幂，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

8.（4 分）不等式组 $\begin{cases} 2x-3 > 0 \\ -x+2 < 0 \end{cases}$ 的解集是 $x > 2$.

【考点】CB：解一元一次不等式组.

【专题】11：计算题.

【分析】分别求出各不等式的解集，再求出其公共解集即可.

【解答】解： $\begin{cases} 2x-3 > 0 \text{ ①} \\ -x+2 < 0 \text{ ②} \end{cases}$ ，由①得， $x > \frac{3}{2}$ ；由②得， $x > 2$ ，

故此不等式组的解集为： $x > 2$.

故答案为： $x > 2$.

【点评】 本题考查的是解一元一次不等式组，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

9. (4分) 如果一个数的倒数等于它本身，则这个数是 ± 1 .

【考点】 17: 倒数.

【分析】 根据倒数的定义可知如果一个数的倒数等于它本身，则这个数是 ± 1 .

【解答】 解：如果一个数的倒数等于它本身，则这个数是 ± 1 .

故答案为： ± 1 .

【点评】 主要考查了倒数的定义：若两个数的乘积是 1，我们就称这两个数互为倒数. 要求掌握并熟练运用. 尤其是 ± 1 这两个特殊的数字.

10. (4分) 如果关于 x 的方程 $x^2 - 6x + m - 1 = 0$ 没有实数根，那么 m 的取值范围是 $m > 10$.

【考点】 AA: 根的判别式.

【分析】 该方程没有实数根，所以根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ，据此列出关于 m 的不等式，通过解不等式即可求得 m 的取值范围.

【解答】 解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 6x + m - 1 = 0$ 没有实数根，

$$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (m - 1) < 0, \text{ 即 } 40 - 4m < 0,$$

解得， $m > 10$.

故答案是： $m > 10$.

【点评】 本题考查了根的判别式. 一元二次方程根的情况与判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的关系：

(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；

(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；

(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

11. (4分) 如果点 $A(-1, 2)$ 在一个正比例函数 $y = f(x)$ 的图象上，那么 y 随着 x 的增大而 减小 (填“增大”或“减小”).

【考点】 F6: 正比例函数的性质.

【分析】 首先设正比例函数解析式为 $y = kx$ ($k \neq 0$)，再把 $(-1, 2)$ 点代入函数解析式，算出 k 的值，再根据正比例函数的性质即可得到答案.

【解答】 解： 设正比例函数解析式为 $y = kx$ ($k \neq 0$),

$\because$ 过点 $(-1, 2)$,

$$\therefore 2 = k \times (-1),$$

解得 $k = -2$,

故正比例函数解析式为: $y = -2x$,

$$\because k = -2 < 0,$$

$\therefore y$ 随着 x 的增大而减小,

故答案为: 减小.

【点评】此题主要考查了正比例函数的性质,关键是掌握正比例函数图象的性质:

它是经过原点的一条直线. 当 $k > 0$ 时, 图象经过一、三象限, y 随 x 的增大而增大; 当 $k < 0$ 时, 图象经过二、四象限, y 随 x 的增大而减小.

12. (4 分) 将抛物线 $y = 2x^2 + 1$ 向右平移 3 个单位, 所得抛物线的表达式是 $y = 2(x - 3)^2 + 1$.

【考点】H6: 二次函数图象与几何变换.

【分析】求出平移前后的两个抛物线的顶点坐标, 然后利用顶点式形式写出即可.

【解答】解: 抛物线 $y = 2x^2 + 1$ 的顶点坐标为 $(0, 1)$,

向右平移 3 个单位后的顶点坐标是 $(3, 1)$,

所以, 平移后得到的抛物线的表达式是 $y = 2(x - 3)^2 + 1$.

故答案为: $y = 2(x - 3)^2 + 1$.

【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换, 利用顶点的变换确定出函数解析式是此类题目常用的方法, 一定要熟练掌握并灵活运用, 平移规律“左加右减, 上加下减”.

13. (4 分) 某校 200 名学生一次数学测试的分数均大于 75 且小于 150, 分数段的频数分布情况如下: 75 ~ 90 有 15 人, 90 ~ 105 有 42 人, 105 ~ 120 有 58 人, 135 ~ 150 有 35 人 (其中每个分数段可包括最小值, 不包括最大值), 那么测试分数在 120 ~ 135 分数段的频率是 0.25.

