

2013 年上海市金山区中考数学二模试卷

一、选择题（共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）

1. (3 分) 下列各式中与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是 ()
A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{8}$ C. $\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{3}$
2. (3 分) 满足不等式 $-2x < 8$ 的最小整数解是 ()
A. -3 B. -2 C. -1 D. 0
3. (3 分) 在平面直角坐标系中，一次函数 $y = -3x + 1$ 的图象不经过 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
4. (3 分) 一位射箭选手在训练中，五次射箭的成绩分别是 10, 7, 8, 10, 10 (单位：环). 这组数据的平均数和众数分别是 ()
A. 8, 7 B. 8, 10 C. 9, 8 D. 9, 10
5. (3 分) 下列命题中，逆命题正确的是 ()
A. 对顶角相等
B. 两直线平行，同位角相等
C. 全等三角形对应角相等
D. 等腰三角形是轴对称图形
6. (3 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ， CP 、 CM 分别是 AB 上的高和中线，如果圆 A 是以点 A 为圆心，半径长为 2 的圆，那么下列判断正确的是 ()
A. 点 P ， M 均在圆 A 内
B. 点 P 、 M 均在圆 A 外
C. 点 P 在圆 A 内，点 M 在圆 A 外
D. 点 P 在圆 A 外，点 M 在圆 A 内

二、填空题

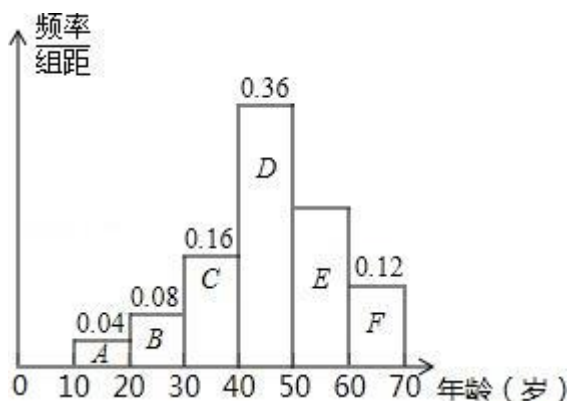
7. (3 分) 计算： $|\sqrt{2}| = \underline{\hspace{2cm}}$.
8. (3 分) 分解因式： $x^2 - 4 = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. (3 分) 方程 $\sqrt{2x+3} = -x$ 的根是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
10. (3 分) 方程 $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ 的根是 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.
11. (3 分) 如果关于 x 的一元二次方程： $mx^2 + x + 1 = 0$ (m 为常数) 有两个实数

根，那么 m 的取值范围是_____.

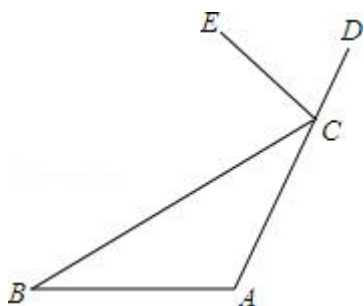
12. (3分) 已知正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $(1, -2)$ ，那么正比例函数的解析式为_____.

13. (3分) 在六张大小质地相同的卡片分别写上 2010, 2011, 2013, 2013, 2013, 2014，随机抽取一张，抽取的卡片上的数字是偶数的概率是_____.

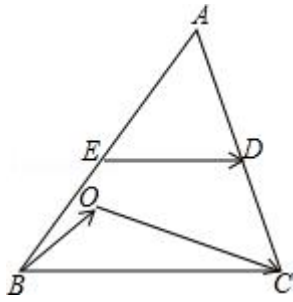
14. (3分) 为了解各年龄段观众对某电视节目的收视率，小明调查了部分观众的收视情况，并分成 A, B, C, D, E, F 六组进行调查，其频率分布直方图如图所示，各长方形上方的数据表示该组的频率，若 E 组的频数为 48，那么被调查的观众总人数为_____.



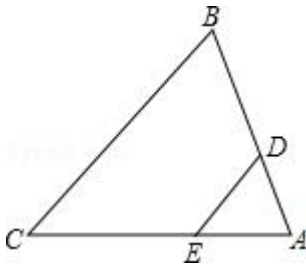
15. (3分) 如图，已知， $AB = AC$ ， CE 平分 $\angle BCD$ ， $\angle A = 120^\circ$ ，那么 $\angle ACE$ = _____.



16. (3分) 如图，已知点 D, E 分别是边 AC 和 AB 的中点，设 $\overrightarrow{BO} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{ED} =$ _____ (用 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 来表示)



17. (3分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $BC \parallel DE$, $S_{\triangle ADE} : S_{\text{四边形}BDEC} = 1 : 8$, $AB = a$, 那么 $BD = \underline{\hspace{2cm}}$ (用 a 的代数式来表示)



18. (3分) 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{3}$, 点 E 在 DC 上, 且 $\angle DAE = 30^\circ$, 若将 $\triangle ADE$ 绕着点 A 顺时针旋转 60° , 点 D 至 D' 处, 点 E 至 E' 处, 那么 $\triangle AD'E'$ 与四边形 $ABCE$ 重叠部分的面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三. 解答题

19. (6分) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-x} \cdot \frac{x}{x+1} - (\frac{x-1}{x})^{-1}$, 其中 $x = \sqrt{2}+1$.

