

2013 年上海市长宁区中考数学二模试卷

一、单项选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 下列各数是无理数的是 ()

- A. 0.37 B. 3.14 C. $\frac{\pi}{2}$ D. 0

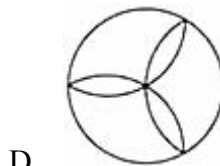
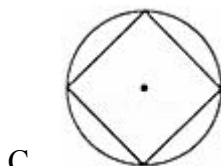
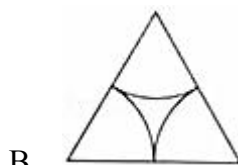
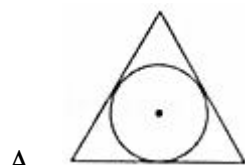
2. (4 分) 下列计算正确的是 ()

- A. $a^3 + a^2 = a^5$ B. $a^3 - a^2 = a$ C. $a^3 \cdot a^2 = a^6$ D. $a^3 \div a^2 = a$

3. (4 分) 下列二次根式中，最简二次根式是 ()

- A. $\sqrt{4}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

4. (4 分) 下列图形中，是中心对称图形的是 ()



5. (4 分) 一次函数 $y = -3x - 2$ 的图象不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

6. (4 分) 甲、乙、丙、丁四人进行射箭测试，每人 10 次射箭成绩的平均数都是 8.9 环，方差分别是 $S_{\text{甲}}^2 = 0.65$, $S_{\text{乙}}^2 = 0.55$, $S_{\text{丙}}^2 = 0.50$, $S_{\text{丁}}^2 = 0.45$ ，则射箭成绩最稳定的是 ()

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 函数 $y = \frac{x+2}{x-4}$ 的定义域是_____.

8. (4 分) 在实数范围内分解因式: $x^2 - 3 =$ _____.

9. (4 分) 不等式组: $\begin{cases} 3x \geq 6 \\ 1-2x < 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

10. (4 分) 计算: $\vec{a} - 2(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}) =$ _____.

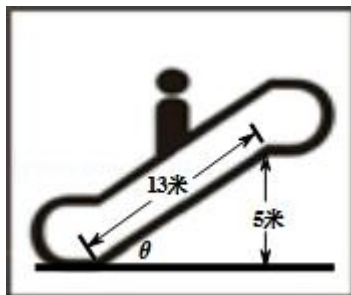
11. (4 分) 已知, $\triangle ABC$ 的重心 G 到 BC 边中点 D 的距离是 2, 则 BC 边上的

中线长是_____.

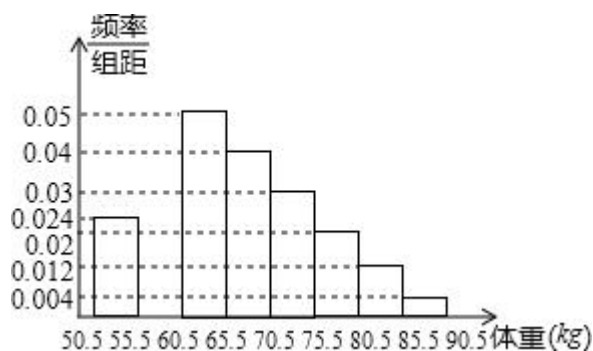
12. (4分) 方程 $\sqrt{x-1}=3$ 的根是_____.

13. (4分) 若将抛物线 $y=x^2-2x+1$ 沿着 x 轴向左平移1个单位, 再沿 y 轴向下平移2个单位, 则得到的新抛物线的顶点坐标是_____.

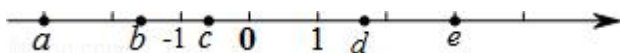
14. (4分) 如图, 某超市的自动扶梯长度为13米, 该自动扶梯到达的最大高度是5米, 设自动扶梯与地面所成的角为 θ , 则 $\tan\theta =$ _____.



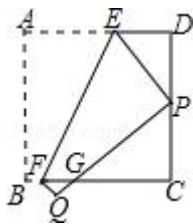
15. (4分) 为了解某区高三学生的身体发育状况, 抽查了该区100名年龄为17.5岁~18岁的男生体重(kg), 得到频率分布直方图, 从图中可知, 这100名学生中体重不小于55.5 kg 且小于65.5 kg 的学生人数是_____.



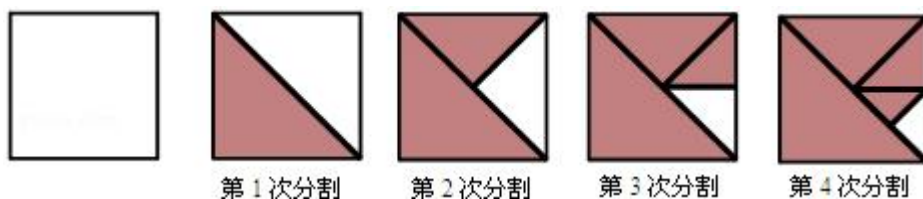
16. (4分) 若实数 x 、 y 满足: $|x| > |y|$, 则称: x 比 y 远离0. 如图, 已知 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五点在数轴上对应的实数分别是 a 、 b 、 c 、 d 、 e . 若从这五个数中随机选一个数, 则这个数比其它数都远离0的概率是_____.



17. (4分) 如图所示, 将边长为2的正方形纸片折叠, 折痕为 EF , 顶点 A 恰好落在 CD 边上的中点 P 处, B 点落在点 Q 处, PQ 与 CF 交于点 G . 设 C_1 为 $\triangle PCG$ 的周长, C_2 为 $\triangle PDE$ 的周长, 则 $C_1 : C_2 =$ _____.



18. (4分) 已知边长为 1 的正方形, 按如图所示的方式分割, 第 1 次分割后的阴影部分面积 $S_1 = \frac{1}{2}$, 第 2 次分割后的阴影部分面积 $S_2 = \frac{3}{4}$, 第 3 次分割后的阴影部分面积 $S_3 = \frac{7}{8}$, $\dots$. 按照这样的规律分割, 则第 n (n 为正整数) 次分割后的阴影部分面积可用 n 表示为 $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

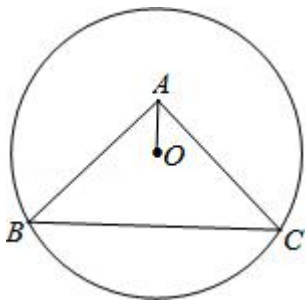


三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $(\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{3})^{-1} \tan 30^\circ - \frac{2}{2+\sqrt{3}}$.