【考点】V6: 频数与频率.

【分析】根据已知 75 ~ 90、90 ~ 105、105 ~ 120、135 ~ 150 的频数, 求出 120 ~ 135 分数段的频数, 然后根据频率 = $\frac{\text{频数}}{\text{总数}}$ 即可求出测试分数在 120 ~ 135 分数段的频率.

【解答】解：120 ~ 135 分数段的频数 = 200 - 15 - 42 - 58 - 35 = 50 人，
 则测试分数在 120 ~ 135 分数段的频率 = $\frac{50}{200} = 0.25$.

故答案为：0.25.

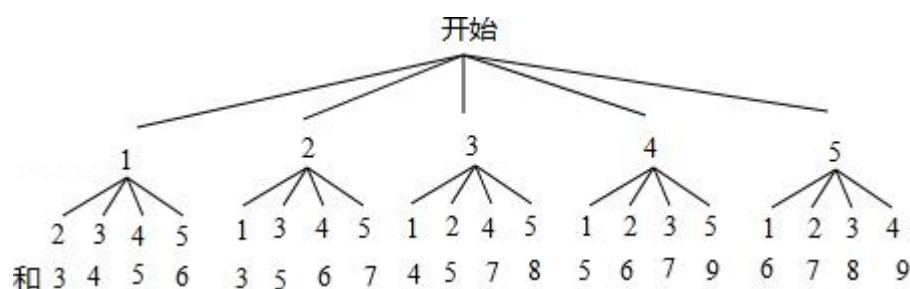
【点评】本题考查了频数和频率的知识，注意：每个小组的频数等于数据总数减去其余小组的频数，即各小组频数之和等于数据总和，频率 = $\frac{\text{频数}}{\text{数据总和}}$.

14. (4 分) 从点数为 1、2、3、4、5 的五张扑克牌中随机摸出两张牌，摸到的两张牌的点数之和为素数的概率是 $\frac{1}{2}$.

【考点】X6：列表法与树状图法.

【分析】首先画树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与摸到的两张牌的点数之和为素数的情况，再利用概率公式求解即可求得答案.

【解答】解：画树状图得：



∴ 共有 20 种等可能的结果，摸到的两张牌的点数之和为素数的有 10 种情况，

∴ 摸到的两张牌的点数之和为素数的概率是： $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

故答案为： $\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．注意列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件．注意概率 = 所求情况数与总情况数之比．

15. (4 分) 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC = 3AD$ ， $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ， 那么 $\overrightarrow{CD} = -\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

【考点】LM：*平面向量.

【分析】先画出示意图，过点 D 作 $DE \parallel AB$ 交 BC 于点 E ，则可表示出 $\overrightarrow{DE}$ 、 $\overrightarrow{EC}$ ，

从而可得出 $\overrightarrow{CD}$.

【解答】解：过点 D 作 $DE \parallel AB$ 交 BC 于点 E ，则 $BE = AD$ ，

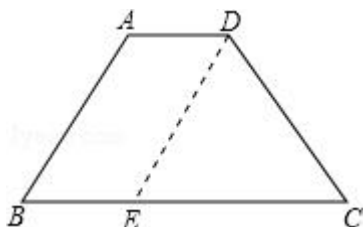
$$\because AD \parallel BC, BC = 3AD, \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{EC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{EC} = -\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}.$$

故答案为： $-\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.



【点评】本题考查了平面向量及平行四边形的性质，属于基础题，解答本题的关键是作出辅助线，将向量转移到一个三角形里面计算.

16. (4分) 如果 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内含， $O_1O_2 = 4$ ， $\odot O_1$ 的半径是3，那么 $\odot O_2$ 的半径的取值范围是 $r > 7$.

【考点】MJ：圆与圆的位置关系.

【分析】首先由题意知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 两圆内含，则知两圆圆心距 $d < R - r$ ，分两种情况进行讨论.

【解答】解：根据题意两圆内含，

故知 $r - 3 > 4$,

解得 $r > 7$.