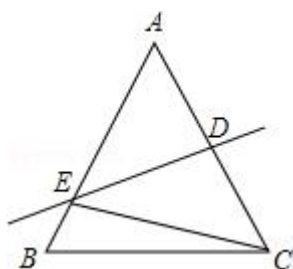
20. (6分) 解方程组:
$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+4xy+4y^2=25 \end{cases}$$

21. (6分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, DE 是 AC 的垂直平分线, 交 AC 于点 D , AB 于点 E , 若 $BC = 8$, $\triangle BCE$ 的周长为

21, $\cos \angle B = \frac{5}{13}$.

求: (1) AB 的长;

(2) AC 的长.



22. (7分) 某工厂计划生产甲、乙两种型号的机器 200 台, 生产机器一定要有 A 、 B 两种材料, 现厂里有 A 种材料 10000 吨, B 种材料 6000 吨, 已知生产一台甲机器和一台乙机器所需 A 、 B 两种材料的数量和售后利润如下表所示:

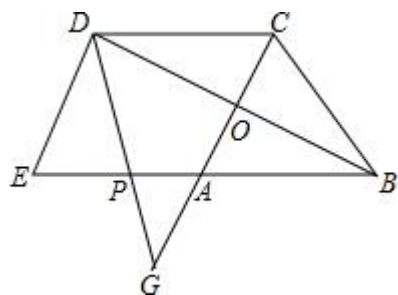
机器型号	A 种材料	B 种材料	售后利润
甲	55 吨	20 吨	5 万元
乙	40 吨	36 吨	6 万元

设生产甲种型号的机器 x 台, 售后的总利润为 y 万元.

- (1) 写出 y 与 x 的函数关系式;
- (2) 若你是厂长, 要使工厂所获利润最大, 那么如何安排生产? (请结合所学函数知识说明理由).

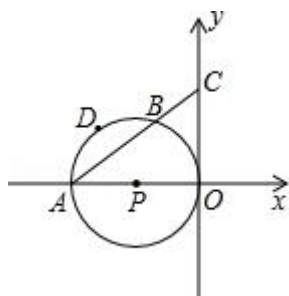
23. (7分) 如图, 已知在等腰三角形 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, BO 是 AC 边上的中线, 延长 BO 至 D , 使得 $DO = BO$; 延长 BA 至 E , 使 $AE = AB$, 联结 CD 、 DE , 在 AE 取一点 P , 联结 DP , 并延长 DP 、 CA 交于点 G . 求证:

- (1) 四边形 $ACDE$ 是菱形;
- (2) $AE^2 = CG \cdot EP$.



24. (7分) 如图, 已知点 $P(-4, 0)$, 以点 P 为圆心 PO 长为半径作圆交 x 轴于点 A 、 O 两点. 过点 A 作直线 AC 交 y 轴于点 C , 与圆 P 交于点 B , $\sin \angle CAO = \frac{3}{5}$.

- (1) 求点 C 的坐标;
- (2) 若点 D 是弧 AB 的中点, 求经过 A 、 D 、 O 三点的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$);
- (3) 若直线 $y = kx + b$ 经过点 $M(2, 0)$, 当直线 $y = kx + b$ 与圆 P 相交时, 求 b 的取值范围.

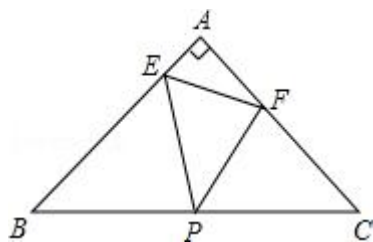


25. (7分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=2$, $\angle A=90^\circ$, P 为 BC 的中点, E 、 F 分别是 AB 、 AC 上的动点, $\angle EPF=45^\circ$.

(1) 求证: $\triangle BPE \sim \triangle CFP$.

(2) 设 $BE=x$, $\triangle PEF$ 的面积为 y , 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出 x 的取值范围.

(3) 当 E 、 F 在运动过程中, $\angle EFP$ 是否可能等于 60° ? 若可能求出 x 的值, 若不可能请说明理由.



2013 年上海市金山区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）

1.（3 分）下列各式中与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{8}$ C. $\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{3}$

【考点】77：同类二次根式.

【分析】先将 4 个选项化简为最简二次根式，然后找出与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的选项.

【解答】解： A 、 $\sqrt{6}$ 是最简二次根式，但与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式，故 A 错误；

B 、 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ，与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式，故 B 正确；

C 、 $\sqrt{10}$ 是最简二次根式，但与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式，故 C 错误；

D 、 $2\sqrt{3}$ 是最简二次根式，但与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式，故 D 错误；

故选： B .

【点评】此题主要考查了同类二次根式的定义，即化成最简二次根式后，被开方数相同，这样的二次根式叫做同类二次根式.

2.（3 分）满足不等式 $-2x < 8$ 的最小整数解是（ ）

- A. -3 B. -2 C. -1 D. 0

【考点】C7：一元一次不等式的整数解.

【专题】11：计算题.