20. (10分) 解方程: $\frac{x+1}{x^2-x} - \frac{1}{3x} = \frac{x+5}{3x-3}$

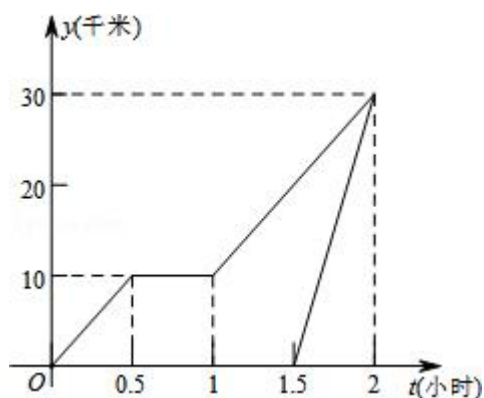
21. (10分) 如图, 已知等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 圆心 O 在 $\triangle ABC$ 内部, 且 $\odot O$ 经过 B 、 C 两点, 若 $BC = 8$, $AO = 1$, 求 $\odot O$ 的半径.



22. (10分) 周末, 小明和爸爸骑电动自行车从家里出发到郊外踏青. 从家出发 0.5 小时后到达 A 地, 游玩一段时间后再前往 B 地. 小明和爸爸离家 1.5 小时后, 妈妈驾车沿相同路线直接前往 B 地, 如图是他们离家的路程 y (千米) 与离家时间 t (小时) 的函数图象.

- (1) 根据函数图象写出小明和爸爸在 A 地游玩的时间;
- (2) 分别求小明和爸爸骑车的速度及妈妈的驾车速度;

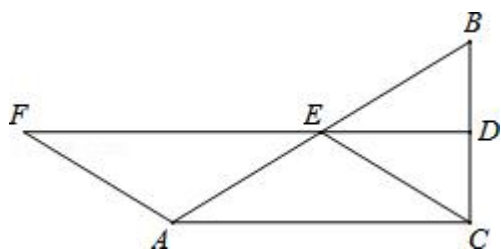
(3) 妈妈出发时, 小明和爸爸距离 B 地有多远?



23. (12 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 、 E 分别是 BC 、 BA 的中点, 连接 DE , F 在 DE 延长线上, 且 $AF = AE$.

(1) 求证: 四边形 $ACEF$ 是平行四边形;

(2) 若四边形 $ACEF$ 是菱形, 求 $\angle B$ 的度数.

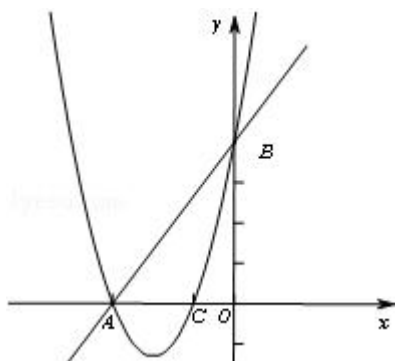


24. (12 分) 如图, 直线 AB 交 x 轴于点 A , 交 y 轴于点 B , O 是坐标原点, $A(-3, 0)$ 且 $\sin \angle ABO = \frac{3}{5}$, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 、 C 三点, $C(-1, 0)$.

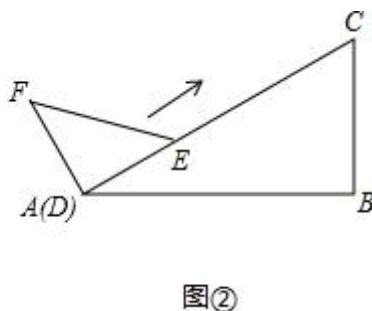
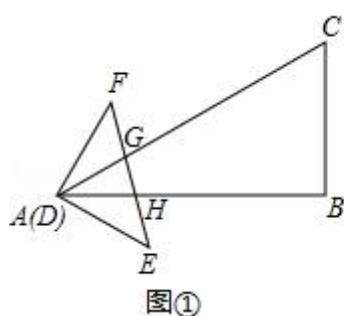
(1) 求直线 AB 和抛物线的解析式;

(2) 若点 $D(2, 0)$, 在直线 AB 上有点 P , 使得 $\triangle ABO$ 和 $\triangle ADP$ 相似, 求出点 P 的坐标;

(3) 在 (2) 的条件下, 以 A 为圆心, AP 长为半径画 $\odot A$, 再以 D 为圆心, DO 长为半径画 $\odot D$, 判断 $\odot A$ 和 $\odot D$ 的位置关系, 并说明理由.



25.(14分) $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的顶点 A 与 D 重合, 已知 $\angle B = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $BC = 6$, $\angle FDE = 90^\circ$, $DF = DE = 4$.



- (1) 如图①, EF 与边 AC 、 AB 分别交于点 G 、 H , 且 $FG = EH$. 设 $\overrightarrow{DF} = \vec{a}$, 在射线 DF 上取一点 P , 记: $\overrightarrow{DP} = x\vec{a}$, 联结 CP . 设 $\triangle DPC$ 的面积为 y , 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;
- (2) 在 (1) 的条件下, 求当 x 为何值时 $PC \parallel AB$;
- (3) 如图②, 先将 $\triangle DEF$ 绕点 D 逆时针旋转, 使点 E 恰好落在 AC 边上, 在保持 DE 边与 AC 边完全重合的条件下, 使 $\triangle DEF$ 沿着 AC 方向移动. 当 $\triangle DEF$ 移动到什么位置时, 以线段 AD 、 FC 、 BC 的长度为边长的三角形是直角三角形.

2013 年上海市长宁区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、单项选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列各数是无理数的是（ ）

A. 0.37

B. 3.14

C. $\frac{\pi}{2}$

D. 0

【考点】26：无理数.

【分析】由于无理数就是无限不循环小数. 初中范围内学习的无理数有： π ， 2π 等；开方开不尽的数；以及 0.1010010001 $\cdots$ ，等有这样规律的数，由此即可判定选择项.

【解答】解：A、0.37 是有理数，故选项错误；

B、3.14 是有理数，故选项错误；

C、 $\because \frac{\pi}{2}$ 是无限不循环小数， $\therefore \frac{\pi}{2}$ 是无理数，故选项正确；

D、0 是有理数，故选项错误.

故选：C.