故答案为： $r > 7$.

【点评】本题考查了由数量关系来判断两圆位置关系的方法. 两圆外离，则 $P > R + r$ ；外切，则 $P = R + r$ ；相交，则 $R - r < P < R + r$ ；内切，则 $P = R - r$ ；内含，则 $P < R - r$.

17. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 40^\circ$ ， $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转后点 C 落在边 AB 上的点 C' ，点 B 落到点 B' ，如果点 C 、 C' 、 B' 在同一直线上，那么 $\angle B$

的度数是 30° .

【考点】R2: 旋转的性质.

【分析】作出图形, 根据旋转的性质可得 $AC = AC'$, $\angle B'AC' = \angle BAC$, 根据等腰三角形两底角相等求出 $\angle AC'C$, 再根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和列式求出 $\angle AB'C$, 根据旋转的性质可得 $\angle ABC = \angle AB'C'$, 从而得解.

【解答】解: 如图, $\because \triangle AB'C'$ 是 $\triangle ABC$ 旋转得到,

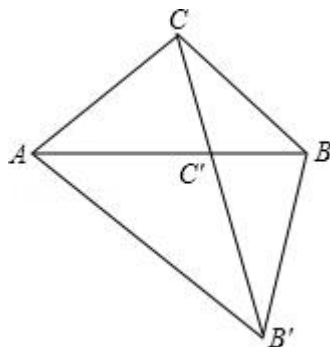
$$\therefore AC = AC' , \angle B'AC' = \angle BAC = 40^\circ ,$$

$$\therefore \angle AC'C = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle BAC) = \frac{1}{2} (180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ ,$$

$\because$ 点 C 的对应点 C' 落在 AB 上,

$$\therefore \angle AB'C' = \angle AC'C - \angle B'AC' = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ .$$

故答案为: 30° .



【点评】本题考查了旋转的性质, 等腰三角形两底角相等的性质, 三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和的性质, 熟记性质是解题的关键, 作出图形更形象直观.

18. (4分) 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 、 G 、 H 分别在边 AB 、 BC 、 CD 、 AD 上, 四边形 $EFGH$ 是矩形, $EF = 2FG$, 那么矩形 $EFGH$ 与正方形 $ABCD$ 的面积比是 $\frac{4}{9}$.

【考点】LB: 矩形的性质; LE: 正方形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据题意画出图形, 如图所示, 由正方形性质得到 $\triangle EFB \cong \triangle HDC$, $\triangle AEH \cong \triangle CFG$, 且四个三角形都为等腰直角三角形, 再由等腰直角三角形 BEF

与等腰直角三角形 CFG 相似，且相似比为 $2:1$ ，得到 $BE = BF = DH = DG = 2AE = 2AH = 2CG = 2CF$ ，设正方形边长为 $3a$ ，表示出 BE ， BF ，以及 AH ， AE ，利用勾股定理表示出 EF 与 EH ，进而表示出矩形 $EFGH$ 的面积，即可求出矩形与正方形面积之比。

【解答】解：由正方形的性质得到 $\triangle EFB \cong \triangle HDC$ ， $\triangle AEH \cong \triangle CFG$ ，且四个三角形都为等腰直角三角形，

$$\because \triangle BEF \sim \triangle CFG, EF = 2FG,$$

设正方形的边长为 $3a$ ，即 $S_{\text{正方形} ABCD} = 9a^2$ ，

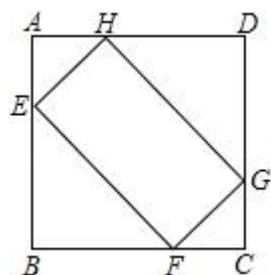
则 $BE = BF = DH = DG = 2a$ ， $AE = AH = CG = CF = a$ ，

根据勾股定理得： $EF = 2\sqrt{2}a$ ， $EH = \sqrt{2}a$ ，

$$\therefore S_{\text{矩形} EFGH} = EF \cdot EH = 4a^2,$$

则矩形 $EFGH$ 与正方形 $ABCD$ 的面积比是 $\frac{4}{9}$ 。

故答案为： $\frac{4}{9}$



【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质，矩形的性质以及正方形的性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解本题的关键。