【分析】不等式左右两边除以 -2 变形后求出 x 的范围，即为不等式的解集，找出解集中的最小整数解即可.

【解答】解：不等式解得： $x > -4$ ，

则不等式的最小整数解为 -3 .

故选： A .

【点评】此题考查了一元一次不等式的整数解，求出不等式的解集是解本题的关键.

3.（3 分）在平面直角坐标系中，一次函数 $y = -3x+1$ 的图象不经过（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【考点】F5：一次函数的性质.

【专题】11：计算题.

【分析】由直线的解析式得到 $k < 0$, $b > 0$, 利用一次函数的性质即可确定直线经过的象限.

【解答】解: $\because y = -x + 1$,

$\therefore k < 0$, $b > 0$,

故直线经过第一、二、四象限.

不经过第三象限.

故选: C.

【点评】此题主要考查一次函数的图象和性质, 它的图象经过的象限由 k , b 的符号来确定.

4. (3分) 一位射箭选手在训练中, 五次射箭的成绩分别是 10, 7, 8, 10, 10 (单位: 环). 这组数据的平均数和众数分别是 ()

A. 8, 7 B. 8, 10 C. 9, 8 D. 9, 10

【考点】W2: 加权平均数; W5: 众数.

【分析】根据众数及平均数的定义进行计算即可.

【解答】解: 10 出现的次数最多, 故众数为 10;

平均数 $= \frac{10+7+8+10+10}{5} = 9$.

故选: D.

【点评】本题考查了众数及中位数的知识, 属于基础题, 掌握众数及中位数的定义是解答本题的关键.

5. (3分) 下列命题中, 逆命题正确的是 ()

A. 对顶角相等
B. 两直线平行, 同位角相等
C. 全等三角形对应角相等
D. 等腰三角形是轴对称图形

【考点】O1: 命题与定理.

【分析】先分别写出第个选项的逆命题, 再判断其是否正确.

【解答】解: A 的逆定理是: 相等的角是对顶角, 假命题;

B 的逆命题是: 同位角相等, 两直线平行, 真命题;

C 的逆命题是：对应角相等的两个三角形全等，假命题；

D 的逆命题是：轴对称图形是等腰三角形，假命题；

故选：B.

【点评】 此题考查学生对逆命题的定义的理解，要求学生对常用的基础知识牢固掌握.

6. (3 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ， CP 、 CM 分别是 AB 上的高和中线，如果圆 A 是以点 A 为圆心，半径长为 2 的圆，那么下列判断正确的是 ()

- A. 点 P ， M 均在圆 A 内
- B. 点 P 、 M 均在圆 A 外
- C. 点 P 在圆 A 内，点 M 在圆 A 外
- D. 点 P 在圆 A 外，点 M 在圆 A 内

【考点】 M8：点与圆的位置关系.

【分析】 先利用勾股定理求得 AB 的长，再根据面积公式求出 CP 的长，根据勾股定理求出 AP 的长，根据中线的定义求出 AM 的长，然后由点 P 、 M 到 A 点的距离判断点 P 、 M 与圆 A 的位置关系即可.

【解答】 解： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$\because CP$ 、 CM 分别是 AB 上的高和中线，

$$\therefore \frac{1}{2}AB \cdot CP = \frac{1}{2}AC \cdot BC, \quad AM = \frac{1}{2}AB = 2.5,$$

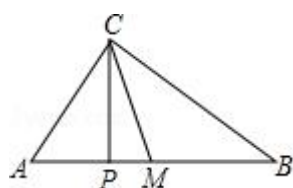
$$\therefore CP = \frac{12}{5},$$

$$\therefore AP = \sqrt{AC^2 - CP^2} = 1.8,$$

$$\because AP = 1.8 < 2, \quad AM = 2.5 > 2,$$

$\therefore$ 点 P 在圆 A 内、点 M 在圆 A 外

故选：C.