【点评】此题主要考查了实数的分类. 本题容易出现的错误是把数 $\frac{\pi}{2}$ 看成分数，分数是 $\frac{A}{B}$ 的形式，其中 A、B 是整数. $\frac{\pi}{2}$ 是无理数而不是分数.

2.（4 分）下列计算正确的是（ ）

A. $a^3 + a^2 = a^5$

B. $a^3 - a^2 = a$

C. $a^3 \cdot a^2 = a^6$

D. $a^3 \div a^2 = a$

【考点】35：合并同类项；46：同底数幂的乘法；48：同底数幂的除法.

【分析】根据同类项定义；同底数幂相乘，底数不变指数相加；同底数幂相除，底数不变指数相减，对各选项分析判断后利用排除法求解.

【解答】解：A、 a^2 与 a^3 不是同类项，不能合并，故本选项错误；

B、 a^3 与 a^2 不是同类项，不能合并，故本选项错误；

C、应为 $a^3 \cdot a^2 = a^5$ ，故本选项错误；

D、 $a^3 \div a^2 = a$ ，正确.

故选：D.

【点评】本题主要考查同底数幂的乘法，同底数幂的除法，熟练掌握运算性质是解题的关键，不是同类项的一定不能合并.

3. (4分) 下列二次根式中, 最简二次根式是 ()

A. $\sqrt{4}$

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{12}$

D. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

【考点】74: 最简二次根式.

【分析】根据最简二次根式的概念: (1) 被开方数不含分母; (2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式, 结合选项即可得出答案.

【解答】解: A 、 $\sqrt{4}$ 含有能开尽方的数, 不是最简二次根式, 故本选项错误;

B 、 $\sqrt{5}$ 符合最简二次根式的定义, 故本选项正确;

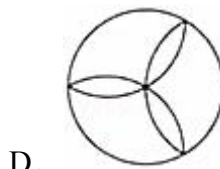
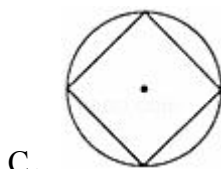
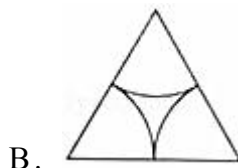
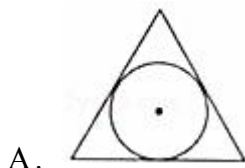
C 、 $\sqrt{12}$ 含有能开尽方的数, 不是最简二次根式, 故本选项错误;

D 、 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 被开方数含分母, 不是最简二次根式, 故本选项错误;

故选: B .

【点评】此题考查了最简二次根式的知识, 属于基础题, 解答本题关键是掌握最简二次根式的定义.

4. (4分) 下列图形中, 是中心对称图形的是 ()



【考点】R5: 中心对称图形.

【分析】根据中心对称图形的定义逐个判断即可.

【解答】解: A 、不是中心对称图形, 故本选项不符合题意;

B 、不是中心对称图形, 故本选项不符合题意;

C 、是中心对称图形, 故本选项符合题意;

D 、不是中心对称图形, 故本选项不符合题意;

故选: C .

【点评】本题考查了对中心对称图形的定义, 能熟知中心对称图形的定义是解此题的关键.

5. (4分) 一次函数 $y = -3x - 2$ 的图象不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【考点】F5: 一次函数的性质.

【分析】根据一次函数的性质容易得出结论.

【解答】解: $\because$ 解析式 $y = -3x - 2$ 中, $-3 < 0$, $-2 < 0$,

$\therefore$ 图象过二、三、四象限.

故选: A.

【点评】在直线 $y = kx + b$ 中, 当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小.

6. (4分) 甲、乙、丙、丁四人进行射箭测试, 每人 10 次射箭成绩的平均数都是 8.9 环, 方差分别是 $S_{\text{甲}}^2 = 0.65$, $S_{\text{乙}}^2 = 0.55$, $S_{\text{丙}}^2 = 0.50$, $S_{\text{丁}}^2 = 0.45$, 则射箭成绩最稳定的是 ()

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

【考点】W7: 方差.

【分析】根据方差的意义先比较出甲、乙、丙、丁四人谁的方差最小, 则谁的成绩最稳定.

【解答】解: $\because S_{\text{甲}}^2 = 0.65$, $S_{\text{乙}}^2 = 0.55$, $S_{\text{丙}}^2 = 0.50$, $S_{\text{丁}}^2 = 0.45$,

丁的方差最小,

$\therefore$ 射箭成绩最稳定的是: 丁.

故选: D.

【点评】此题考查了方差的意义, 方差是用来衡量一组数据波动大小的量, 方差越大, 表明这组数据偏离平均数越大, 即波动越大, 数据越不稳定; 反之, 方差越小, 表明这组数据分布比较集中, 各数据偏离平均数越小, 即波动越小, 数据越稳定. 在解题时要能根据方差的意义和本题的实际, 得出正确结论是本题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4分) 函数 $y = \frac{x+2}{x-4}$ 的定义域是 $x \neq 4$.

【考点】E4: 函数自变量的取值范围.

【分析】根据分式有意义的条件是分母不等于 0, 即可求得 x 的范围.

【解答】解：根据题意得： $x - 4 \neq 0$ ，

解得： $x \neq 4$ ．

故答案是： $x \neq 4$ ．

【点评】本题考查的知识点为：分式有意义，分母不为 0．

8. (4 分) 在实数范围内分解因式： $x^2 - 3 = \underline{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}$ ．

【考点】54：因式分解 - 运用公式法；58：实数范围内分解因式．

【分析】把 3 写成 $\sqrt{3}$ 的平方，然后再利用平方差公式进行分解因式．

【解答】解： $x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ ．

【点评】本题考查平方差公式分解因式，把 3 写成 $\sqrt{3}$ 的平方是利用平方差公式的关键．

9. (4 分) 不等式组： $\begin{cases} 3x \geq 6 \\ 1-2x < 0 \end{cases}$ 的解集是 $\underline{x \geq 2}$ ．

【考点】CB：解一元一次不等式组．

【分析】先求出两个不等式的解集，再求其公共解．

【解答】解： $\begin{cases} 3x \geq 6 \text{①} \\ 1-2x < 0 \text{②} \end{cases}$ ，

由①得， $x \geq 2$ ，

由②得， $x > \frac{1}{2}$ ，

所以，不等式组的解集是 $x \geq 2$ ．

故答案为： $x \geq 2$ ．

【点评】本题主要考查了一元一次不等式组解集的求法，其简便求法就是用口诀求解．求不等式组解集的口诀：同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到（无解）．

10. (4 分) 计算： $\vec{a} - 2(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}) = \underline{2\vec{b}}$ ．

【考点】LM：*平面向量．

【分析】利用平面向量的加减运算法则求解即可求得答案．

【解答】解： $\vec{a} - 2(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b})$

$$= \vec{a} - \vec{a} + 2\vec{b}$$

$$= 2\vec{b}.$$

故答案为：2 $\vec{b}$.