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）[将下列各题的解答过程，做在答题纸的相应位置上]

19.（10 分）化简： $(1 - \frac{1}{x^2})^{-1} + (\frac{1}{x} - x)^{-1}$ ，并求当 $x = \sqrt{3} - 2$ 时的值。

【考点】6D：分式的化简求值。

【专题】11：计算题。

【分析】根据负整数指数幂的意义将原式化为两分式的和，再通过分后相加即可。

【解答】解：原式 = $(\frac{x^2 - 1}{x^2})^{-1} + (\frac{1 - x^2}{x})^{-1}$

$$= \frac{x^2}{x^2-1} + \frac{x}{1-x^2}$$

$$= \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x}{x+1}.$$

当 $x=\sqrt{3}-2$ 时, 原式 $= \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$

【点评】 本题考查了分式的化简求值, 熟悉负整数指数幂及通分和因式分解是解题的关键.

20. (10 分) 解方程组:
$$\begin{cases} x^2+4xy+4y^2=9 \\ x^2-y^2-4x+4y=0. \end{cases}$$

【考点】 AF: 高次方程.

【分析】 先把原方程进行变形, 得到 $x+2y = \pm 3$, 和 $x-y=0$ 或 $x+y-4=0$, 再重新组合得出 4 个二元一次方程组, 再分别解方程组即可.

【解答】 解:
$$\begin{cases} x^2+4xy+4y^2=9 & \text{①} \\ x^2-y^2-4x+4y=0 & \text{②} \end{cases},$$

由 (1) 得: $x+2y = \pm 3$,

由 (2) 得: $x-y=0$ 或 $x+y-4=0$,

原方程组可化为 $\begin{cases} x+2y=3 \\ x-y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+y-4=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+2y=-3 \\ x-y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+2y=-3 \\ x+y-4=0 \end{cases}$,

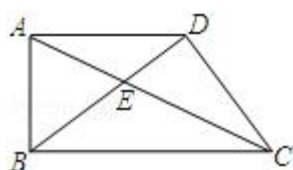
解得原方程组的解是 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2=5 \\ y_2=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_3=-1 \\ y_3=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_4=11 \\ y_4=-7 \end{cases}$.

【点评】 此题考查了高次方程, 关键是通过把两个方程分解, 得到 4 个二元一次方程组, 再根据求方程的步骤进行求解.

21. (10 分) 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB \perp AD$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 E , $BD \perp CD$, $AB = 12$, $\cot \angle ADB = \frac{4}{3}$.

求: (1) $\angle DBC$ 的余弦值;

(2) DE 的长.



【考点】 KQ: 勾股定理; LH: 梯形; S4: 平行线分线段成比例; T7: 解直角三角形.

【分析】 (1) 根据 $\cot \angle ADB = \frac{4}{3}$, 可求出 AD 的长度, 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中利用勾股定理求出 BD , 继而可得出 $\angle DBC$ 的余弦值;
(2) 在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中, 由 (1) 的答案可求出 BC 的长度, 再由平行线分线段成比例的知识可求出 DE 的长.

【解答】 解: (1) $\because \text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\cot \angle ADB = \frac{AD}{AB}$,

$$\therefore \frac{4}{3} = \frac{AD}{12},$$

则 $AD = 16$,

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle ADB,$$

$$\therefore \cos \angle DBC = \cos \angle ADB = \frac{AD}{BD} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5};$$

$$(2) \text{ 在 } \text{Rt}\triangle BCD \text{ 中, } \cos \angle DBC = \frac{BD}{BC}, \text{ 即 } \frac{4}{5} = \frac{20}{BC},$$

解得: $BC = 25$,

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{AD}{BC} = \frac{16}{25},$$

$$\therefore \frac{DE}{BD} = \frac{16}{41},$$

$$\therefore DE = \frac{16}{41} \times BD = \frac{16}{41} \times 20 = \frac{320}{41}.$$

【点评】 本题考查了梯形、勾股定理及平行线分线段成比例的知识, 解答本题的关键是熟练掌握解直角三角形的方法, 能正确表示角的三角函数.