【点评】本题考查了点与圆的位置关系的判定，根据点与圆心之间的距离和圆的半径的大小关系作出判断即可．

二．填空题

7. (3分) 计算： $|- \sqrt{2}| = \underline{\sqrt{2}}$ ．

【考点】15：绝对值．

【分析】根据一个负实数的绝对值等于它的相反数求解即可．

【解答】解： $|- \sqrt{2}| = \sqrt{2}$ ．

故答案为： $\sqrt{2}$ ．

【点评】本题考查了实数绝对值的定义：一个正实数的绝对值是它本身，一个负实数的绝对值是它的相反数，0的绝对值是0．

8. (3分) 分解因式： $x^2 - 4 = \underline{(x+2)(x-2)}$ ．

【考点】54：因式分解 - 运用公式法．

【专题】44：因式分解．

【分析】直接利用平方差公式进行因式分解即可．

【解答】解： $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ ．

故答案为： $(x+2)(x-2)$ ．

【点评】本题考查了平方差公式因式分解．能用平方差公式进行因式分解的式子的特点是：两项平方项，符号相反．

9. (3分) 方程 $\sqrt{2x+3} = -x$ 的根是 $\underline{x = -1}$ ．

【考点】AG：无理方程．

【专题】11：计算题．

【分析】将方程左右两边平方，将方程化为关于 x 的一元二次方程，求出方程的解得到 x 的值，将 x 的值代入原方程检验，即可得到原方程的解．

【解答】解： $\sqrt{2x+3} = -x$ ，

左右两边平方得： $2x+3 = x^2$ ，即 $x^2 - 2x - 3 = 0$ ，

因式分解得： $(x-3)(x+1) = 0$ ，

解得： $x = 3$ 或 $x = -1$ ，

将 $x = 3$ 代入方程检验，不合题意，

则原方程的解为 $x = -1$ ．

故答案为： $x = -1$

【点评】此题考查了无理方程，在解无理方程是最常用的方法是两边平方法及换元法，本题用了平方法．

10. (3分) 方程 $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ 的根是 $x = \underline{-1}$.

【考点】B3：解分式方程．

【专题】11：计算题．

【分析】本题考查了解分式方程的能力，公分母为 $x-1$ ，去分母，转化为整式方程求解．结果要检验．

【解答】解：去分母，得 $x^2 = 1$ ，

$\therefore x = 1$ 或 -1 ，经检验： $x = -1$ 是原方程的解．

【点评】(1) 解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解．

(2) 解分式方程一定要注意要验根．

11. (3分) 如果关于 x 的一元二次方程： $mx^2 + x + 1 = 0$ (m 为常数) 有两个实数根，那么 m 的取值范围是 $\underline{m \leq \frac{1}{4} \text{ 且 } m \neq 0}$.

【考点】AA：根的判别式．

【专题】11：计算题．

【分析】根据一元二次方程的定义和根的判别式的意义得到 $m \neq 0$ 且 $\Delta = 1 - 4m \geq 0$ ，然后解两个不等式，求出它们的公共部分即可．

【解答】解：根据题意得 $m \neq 0$ 且 $\Delta = 1 - 4m \geq 0$ ，

解得 $m \leq \frac{1}{4}$ 且 $m \neq 0$ ．

故答案为 $m \leq \frac{1}{4}$ 且 $m \neq 0$ ．

【点评】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ：当 $\Delta > 0$ ，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ ，方程没有实数根．也考查了一元二次方程的定义．

12. (3分) 已知正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $(1, -2)$ ，那么正比例函数的解析式为 $\underline{y = -2x}$.

【考点】FB：待定系数法求正比例函数解析式．

【专题】11：计算题.

【分析】直接把点 $(1, -2)$ 代入 $y = kx$ ，然后求出 k 即可.

【解答】解：把点 $(1, -2)$ 代入 $y = kx$ 得 $k = -2$ ，

所以正比例函数解析式为 $y = -2x$.

故答案为 $y = -2x$.

【点评】本题考查了待定系数法求正比例函数解析式：设正比例函数解析式为 $y = kx$ ($k \neq 0$)，然后把正比例函数图象上一个点的坐标代入求出 k 即可.

13. (3分) 在六张大小质地相同的卡片分别写上 2010, 2011, 2013, 2013, 2013, 2014, 随机抽取一张, 抽取的卡片上的数字是偶数的概率是 $\frac{1}{3}$.

【考点】X4：概率公式.

【分析】让是偶数的卡片数除以总卡片数即为所求的概率.

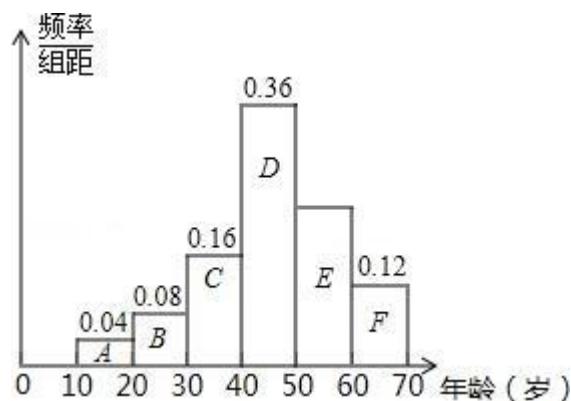
【解答】解： $\because$ 6 张大小质地相同的卡片上分别标有数字 2010, 2011, 2013, 2013, 2013, 2014, 其中有 2 张是偶数,

$\therefore$ 从中随机抽取一张, 卡片上的数字是偶数的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

故答案为: $\frac{1}{3}$.

【点评】此题考查概率的求法: 如果一个事件有 n 种可能, 而且这些事件的可能性相同, 其中事件 A 出现 m 种结果, 那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

14. (3分) 为了解各年龄段观众对某电视节目的收视率, 小明调查了部分观众的收视情况, 并分成 A, B, C, D, E, F 六组进行调查, 其频率分布直方图如图所示, 各长方形上方的数据表示该组的频率, 若 E 组的频数为 48, 那么被调查的观众总人数为 200.



【考点】V8：频数（率）分布直方图.

【分析】先由各小组的频率和为 1，求出 E 组的频率，然后用 E 组的频数除以 E 组的频率即可得到总人数.