【点评】此题考查了平面向量的加减运算. 此题比较简单, 注意掌握运算法则是解题的关键.

11. (4分) 已知, $\triangle ABC$ 的重心 G 到 BC 边中点 D 的距离是 2, 则 BC 边上的中线长是 6.

【考点】K5: 三角形的重心.

【分析】根据三角形重心的性质: 三角形的重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的 2 倍求解即可.

【解答】解: $\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore AG = 2GD = 4;$$

$$\therefore AD = AG + GD = 6, \text{ 即 } BC \text{ 边上的中线长是 } 6.$$

故答案为: 6.

【点评】此题考查了重心的概念和性质: 三角形的重心是三角形三条中线的交点, 且重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的 2 倍.

12. (4分) 方程 $\sqrt{x-1}=3$ 的根是 $x=10$.

【考点】AG: 无理方程.

【分析】把方程两边平方去根号后求解.

【解答】解: 两边平方得: $x-1=9$

$$x=10.$$

检验: 当 $x=10$ 时,

原方程的左边 = 3, 右边 = 3

$\therefore x=10$ 是原方程的根.

故答案为: 10.

【点评】本题主要考查解无理方程, 在解无理方程是最常用的方法是两边平方法及换元法, 本题用了平方法. 注意, 要把求得的 x 的值代入原方程进行检验.

13. (4分) 若将抛物线 $y=x^2-2x+1$ 沿着 x 轴向左平移 1 个单位, 再沿 y 轴向下平移 2 个单位, 则得到的新抛物线的顶点坐标是 $(0, -2)$.

【考点】H6: 二次函数图象与几何变换.

【专题】46: 几何变换.

【分析】先配方得到 $y = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ ，则抛物线 $y = x^2 - 2x + 1$ 的顶点坐标为 $(1, 0)$ ，然后把点 $(1, 0)$ 沿着 x 轴向左平移 1 个单位，再沿 y 轴向下平移 2 个单位得到点 $(0, -2)$ 。

【解答】解：∵ $y = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ ，

∴ 抛物线 $y = x^2 - 2x + 1$ 的顶点坐标为 $(1, 0)$ ，

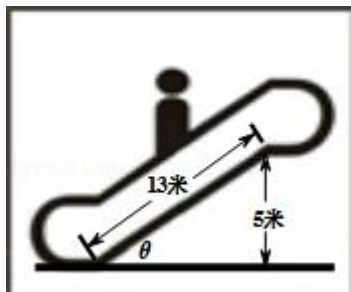
∴ 抛物线 $y = x^2 - 2x + 1$ 沿着 x 轴向左平移 1 个单位，再沿 y 轴向下平移 2 个单位，

∴ 平移后得抛物线的顶点坐标为 $(0, -2)$ 。

故答案为 $(0, -2)$ 。

【点评】本题考查了二次函数的图象与几何变换：先把二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 配成顶点式 $y = a(x - \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ ，对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$ ，顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ ；然后把抛物线的平移问题转化为顶点的平移问题。也考查了二次函数的三种形式。

14. (4 分) 如图，某超市的自动扶梯长度为 13 米，该自动扶梯到达的最大高度是 5 米，设自动扶梯与地面所成的角为 θ ，则 $\tan\theta = \frac{5}{12}$ 。



【考点】T9：解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题。

【分析】首先利用勾股定理求得水平宽度，然后利用三角函数的定义即可求解。

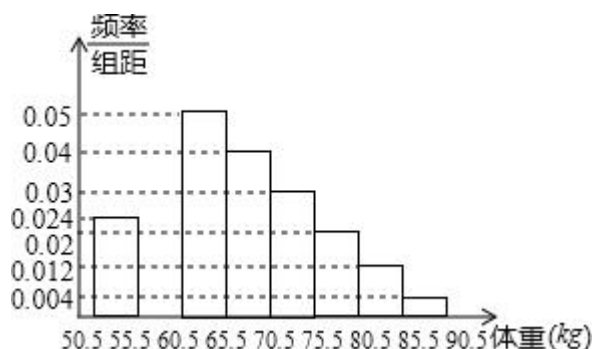
【解答】解：根据勾股定理可以得到水平宽度是： $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ 米，

则 $\tan\theta = \frac{5}{12}$ 。

故答案为 $\frac{5}{12}$ 。

【点评】本题考查了三角函数以及勾股定理，正确理解三角函数的定义是关键。

15. (4 分) 为了解某区高三学生的身体发育状况，抽查了该区 100 名年龄为 17.5 岁 ~ 18 岁的男生体重 (kg)，得到频率分布直方图，从图中可知，这 100 名学生中体重不小于 55.5kg 且小于 65.5kg 的学生人数是 35。



【考点】V8：频数（率）分布直方图.

【专题】11：计算题.

【分析】根据频率分布直方图，求出体重不小于 55.5kg 且小于 65.5kg 的学生的频率，乘以 100 即可得到结果.

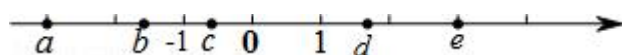
【解答】解：根据题意列得： $100 \times [1 - (0.024 + 0.04 + 0.03 + 0.02 + 0.012 + 0.004) \times 5] = 35$ （人），

则这 100 名学生中体重不小于 55.5kg 且小于 65.5kg 的学生人数是 35.

故答案为：35.

【点评】此题考查了频数（率）分布直方图，弄清题中的数据是解本题的关键.

16.（4 分）若实数 x 、 y 满足： $|x| > |y|$ ，则称： x 比 y 远离 0. 如图，已知 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五点为数轴上对应的实数分别是 a 、 b 、 c 、 d 、 e . 若从这五个数中随机选一个数，则这个数比其它数都远离 0 的概率是 0.



【考点】29：实数与数轴；X4：概率公式.

【专题】2C：存在型.

【分析】根据 $|x| > |y|$ ，则称： x 比 y 远离 0，利用 $|a| = |e|$ ，且两数绝对值最大，进而得出随机选一个数，这个数比其它数都远离 0 的概率.