22. (10 分) 一辆高铁列车与另一辆动车组列车在 1320 公里的京沪高速铁路上运行时, 高铁列车比动车组列车平均速度每小时快 99 公里, 用时少 3 小时, 求这辆高铁列车全程的运行时间和平均速度.

【考点】 B7: 分式方程的应用.

【分析】设这辆高铁列车全程的运行时间为 x 小时，则那辆动车组列车全程的运行时间为 $(x+3)$ 小时，根据条件建立方程求出其解就可以得出结论.

【解答】解：设这辆高铁列车全程的运行时间为 x 小时，则那辆动车组列车全程的运行时间为 $(x+3)$ 小时，由题意，得

$$\frac{1320}{x} - \frac{1320}{x+3} = 99,$$

$$\frac{40}{x} - \frac{40}{x+3} = 3.$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0,$$

$$x_1 = 5, x_2 = -8.$$

经检验：它们都是原方程的根，但 $x = -8$ 不符合题意.

$$\text{当 } x = 5 \text{ 时, } \frac{1320}{5} = 264.$$

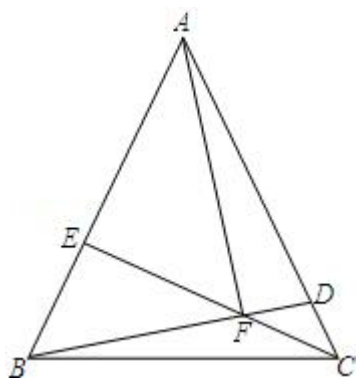
答：这辆高铁列车全程的运行时间为 5 小时，平均速度 264 公里/小时.

【点评】本题考查了列分式方程解实际问题的运用及分式方程的解法的运用，解答时根据条件建立方程是关键，解答时对求出的根必须检验，这是解分式方程的必要步骤.

23. (12 分) 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 、 E 分别在边 AC 、 AB 上， $DA = DB$ ， BD 与 CE 相交于点 F ， $\angle AFD = \angle BEC$.

求证：(1) $AF = CE$;

(2) $BF^2 = EF \cdot AF$.



【考点】KD：全等三角形的判定与性质；KH：等腰三角形的性质；S9：相似三角形的判定与性质.

【专题】14：证明题.

【分析】(1) 根据全等三角形的判定方法得出 $\triangle BFA \cong \triangle AEC$ (AAS)，即可得出

答案;

(2) 根据 $\angle EAF = \angle ECA$, $\angle FEA = \angle AEC$, 得出 $\triangle EFA \sim \triangle EAC$, 进而求出

$$\frac{EA}{EC} = \frac{EF}{EA}, \text{ 即可得出 } BF^2 = EF \cdot AF.$$

【解答】(1) 证明: $\because DA = DB$,

$$\therefore \angle FBA = \angle EAC,$$

$$\because \angle AFD = \angle BEC,$$

$$\therefore 180^\circ - \angle AFD = 180^\circ - \angle BEC,$$

$$\text{即 } \angle BFA = \angle AEC.$$

$\because$ 在 $\triangle BFA$ 和 $\triangle AEC$ 中

$$\begin{cases} \angle AFB = \angle AEC \\ \angle FBA = \angle EAC, \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BFA \cong \triangle AEC \text{ (AAS)}.$$

$$\therefore AF = CE.$$

(2) 解: $\because \triangle BFA \cong \triangle AEC$,

$$\therefore BF = AE.$$

$$\because \angle EAF = \angle ECA, \angle FEA = \angle AEC,$$

$$\therefore \triangle EFA \sim \triangle EAC.$$

$$\therefore \frac{EA}{EC} = \frac{EF}{EA}.$$

$$\therefore EA^2 = EF \cdot CE.$$

$$\because EA = BF, CE = AF,$$

$$\therefore BF^2 = EF \cdot AF.$$

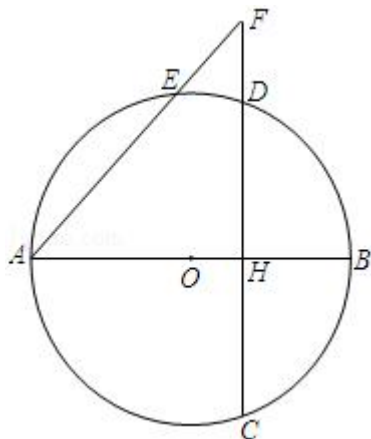
【点评】此题主要考查了相似三角形的判定与性质以及全等三角形的判定, 根据已知得出 $\angle BFA = \angle AEC$ 是解题关键.