【解答】解： $\because E$ 组的频率为： $1 - 0.04 - 0.08 - 0.16 - 0.36 - 0.12 = 0.24$,

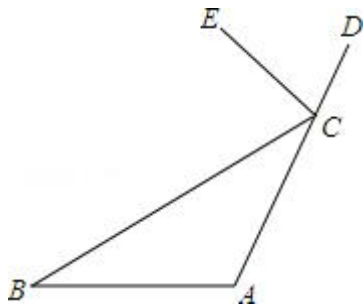
又 $\because E$ 组的频数为 48,

$\therefore$ 被调查的观众总人数为： $48 \div 0.24 = 200$.

故答案为 200.

【点评】本题考查频率分布直方图，频数与频率的关系：频数 = 总人数 $\times$ 频率，从统计图中正确获取信息是解题的关键.

15. (3 分) 如图，已知， $AB = AC$ ， CE 平分 $\angle BCD$ ， $\angle A = 120^\circ$ ，那么 $\angle ACE = \underline{105^\circ}$.



【考点】KH：等腰三角形的性质.

【分析】根据等腰三角形两底角相等求出 $\angle ACB$ ，再根据平角的定义求出 $\angle BCD$ ，然后根据角平分线的定义求出 $\angle BCE$ ，根据 $\angle ACE = \angle ACB + \angle BCE$ 代入数据进行计算即可得解.

【解答】解： $\because AB = AC$ ， $\angle A = 120^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = \frac{1}{2} (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ,$$

$\because CE$ 平分 $\angle BCD$,

$$\therefore \angle BCE = \frac{1}{2} \angle BCD = \frac{1}{2} \times 150^\circ = 75^\circ,$$

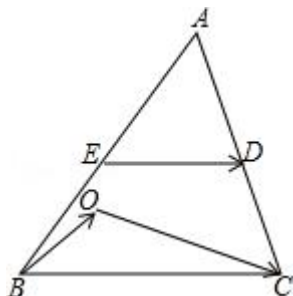
$$\therefore \angle ACE = \angle ACB + \angle BCE = 30^\circ + 75^\circ = 105^\circ.$$

故答案为： 105° .

【点评】本题考查了等腰三角形两底角相等的性质，角平分线的定义，是基础题.

16. (3分) 如图, 已知点 D, E 分别是边 AC 和 AB 的中点, 设 $\overrightarrow{BO} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$,

那么 $\overrightarrow{ED} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ (用 $\vec{a}, \vec{b}$ 来表示)



【考点】LM: *平面向量.

【分析】已知 $\overrightarrow{BO} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$, 根据平行四边形法则可求出 $\overrightarrow{BC}$, 根据 D, E 分别是边 AC 和 AB 的中点, 可知 $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, 即可求出 $\overrightarrow{ED}$.

【解答】解: $\because \overrightarrow{BO} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b},$$

$\because$ 点 D, E 分别是边 AC 和 AB 的中点,

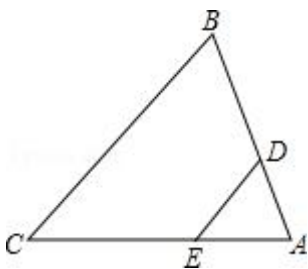
$$\therefore \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}.$$

故答案为: $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

【点评】本题考查了平面向量的知识, 难度适中, 根据平行四边形法则求出 $\overrightarrow{BC}$ 是解答本题的关键.

17. (3分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $BC \parallel DE$, $S_{\triangle ADE} : S_{\text{四边形} BDEC} = 1 : 8$, $AB = a$, 那么 $BD = \frac{2}{3}a$ (用 a 的代数式来表示)



【考点】S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 根据 $S_{\triangle ADE} : S_{\text{四边形} BDEC} = 1 : 8$, 可得 $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} = 1 : 9$, 再由面积比等于相似比平方可得出 $AD : AB = 1 : 3$, 继而可得出 BD 的长度.

【解答】 解: $\because S_{\triangle ADE} : S_{\text{四边形} BDEC} = 1 : 8$,

$$\therefore S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} = 1 : 9,$$

$$\because BC \parallel DE,$$

$$\therefore \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{2}{3},$$

$$\text{又} \because AB = a,$$

$$\therefore BD = \frac{2}{3}a.$$

故答案为: $\frac{2}{3}a$.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质, 解答本题的关键是得出 $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle ADE} = 9 : 1$, 由面积比等于相似比平方得出 $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$, 难度一般.

18. (3分) 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{3}$, 点 E 在 DC 上, 且 $\angle DAE = 30^\circ$, 若将 $\triangle ADE$ 绕着点 A 顺时针旋转 60° , 点 D 至 D' 处, 点 E 至 E' 处, 那么 $\triangle AD'E'$ 与四边形 $ABCE$ 重叠部分的面积是 $6 - 3\sqrt{3}$ 或 0 .

【考点】 R2: 旋转的性质.

【分析】 作出图形, 解直角三角形求出 DE 、 AE , 再根据旋转角为 60° 可知 AE' 在直线 AB 上, 然后求出 BE' , 设 $D'E'$ 与 BC 相交于 F , 解直角三角形求出 BF 再根据重叠部分的面积等于 $\triangle AD'E'$ 的面积减去 $\triangle BE'F$ 的面积, 列式计算即可得解; 旋转后 $\triangle ADE$ 不在正方形内部时重叠部分面积是 0 .