【解答】解： $\because a$ 对应实数为 -3 ， e 对应实数为 3 ， b ， c ， d 对应数绝对值都小于 3，

$\therefore$ 无论得到哪一个数，则这个数不可能比其它数都远离 0，

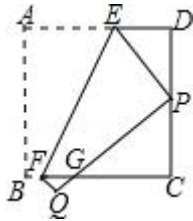
故这个数比其它数都远离 0 的概率是：0.

故答案为：0.

【点评】此题主要考查了概率公式的应用以及根据材料获取正确的信息，得出 $|a|$

$=|e|$ 是解题关键.

17. (4分) 如图所示, 将边长为 2 的正方形纸片折叠, 折痕为 EF , 顶点 A 恰好落在 CD 边上的中点 P 处, B 点落在点 Q 处, PQ 与 CF 交于点 G . 设 C_1 为 $\triangle PCG$ 的周长, C_2 为 $\triangle PDE$ 的周长, 则 $C_1: C_2 = \underline{4: 3}$.



【考点】 PB: 翻折变换 (折叠问题).

【分析】 根据翻折的性质可得 $EP = AE$, 设 $ED = x$, 表示出 EP , 然后在 $\text{Rt}\triangle EDP$ 中利用勾股定理列式求解得到 x 的值, 再求出 $\triangle EPD$ 和 $\triangle PGC$ 相似, 根据相似三角形周长的比等于相似比解答.

【解答】 解: 由翻折性质可得 $EP = AE$,

设 $ED = x$, 则 $EP = AE = 2 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle EDP$ 中, $EP^2 = ED^2 + DP^2$,

即 $(2 - x)^2 = x^2 + 1^2$,

解得: $x = \frac{3}{4}$,

$\therefore \angle PED + \angle EPD = 180^\circ - \angle D = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$,

$\angle EPD + \angle GPC = 180^\circ - \angle EPG = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$,

$\therefore \angle EPD = \angle GPC$,

又 $\therefore \angle D = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \triangle EPD \sim \triangle PGC$,

$\therefore \triangle EDP$ 与 $\triangle PCG$ 的周长之比 $= \frac{DE}{PC} = \frac{3}{4}$,

$\therefore$ 设 C_1 为 $\triangle PCG$ 的周长, C_2 为 $\triangle PDE$ 的周长, 则 $C_1: C_2 = 4: 3$.

故答案为: $4: 3$.

【点评】 本题考查了翻折变换的性质, 勾股定理, 相似三角形的判定, 相似三角形周长的比等于相似比的性质, 利用勾股定理列式求出 ED 的长是解题的关键.

18. (4分) 已知边长为 1 的正方形, 按如图所示的方式分割, 第 1 次分割后的

阴影部分面积 $S_1 = \frac{1}{2}$, 第 2 次分割后的阴影部分面积 $S_2 = \frac{3}{4}$, 第 3 次分割后的阴影部分面积 $S_3 = \frac{7}{8}$, $\dots$. 按照这样的规律分割, 则第 n (n 为正整数) 次分

割后的阴影部分面积可用 n 表示为 $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$.



【考点】 38: 规律型: 图形的变化类.

【分析】 根据第一次为 $S_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, 第二次为 $S_2 = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$, $\dots$, 从而得到规律.

【解答】 解: 第一次为 $S_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$,

第二次为 $S_2 = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$,

$S_3 = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}$,

$\dots$

$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$,

故答案为: $1 - \frac{1}{2^n}$.

【点评】 本题考查了图形的变化类问题, 关键是通过归纳与总结, 得到其中的规律. 注意由特殊到一般的分析方法.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $(\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{3})^{-1} \tan 30^\circ - \frac{2}{2+\sqrt{3}}$.

【考点】 6F: 负整数指数幂; 79: 二次根式的混合运算; T5: 特殊角的三角函数值.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 根据负整数指数幂、特殊角的三角函数值和分母有理化得到原式 $= 2 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 2(2 - \sqrt{3})$, 然后进行乘法运算后合并即可.

【解答】解：原式 $= 2 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 2(2 - \sqrt{3})$
 $= 2 + \sqrt{3} - 4 + 2\sqrt{3}$
 $= 3\sqrt{3} - 2.$

【点评】本题考查了二次根式的混合运算：先把各二次根式化为最简二次根式，在进行二次根式的乘除运算，然后合并同类二次根式．也考查了负整数指数幂以及特殊角的三角函数值．

20. (10分) 解方程： $\frac{x+1}{x^2-x} - \frac{1}{3x} = \frac{x+5}{3x-3}$

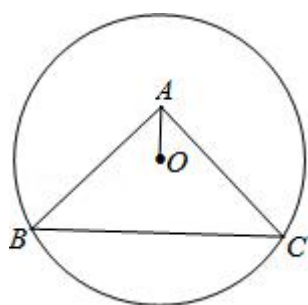
【考点】A8：解一元二次方程 - 因式分解法；B3：解分式方程．

【分析】本题的最简公分母是 $3x(x-1)$ ，方程两边都乘最简公分母，可把分式方程转换为整式方程求解．

【解答】解：方程两边都乘 $3x(x-1)$ ，
 得： $3(x+1) - (x-1) = (x+5)x$ ，
 整理得： $x^2 + 3x - 4 = 0$ ，解得： $x_1 = -4$ ， $x_2 = 1$ ．
 经检验： $x = -4$ 是原方程的解．

【点评】当分母是多项式，又能进行因式分解时，应先进行因式分解，再确定最简公分母．

21. (10分) 如图，已知等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，圆心 O 在 $\triangle ABC$ 内部，且 $\odot O$ 经过 B 、 C 两点，若 $BC = 8$ ， $AO = 1$ ，求 $\odot O$ 的半径．



【考点】KQ：勾股定理；M2：垂径定理．

【分析】连结 BO 、 CO ，延长 AO 交 BC 于点 D ，由于 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，故 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，再根据 $OB = OC$ ，可知直线 OA 是线段 BC 的垂直平分线，故 $AD \perp BC$ ，且 D 是 BC 的中点，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中根据 $AD = BD = \frac{1}{2}BC$ ，可得出 $BD = AD$ ，再根据 $AO = 1$ 可求出 OD 的长，再根据勾股定理可得出 OB

的长.

【解答】解: 连结 BO 、 CO , 延长 AO 交 BC 于 D .