24. (12分) 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $CD \perp AB$, 垂足为 H , $AH = 5$, $CD = 4\sqrt{5}$, 点 E 在 $\odot O$ 上, 射线 AE 与射线 CD 相交于点 F , 设 $AE = x$, $DF = y$.

(1) 求 $\odot O$ 的半径;

(2) 如图, 当点 E 在弧 AD 上时, 求 y 与 x 之间的函数解析式, 并写出函数的定义域;

(3) 如果 $EF = \frac{3}{2}$, 求 DF 的长.



【考点】MR: 圆的综合题.

【分析】(1) 连接 OD , 设 $\odot O$ 的半径 $OA = OD = r$, 根据垂径定理得 $DH = \frac{1}{2}DC = 2\sqrt{5}$, 在 $\text{Rt}\triangle OHD$ 中利用勾股定理得到 $r^2 - (5 - r)^2 = (2\sqrt{5})^2$, 然后解方程即可得到圆的半径;

(2) 作 $OG \perp AE$, 垂足为 G , 根据垂径定理得 $AG = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}x$ 且易得 $\triangle AOG \sim \triangle AFH$, 则 $AG:AH = AO:AF$, 可解得 $AF = \frac{45}{x}$, 再在 $\text{Rt}\triangle AHF$ 中利用勾股定理得到 $FH = \sqrt{AF^2 - AH^2} = \frac{5}{x}\sqrt{81 - x^2}$, 然后利用 $DF = FH - DH$ 即可得到 y 与 x 的关系式, 当 E 与 D 重合时, x 最大, 则有 $0 < x \leq 3\sqrt{5}$;

(3) 分类讨论: 当点 E 在弧 AD 上时, 由 $AF - AE = EF$ 可解出 $x = 6$, 再代入 y 与 x 的关系式中得到 $DF = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 当点 E 在弧 DB 上时, 由 $AE - AF = EF$, 可求得 $x = \frac{15}{2}$, 然后根据勾股定理计算出 $BE = \frac{3\sqrt{11}}{2}$, 再利用 $\triangle AHF \sim \triangle AEB$ 得到 $FH:BE = AH:AE$, 解得 $FH = \sqrt{11}$, 所以 $DF = DH - FH = 2\sqrt{5} - \sqrt{11}$; 当点 E 在 BC 弧上时, 同上得 $FH = \sqrt{11}$, 然后利用 $DF = DH + FH$ 计算即可.

【解答】解: (1) 连接 OD , 设 $\odot O$ 的半径 $OA = OD = r$,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $CD \perp AB$,

$$\therefore DH = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle OHD$ 中, $\because OD^2 - OH^2 = DH^2$, $OH^2 = (AH - OA)^2 = (5 - r)^2$,

$$\therefore r^2 - (5 - r)^2 = (2\sqrt{5})^2, \text{ 解得 } r = \frac{9}{2},$$

$\therefore \odot O$ 的半径为 $\frac{9}{2}$;

(2) 作 $OG \perp AE$, 垂足为 G , 如图,

$$\therefore AG = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \triangle AOG \sim \triangle AFH,$$

$$\therefore AG: AH = AO: AF, \text{ 即 } \frac{1}{2}x: 5 = \frac{9}{2}: AF, \text{ 解得 } AF = \frac{45}{x},$$

$$\therefore FH = \sqrt{AF^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{45}{x}\right)^2 - 5^2} = \frac{5}{x}\sqrt{81 - x^2},$$

$$\therefore DF = FH - DH,$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数解析式为 } y = \frac{5}{x}\sqrt{81 - x^2} - 2\sqrt{5},$$

定义域为 $0 < x \leq 3\sqrt{5}$;

(3) 当点 E 在弧 AD 上时, 如图, $\because AF - AE = EF$, 即 $\frac{45}{x} - x = \frac{3}{2}$,