【解答】 解: 如图 1, $\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{3}$, $\angle DAE = 30^\circ$,

$$\therefore DE = AD \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1,$$

$$AE = 2DE = 2,$$

$$\because \angle BAE = \angle BAD - \angle DAE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ, \text{ 旋转角为 } 60^\circ,$$

$$\therefore \text{旋转后 } AE' \text{ 在直线 } AB \text{ 上},$$

$$\therefore BE' = AE' - AB = 2 - \sqrt{3},$$

设 $D'E'$ 与 BC 相交于 F ,

$$\because \angle E' = \angle AED = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore BF = BE' \cdot \tan 60^\circ = (2 - \sqrt{3}) \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3,$$

$$\therefore \triangle AD'E' \text{ 与 四边形 } ABCE \text{ 重叠部分的面积} = S_{\triangle AD'E'} - S_{\triangle BE'F} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 -$$

$$\frac{1}{2} \times (2 - \sqrt{3}) \times (2\sqrt{3} - 3),$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2} + 6,$$

$$= 6 - 3\sqrt{3};$$

如图 2, 重叠部分面积为 0.

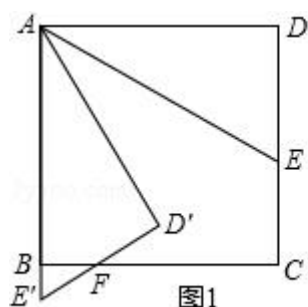


图1

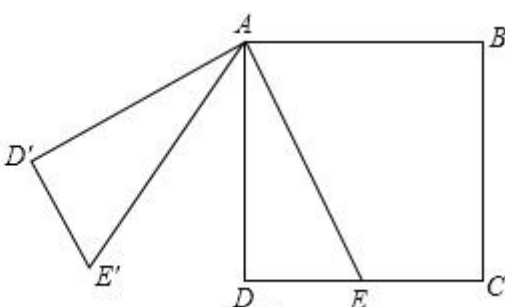


图2

故答案为: $6 - 3\sqrt{3}$ 或 0.

【点评】 本题考查了旋转的性质, 解直角三角形, 主要利用了旋转变换只改变图形的位置不改变图形的形状与大小的性质, 作出图形更形象直观.

三. 解答题

19. (6 分) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-x} \cdot \frac{x}{x+1} - (\frac{x-1}{x})^{-1}$, 其中 $x = \sqrt{2}+1$.

【考点】 6D: 分式的化简求值.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 原式第一项约分得到最简结果, 第二项利用负指数幂法则计算, 再利用同分母分式的减法法则计算得到最后结果, 将 x 的值代入计算即可求出值.

【解答】 解: 原式 $= \frac{(x+1)^2}{x(x-1)} \cdot \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} = \frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$,

当 $x = \sqrt{2}+1$ 时, 原式 $= \frac{1}{\sqrt{2}+1-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

【点评】 此题考查了分式的化简求值, 分式的加减运算关键是通分, 通分的关键是找最简公分母; 分式的乘除运算关键是约分, 约分的关键是找公因式.

20. (6分) 解方程组: $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+4xy+4y^2=25 \end{cases}$.

【考点】AF: 高次方程.

【分析】先把①进行整理, 再把它代入②, 消去 x , 求出 y 的值, 再把 y 的值代入①求出 x 的值即可.

【解答】解: $\begin{cases} x+y=3 & \text{①} \\ x^2+4xy+4y^2=25 & \text{②} \end{cases}$,

由①得: $x = 3 - y$, ③

由②得: $(x+2y)^2 = 25$, ④

把③代入④得:

$$(3 - y + 2y)^2 = 25,$$

$$(3 + y)^2 = 25,$$

$$3 + y = \pm 5,$$

$$y_1 = 2, y_2 = -8,$$

把 $y_1 = 2$ 代入①得:

$$x_1 = 1,$$

把 $y_2 = -8$ 代入①得:

$$x_2 = 11,$$

则原方程组的解是: $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=11 \\ y_2=-8 \end{cases}$.

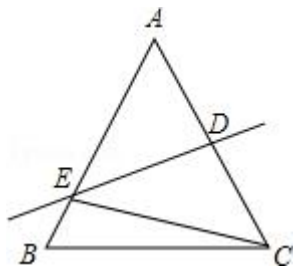
【点评】此题考查了高次方程, 解答此类题目一般用代入法比较简单, 先消去一个未知数再解关于另一个未知数的一元二次方程, 把求得结果代入一个较简单的方程中即可.

21. (6分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, DE 是 AC 的垂直平分线, 交 AC 于点 D , 交 AB 于点 E , 若 $BC = 8$, $\triangle BCE$ 的周长为

$$21, \cos \angle B = \frac{5}{13}.$$

求: (1) AB 的长;

(2) AC 的长.