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore AB = AC$

$\because O$ 是圆心,

$\therefore OB = OC$,

$\therefore$ 直线 OA 是线段 BC 的垂直平分线,

$\therefore AD \perp BC$, 且 D 是 BC 的中点,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AD = BD = \frac{1}{2}BC$,

$\because BC = 8$,

$\therefore BD = AD = 4$,

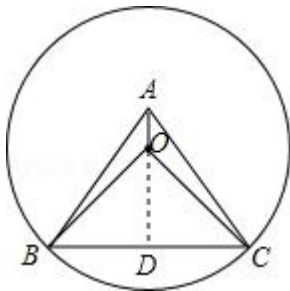
$\because AO = 1$,

$\therefore OD = BD - AO = 3$,

$\because AD \perp BC$,

$\therefore \angle BDO = 90^\circ$,

$\therefore OB = \sqrt{OD^2 + BD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.



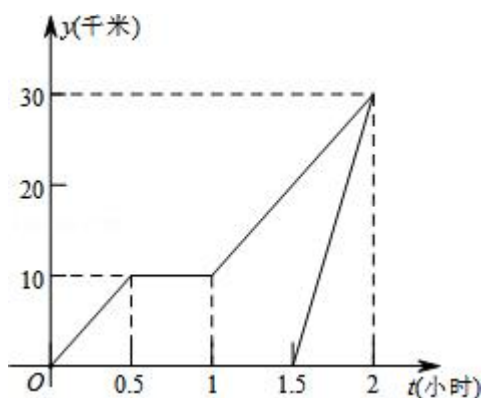
【点评】 本题考查的是垂径定理, 根据题意作出辅助线, 构造出直角三角形, 利用勾股定理求解是解答此题的关键.

22. (10 分) 周末, 小明和爸爸骑电动自行车从家里出发到郊外踏青. 从家出发 0.5 小时后到达 A 地, 游玩一段时间后再前往 B 地. 小明和爸爸离家 1.5 小时后, 妈妈驾车沿相同路线直接前往 B 地, 如图是他们离家的路程 y (千米) 与离家时间 t (小时) 的函数图象.

(1) 根据函数图象写出小明和爸爸在 A 地游玩的时间;

(2) 分别求小明和爸爸骑车的速度及妈妈的驾车速度;

(3) 妈妈出发时, 小明和爸爸距离 B 地有多远?



【考点】 FH: 一次函数的应用.

【分析】(1) 由函数图象可以直接得出小明和爸爸在 A 地游玩的时间为 0.5 小时;

(2) 根据速度 = 路程 $\div$ 时间就可以分别求出骑车的速度和驾车的速度;

(3) 根据题意可以知道妈妈出发时小明和爸爸在路上行驶的时间为 1 小时, 由路程 = 速度 $\times$ 时间久可以得出结论.

【解答】 解: (1) 由函数图象得:

小明和爸爸在 A 地游玩的时间为: 0.5 小时;

(2) 由图象, 得

骑车速度: $10 \div 0.5 = 20$ 千米/小时,

驾车速度: $30 \div 0.5 = 60$ 千米/小时;

(3) 由图象得:

妈妈出发时小明和爸爸在路上行驶的时间为 1 小时,

$\therefore$ 小明和爸爸骑车的速度为 20 千米/小时,

$\therefore$ 小明和爸爸骑车行驶的路程为 $1 \times 20 = 20$ 千米,

$\therefore$ 妈妈出发时, 小明和爸爸距离 B 地的距离为: $30 - 20 = 10$,

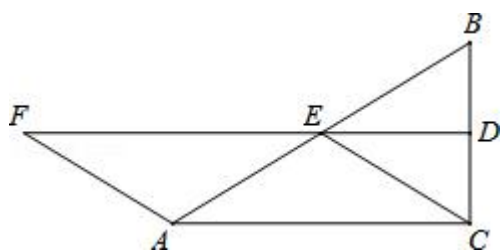
$\therefore$ 妈妈出发时, 小明和爸爸离 B 地 10 千米.

【点评】 本题考查了学生阅读函数图象的能力和理解的能力的运用, 速度 = 路程 $\div$ 时间的关系式的运用, 解答本题时分析清楚函数图象的数量关系式解答本题的关键.

23. (12 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 、 E 分别是 BC 、 BA 的中点, 连接 DE , F 在 DE 延长线上, 且 $AF = AE$.

(1) 求证: 四边形 $ACEF$ 是平行四边形;

(2) 若四边形 $ACEF$ 是菱形, 求 $\angle B$ 的度数.



【考点】L6: 平行四边形的判定; L8: 菱形的性质.

【专题】14: 证明题.

【分析】(1) 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 $CE = AE = BE$, 从而得到 $AF = CE$, 再根据等腰三角形三线合一的性质可得 $\angle 1 = \angle 2$, 根据等边对等角可得然后 $\angle F = \angle 3$, 然后求出 $\angle 2 = \angle F$, 再根据同位角相等, 两直线平行求出 $CE \parallel AF$, 然后利用一组对边平行且相等的四边形是平行四边形证明;

(2) 根据菱形的四条边都相等可得 $AC = CE$, 然后求出 $AC = CE = AE$, 从而得到 $\triangle AEC$ 是等边三角形, 再根据等边三角形的每一个角都是 60° 求出 $\angle CAE = 60^\circ$, 然后根据直角三角形两锐角互余解答.

【解答】(1) 证明: $\because \angle ACB = 90^\circ$, E 是 BA 的中点,

$$\therefore CE = AE = BE,$$

$$\because AF = AE,$$

$$\therefore AF = CE,$$

在 $\triangle BEC$ 中, $\because BE = CE$ 且 D 是 BC 的中点,

$$\therefore ED \text{ 是等腰 } \triangle BEC \text{ 底边上的中线},$$

$$\therefore ED \text{ 也是等腰 } \triangle BEC \text{ 的顶角平分线},$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\because AF = AE,$$

$$\therefore \angle F = \angle 3,$$

$$\because \angle 1 = \angle 3,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle F,$$

$$\therefore CE \parallel AF,$$

$$\text{又 } \because CE = AF,$$

∴ 四边形 $ACEF$ 是平行四边形；

(2) 解：∵ 四边形 $ACEF$ 是菱形，

∴ $AC = CE$ ，

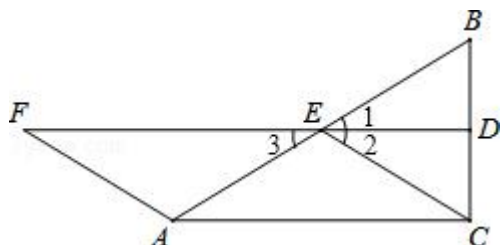
由 (1) 知， $AE = CE$ ，

∴ $AC = CE = AE$ ，

∴ $\triangle AEC$ 是等边三角形，

∴ $\angle CAE = 60^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ - \angle CAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ 。