化为整式方程得 $2x^2 + 3x - 90 = 0$, 解得 $x_1 = -\frac{15}{2}$ (舍去), $x_2 = 6$,

$$\therefore DF = y = \frac{5}{6}\sqrt{81 - 6^2} - 2\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

当点 E 在弧 DB 上时, 如图, $\because AE - AF = EF$, 即 $x - \frac{45}{x} = \frac{3}{2}$,

化为整式方程得 $2x^2 - 3x - 90 = 0$, 解得 $x_1 = \frac{15}{2}$, $x_2 = -6$ (舍去),

$\because AB$ 为直径,

$$\therefore \angle E = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AHF \sim \triangle AEB, BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \frac{3\sqrt{11}}{2},$$

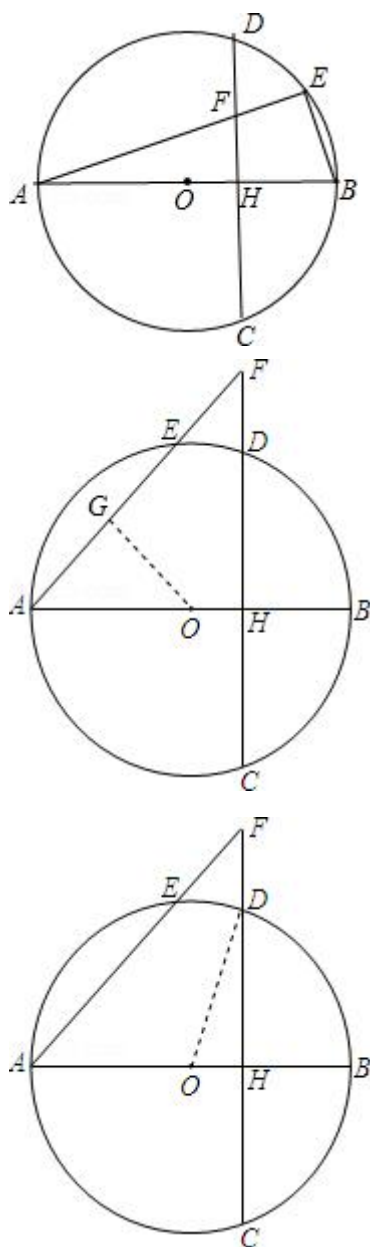
$$\therefore FH: BE = AH: AE, \text{ 即 } FH: \frac{3\sqrt{11}}{2} = 5: \frac{15}{2}, \text{ 解得 } FH = \sqrt{11}$$

$$\therefore DF = DH - FH = 2\sqrt{5} - \sqrt{11}$$

当点 E 在 BC 弧上时, 同上得 $FH = \sqrt{11}$,

$$\therefore DF = DH + FH = 2\sqrt{5} + \sqrt{11}.$$

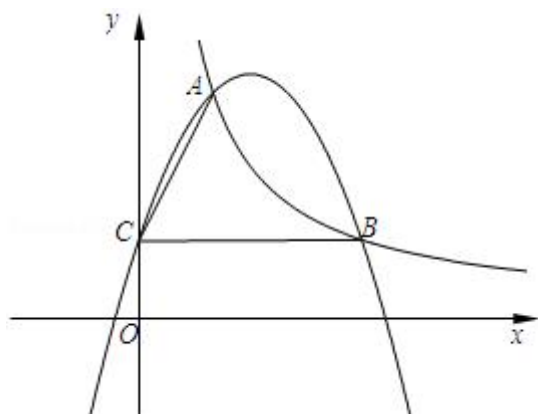
综上, DF 的长为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $2\sqrt{5} - \sqrt{11}$ 或 $2\sqrt{5} + \sqrt{11}$.