【考点】KG：线段垂直平分线的性质；T7：解直角三角形．

【专题】11：计算题．

【分析】（1）由 DE 为 AC 的垂直平分线，得到 $AE = CE$ ，三角形 BEC 的周长为三边之和，等量代换得到结果为 $AB + BC$ ，由周长减去 BC 即可求出 AB 的长；
（2）过 A 作 AF 垂直于 BC ，在直角三角形 ABF 中，由 AB 与 $\cos B$ 的值，利用锐角三角函数定义求出 BF 的长，进而利用勾股定理求出 AF 的长，由 $BC - BF$ 求出 FC 的长，在直角三角形 AFC 中，利用勾股定理即可求出 AC 的长．

【解答】解：（1） $\because DE$ 是 AC 的垂直平分线，

$$\therefore AE = CE,$$

$$\because \triangle BEC \text{ 周长为 } BE + BC + EC = BE + AE + BC = AB + BC = 21, \quad BC = 8,$$

$$\therefore AB = 21 - 8 = 13;$$

（2）过 A 作 $AF \perp BC$ ，

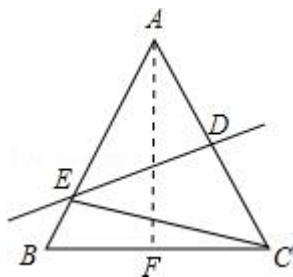
$$\text{在 Rt}\triangle ABF \text{ 中, } AB = 13, \quad \cos B = \frac{5}{13},$$

$$\therefore BF = AB \cos B = 5, \quad FC = BC - BF = 8 - 5 = 3,$$

$$\therefore \text{根据勾股定理得: } AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = 12,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AFC \text{ 中, } AF = 12, \quad FC = 3,$$

$$\text{根据勾股定理得: } AC = \sqrt{AF^2 + FC^2} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}.$$



【点评】此题属于解直角三角形题型，涉及的知识有：勾股定理，锐角三角函数定义，以及线段垂直平分线定理，熟练掌握定理是解本题的关键．

22. (7分) 某工厂计划生产甲、乙两种型号的机器 200 台，生产机器一定要有 A、B 两种材料，现厂里有 A 种材料 10000 吨，B 种材料 6000 吨，已知生产一台甲机器和一台乙机器所需 A、B 两种材料的数量和售后利润如下表所示：

机器型号	A 种材料	B 种材料	售后利润
甲	55 吨	20 吨	5 万元
乙	40 吨	36 吨	6 万元

设生产甲种型号的机器 x 台，售后的总利润为 y 万元.

- (1) 写出 y 与 x 的函数关系式；
- (2) 若你是厂长，要使工厂所获利润最大，那么如何安排生产？（请结合所学函数知识说明理由）.

【考点】 CE：一元一次不等式组的应用；FH：一次函数的应用.

【分析】 (1) 表示出生产乙种型号的机器为 $(200 - x)$ 台，然后根据总利润 = 甲的利润 + 乙的利润，列式整理即可得解；再根据厂里现有甲、乙两种材料的数量列出不等式组求出 x 的取值范围；

(2) 根据一次函数的增减性求出 y 的最大值即可.

【解答】 解：(1) 设生产甲种型号的机器 x 台，生产乙种型号的机器为 $(200 - x)$ 台，

根据题意得， $y = 5x + 6(200 - x) = -x + 1200$,

$\because$ 现厂里有 A 种材料 10000 吨，B 种材料 6000 吨，

$$\therefore \begin{cases} 55x + 40(200 - x) \leq 10000 \text{ ①} \\ 20x + 36(200 - x) \leq 6000 \text{ ②} \end{cases},$$

由①得， $x \leq \frac{400}{3}$,

由②得， $x \geq 75$,

所以， x 的取值范围为 $75 \leq x \leq \frac{400}{3}$,

所以， y 与 x 的函数关系式为 $y = -x + 1200$ ($75 \leq x \leq \frac{400}{3}$);

(2) $\because k = -1 < 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $x = 75$ 时，总利润 y 最大，最大值为 $y = -75 + 1200 = 1125$,

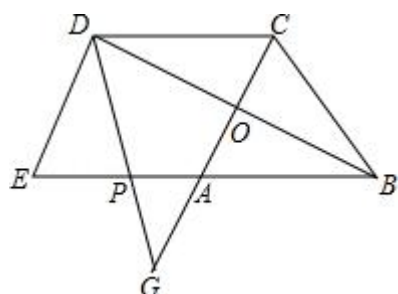
∴要使工厂所获利润最大，应安排生产甲种型号机器 75 台，乙种型号机器 125 台，此时获得最大利润 1125 万元。

【点评】 本题考查了一次函数的应用，一元一次不等式组的应用，主要考查了利用一次函数的增减性求最大值，本题难点在于根据材料的现有量列不等式组求出 x 的取值范围。

23. (7 分) 如图，已知在等腰三角形 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， BO 是 AC 边上的中线，延长 BO 至 D ，使得 $DO = BO$ ；延长 BA 至 E ，使 $AE = AB$ ，联结 CD 、 DE ，在 AE 取一点 P ，联结 DP ，并延长 DP 、 CA 交于点 G 。求证：