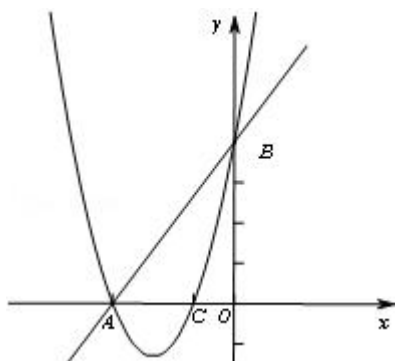
【点评】 本题考查了菱形的性质，平行四边形的判定，等边三角形的判定与性质，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，以及直角三角形两锐角互余的性质，熟记各性质与判定方法是解题的关键。

24. (12 分) 如图，直线 AB 交 x 轴于点 A ，交 y 轴于点 B ， O 是坐标原点， $A(-3, 0)$ 且 $\sin \angle ABO = \frac{3}{5}$ ，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 、 C 三点， $C(-1, 0)$ 。

(1) 求直线 AB 和抛物线的解析式；

(2) 若点 $D(2, 0)$ ，在直线 AB 上有点 P ，使得 $\triangle ABO$ 和 $\triangle ADP$ 相似，求出点 P 的坐标；

(3) 在 (2) 的条件下，以 A 为圆心， AP 长为半径画 $\odot A$ ，再以 D 为圆心， DO 长为半径画 $\odot D$ ，判断 $\odot A$ 和 $\odot D$ 的位置关系，并说明理由。



【考点】HF：二次函数综合题．

【分析】（1）根据 $\sin \angle ABO$ 的值求出 AB 、 OB 的长度，从而得出点 B 的坐标，利用待定系数法可求出直线 AB 的解析式及抛物线解析式；

（2）根据（1）求出的直线 AB 的解析式，可设点 P 的坐标为 $(x, \frac{4}{3}x+4)$ ，① $\triangle$

$ABO \sim \triangle APD$ ，② $\triangle ABO \sim \triangle ADP$ ，利用对应边成比例求出点 P 的坐标；

（3）根据（2）的答案，求出每种情况下的圆心距，继而可判断 $\odot A$ 和 $\odot D$ 的位置关系．

【解答】解：（1）在 $\text{Rt} \triangle ABO$ 中 $\sin \angle ABO = \frac{OA}{AB} = \frac{3}{5}$ ，

$$\therefore OA = 3,$$

$$\therefore AB = 5$$

$$\text{则 } OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = 4,$$

故点 B 的坐标为：(0, 4)，

设直线 AB 解析式为： $y = kx + b$ ($k \neq 0$)，

将 $A(-3, 0)$ 、 $B(0, 4)$ 代入得 $\begin{cases} -3k + b = 0 \\ b = 4 \end{cases}$ ，

$$\text{解得：} \begin{cases} k = \frac{4}{3} \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\therefore AB \text{ 直线解析式：} y = \frac{4}{3}x + 4.$$

将 $A(-3, 0)$ 、 $C(-1, 0)$ 、 $B(0, 4)$ 代入抛物线解析式可得： $\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases}$ ，

$$\text{解得: } \begin{cases} a=\frac{4}{3} \\ b=\frac{16}{3} \\ c=4 \end{cases}$$

故抛物线解析式: $y = \frac{4}{3}x^2 + \frac{16}{3}x + 4$.

(2) 设 $P(x, \frac{4}{3}x+4)$, 已知 D 的坐标为: $(2, 0)$,

①若 $\triangle ABO \sim \triangle APD$,

$$\text{则 } \frac{AO}{AD} = \frac{AB}{AP} = \frac{BO}{PD}, \text{ 即 } \frac{3}{5} = \frac{4}{DP},$$

$$\text{解得: } DP = \frac{20}{3},$$

故点 P 的坐标为 $(2, \frac{20}{3})$.

②若 $\triangle ABO \sim \triangle ADP$,

$$\text{则 } \frac{AB}{AD} = \frac{AO}{AP}, \text{ 即 } \frac{5}{5} = \frac{3}{AP},$$

$$\text{解得: } AP = 3,$$

$$\text{则 } (x+3)^2 + (\frac{4}{3}x+4)^2 = 3^2,$$

$$\text{解得: } x_1 = -\frac{6}{5}, x_2 = -\frac{24}{5} \text{ (不符合题意, 舍去),}$$

故点 P 的坐标为: $(-\frac{6}{5}, \frac{12}{5})$.

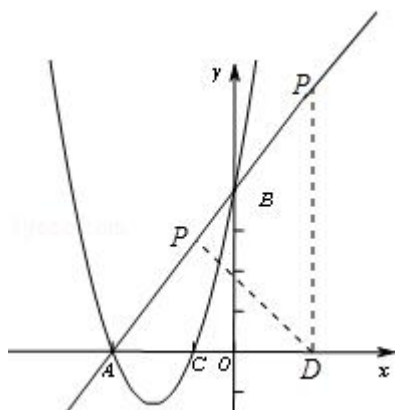
(3) $\odot D$ 的半径 $r = 2$,

当点 P 的坐标为 $(2, \frac{20}{3})$ 时, $\odot A$ 的半径 $AP = \frac{25}{3}$, $AD = 5 < \frac{25}{3} - 2$,

故此时两圆内含;

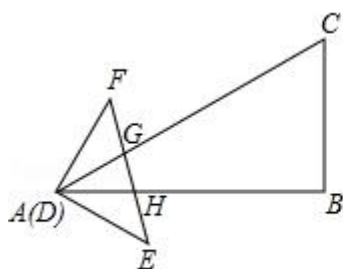
当点 P 的坐标为: $(-\frac{6}{5}, \frac{12}{5})$ 时, $\odot A$ 的半径 $AP = 3$, $AD = 5 = 3 + 2$,

故此时两圆外切.