【点评】 本题考查了圆的综合题：垂径定理和圆周角定理在有关圆的几何证明或几何计算中常用到；利用三角形相似比或勾股定理进行计算几何是常用的方法．

25. (14分) 如图，点 $A(2, 6)$ 和点 B (点 B 在点 A 的右侧) 在反比例函数的图象上，点 C 在 y 轴上， $BC \parallel x$ 轴， $\tan \angle ACB = 2$ ，二次函数的图象经过 A 、 B 、 C 三点．

- (1) 求反比例函数和二次函数的解析式；
- (2) 如果点 D 在 x 轴的正半轴上，点 E 在反比例函数的图象上，四边形 $ACDE$ 是平行四边形，求边 CD 的长．



【考点】HF：二次函数综合题.

【分析】(1) 设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x}$, 由 A 的坐标可求出 k 的值, 作 $AM \perp BC$, 垂足为 M , 交 y 轴于 N , 利用已知条件求出点 B 的坐标 $(6, 2)$ 再设二次函数的解析式为 $y = ax^2 + bx + 2$, 把 A 和 B 的坐标代入求出 a 和 b 的值即可求出二次函数的解析式;

(2) 延长 AC 交 x 轴于 G , 作 $EH \perp x$ 轴, 垂足为 H , 利用已知条件可证明 $\triangle ACM \cong \triangle EDH$, 由全等三角形的性质可得: $EH = AM = 4$, $DH = CM = 2$, 进而求出点 $E(3, 4)$, 所以 $OE = 3$, $OD = OE - DH = 1$, 利用勾股定理即可求出 CD 的长.

【解答】解: (1) 设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x}$,

$\because$ 点 $A(2, 6)$ 在反比例函数的图象上,

$$\therefore 6 = \frac{k}{2},$$

$$\therefore k = 12,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{12}{x},$$

作 $AM \perp BC$, 垂足为 M , 交 x 轴于 N ,

$$\therefore CM = 2.$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACM \text{ 中, } AM = CM \cdot \tan \angle ACB = 2 \times 2 = 4,$$

$$\because BC \parallel x \text{ 轴, } OC = MN = AN - AM = 6 - 4 = 2,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标 } (0, 2).$$

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时, } y = 6,$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标 } (6, 2)$$

设二次函数的解析式为 $y = ax^2 + bx + 2$,

$$\text{则} \begin{cases} 6 = 4a + 2b + 2 \\ 2 = 36a + 6b + 2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = 3. \end{cases}$$

故二次函数的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2$;

(2) 延长 AC 交 x 轴于 G , 作 $EH \perp x$ 轴, 垂足为 H ,

$\because$ 在平行四边形 $ACDE$ 中, $AC \parallel DE$,

$$\therefore \angle AGO = \angle EDH,$$

$\because BC \parallel x$ 轴,

$$\therefore \angle ACM = \angle AGO,$$

$$\therefore \angle ACM = \angle EDH.$$

在 $\triangle ACM$ 和 $\triangle EDH$ 中

$$\begin{cases} \angle AMC = \angle EHD \\ \angle MCA = \angle HDE \\ AC = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACM \cong \triangle EDH,$$

$$\therefore EH = AM = 4, \quad DH = CM = 2.$$

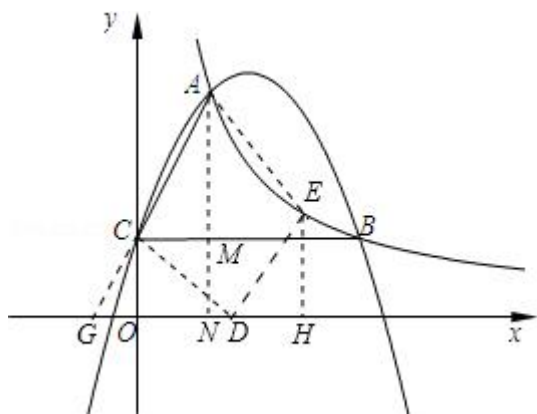
$\because E$ 点纵坐标为 4, 点 E 在反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 图象上,

$$\therefore x = 3,$$

$$\therefore \text{点 } E(3, 4),$$

$$\therefore OH = 3, \quad OD = OH - DH = 1,$$

$$\therefore CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$



【点评】 本题考查了利用待定系数法求反比例函数的解析式和二次函数的解析式、全等三角形的判定和性质以及勾股定理的运用、平行四边形的性质，题目的综合性很强，难度中等，解题的关键是正确的作出辅助线构造直角三角形．