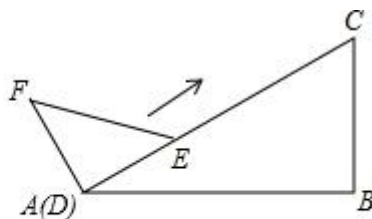


【点评】 本题考查了二次函数综合题，涉及了待定系数法求函数解析式，第二问需要分类讨论，不要漏解，第三问要求同学们掌握判断圆与圆位置关系的方法，有一定难度.

25. (14分) $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的顶点 A 与 D 重合, 已知 $\angle B = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $BC = 6$, $\angle FDE = 90^\circ$, $DF = DE = 4$.



图①



图②

- (1) 如图①, EF 与边 AC 、 AB 分别交于点 G 、 H , 且 $FG = EH$. 设 $\overrightarrow{DF} = \vec{a}$, 在射线 DF 上取一点 P , 记: $\overrightarrow{DP} = x\vec{a}$, 联结 CP . 设 $\triangle DPC$ 的面积为 y , 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;
- (2) 在 (1) 的条件下, 求当 x 为何值时 $PC \parallel AB$;
- (3) 如图②, 先将 $\triangle DEF$ 绕点 D 逆时针旋转, 使点 E 恰好落在 AC 边上, 在保持 DE 边与 AC 边完全重合的条件下, 使 $\triangle DEF$ 沿着 AC 方向移动. 当 $\triangle DEF$ 移动到什么位置时, 以线段 AD 、 FC 、 BC 的长度为边长的三角形是直角三角形.

【考点】 RB: 几何变换综合题.

【分析】 (1) 首先证明 $\triangle DFG \cong \triangle DEH$ (SAS), 进而得出 $\angle FDG = \angle EDH$, 进而得出 $DF = |\overrightarrow{DP}| = x|\vec{a}| = x|\overrightarrow{DF}| = 4x$, 在 $\text{Rt}\triangle DPH$ 中, $\angle FDG = 30^\circ$, 可得 PH'

$$= \frac{1}{2}DP = 2x, \text{ 由 } y = S_{\triangle PDC} = \frac{1}{2}DC \cdot PH' \text{ 求出即可};$$

(2) 由(1)知 $\angle FDG = 30^\circ$, 得出 $\angle FDG = \angle DCP$, 以及 $DP = PC$ 若 $PH \perp AB$ 则 M 是 DC 的中点 $DM = 6$, 在 $\text{Rt}\triangle DPH$ 中, $\angle FDG = 30^\circ$, 利用 $\cos \angle FDG = \frac{DM}{DP}$ 求出 DP 的长, 进而得出 x 的值;

(3) 分别利用线段 AD 、 FC 、 BC 的长为斜边时求出符合条件的值即可.

【解答】 解: (1) 如图①, 过 P 作 $PH' \perp AC$ 于 H' .

$$\because DF = DE,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle E$$

$$\text{又} \because FG = EH,$$

在 $\triangle DFG$ 和 $\triangle DEH$ 中

$$\begin{cases} FD = ED \\ \angle DFG = \angle DEH, \\ FG = EH \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DFG \cong \triangle DEH \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle FDG = \angle EDH,$$

$$\because \angle FDE = 90^\circ, \text{ 且 } \angle FDE = \angle FDG + \angle EDH + \angle BAC$$

$$\because \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle FDG = 30^\circ,$$

$$\because DF = 4, \therefore |\overrightarrow{DF}| = 4$$

$$\because \overrightarrow{DP} = x \overrightarrow{a} = x \overrightarrow{DF},$$

$$\therefore DP = |\overrightarrow{DP}| = x |\overrightarrow{a}| = x |\overrightarrow{DF}| = 4x,$$

在 $\text{Rt}\triangle DPH$ 中, $\angle FDG = 30^\circ$,

$$\therefore PH' = \frac{1}{2}DP = 2x,$$

$$\angle B = 90^\circ, \angle BAC = 30^\circ, BC = 6,$$

$$\therefore AC = CD = 12,$$

$$y = S_{\triangle PDC} = \frac{1}{2}DC \cdot PH' = \frac{1}{2} \times 12 \cdot 2x = 12x \quad (x > 0);$$

(2) $\because PC \parallel AB$,

$$\therefore \angle BAC = \angle DCP$$

$$\because \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DCP = 30^\circ,$$

由 (1) 知 $\angle FDG = 30^\circ$,

$$\therefore \angle FDG = \angle DCP,$$

$$\therefore DP = PC$$

若 $PH \perp AB$, 则 M 是 DC 的中点 $DM = 6$,

在 $\text{Rt}\triangle DPH$ 中, $\angle FDG = 30^\circ$,

$$\cos \angle FDG = \frac{DM}{DP} = \frac{6}{DP} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore DP = 4\sqrt{3},$$

$$DP = AP = 4x,$$

$$\therefore x = \sqrt{3};$$

(3) 如图②, 设 $AD = t$, $DC = 12 - t$ ($0 < t < 8$)

$$FC^2 = DF^2 + DC^2 = 4^2 + (12 - t)^2,$$

$$\textcircled{1} AD^2 = FC^2 + BC^2$$

$$t^2 = 4^2 + (12 - t)^2 + 36$$

解得: $t = \frac{49}{6}$ (故不合题意, 舍去)

$$\textcircled{2} BC^2 = FC^2 + AD^2$$

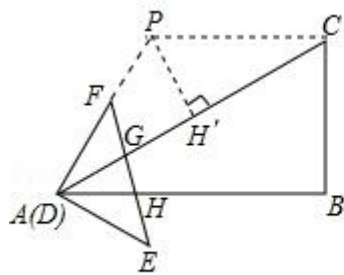
$$36 = 4^2 + (12 - t)^2 + t^2, \text{ 无解,}$$

$$\textcircled{3} FC^2 = BC^2 + AD^2$$

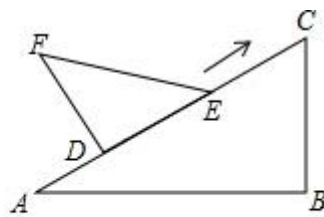
$$\therefore 4^2 + (12 - t)^2 = 36 + t^2$$

$$\text{解得 } t = \frac{31}{6},$$

$\therefore$ 当 $\triangle DEF$ 移动到 $AD = \frac{31}{6}$ 时, 以线段 AD 、 FC 、 BC 的长度为边长的三角形是直角三角形.



图①



图②

【点评】此题主要考查了几何变换综合题中勾股定理的应用以及全等三角形的判定与性质和锐角三角函数关系的应用等知识，注意利用分类讨论得出是解题关键．