(1) 四边形 $ACDE$ 是菱形；

(2) $AE^2 = CG \cdot EP$ 。



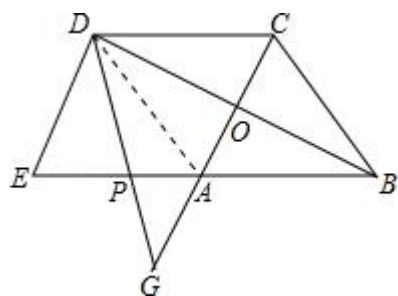
【考点】 KH：等腰三角形的性质；LA：菱形的判定与性质；S9：相似三角形的判定与性质。

【专题】 14：证明题。

【分析】 (1) 连接 AD ，则可判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形，从而得出 $AB = CD = AE$ ，判断出四边形 $AEDC$ 为平行四边形，由 $AB = AC$ ，可得 $CD = AC$ ，继而判定四边形 $ACDE$ 是菱形；

(2) 证明 $\triangle DEP \sim \triangle GCD$ ，从而得出 $\frac{DE}{GC} = \frac{EP}{CD}$ ，再由四边形 $ACDE$ 是菱形，可得 $DE = CD = AE$ ，代入比例式即可得出结论。

【解答】 解：(1) 连接 AD ，



∵ BD 与 AC 互相平分，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD$,

又 $\because AE = AB$,

$\therefore$ 四边形 $ACDE$ 是平行四边形,

$\because AB = AC$,

$\therefore AC = CD$,

$\therefore$ 四边形 $ACDE$ 是菱形;

(2) $\because$ 四边形 $ACDE$ 是菱形,

$\therefore DE = CD = AE$, $\angle E = \angle DCG$, $DE \parallel CG$,

$\therefore \angle EDP = \angle DGC$,

$\therefore \triangle DEP \sim \triangle GCD$,

$\therefore \frac{DE}{GC} = \frac{EP}{CD}$, 即 $\frac{AE}{CG} = \frac{EP}{AE}$,

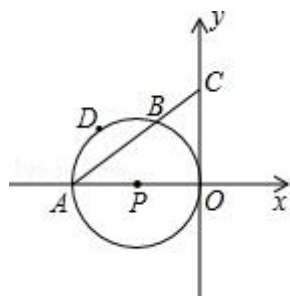
$\therefore AE^2 = CG \cdot EP$.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质、平行四边形的判定与菱形的判定, 解答本题的关键是等量代换, 这是本题的突破口.

24. (7分) 如图, 已知点 $P(-4, 0)$, 以点 P 为圆心 PO 长为半径作圆交 x 轴于点 A 、 O 两点. 过点 A 作直线 AC 交 y 轴于点 C , 与圆 P 交于点 B , $\sin \angle CAO = \frac{3}{5}$.

(1) 求点 C 的坐标;

(2) 若点 D 是弧 AB 的中点, 求经过 A 、 D 、 O 三点的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$); (3) 若直线 $y = kx + b$ 经过点 $M(2, 0)$, 当直线 $y = kx + b$ 与圆 P 相交时, 求 b 的取值范围.



【考点】 MR: 圆的综合题.

【分析】 (1) 由点 $P(-4, 0)$, 可求得 OA 的长, 又由 $\sin \angle CAO = \frac{3}{5}$, 即可求得

OC 的长, 则可得到点 C 的坐标;

(2) 首先连接 PD , 过点 D 作 $DE \perp OA$ 于点 E , 易得 $\angle D = \angle A$, 即可求得点 D 的坐标, 然后由待定系数法求得经过 A 、 D 、 O 三点的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

(3) 利用切点, 求出直线与圆相切的位置, 从而利用三角形相似得出 b 值, 即可得到 b 值得范围.

【解答】 解: (1) $\because P(-4, 0)$,

$$\therefore OP = 4,$$

$$\therefore OA = 2OP = 8,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOC \text{ 中, } \sin \angle CAO = \frac{CO}{AC} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \text{设 } OC = 3x, AC = 5x,$$

$$\because AC^2 = OC^2 + OA^2,$$

$$\therefore (5x)^2 = (3x)^2 + 8^2,$$

$$\text{解得: } x = 2,$$

$$\therefore OC = 6, AC = 10,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (0, 6) \text{ 或 } (0, -6);$$

(2) 当点 C 为 $(0, 6)$ 时,

连接 PD , 过点 D 作 $DE \perp OA$ 于点 E .

$$\therefore \angle D + \angle DPE = 90^\circ, PD = OP = 4,$$

$\because$ 点 D 是弧 AB 的中点,

$$\therefore PD \perp AB,$$

$$\therefore \angle A + \angle DPE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle A,$$

$$\therefore \sin \angle D = \frac{PE}{PD} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore PE = \frac{12}{5},$$

$$\therefore DE = \sqrt{PD^2 - PE^2} = \frac{16}{5},$$

$$\therefore OE = OP + PE = \frac{32}{5},$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为: } \left(-\frac{32}{5}, \frac{16}{5}\right),$$

$$\therefore \begin{cases} 64a - 8b + c = 0 \\ \left(-\frac{32}{5}\right)^2 a - \frac{32}{5}b + c = \frac{16}{5} \\ c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{5}{16} \\ b = -\frac{5}{2} \\ c = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \text{经过 } A、D、O \text{ 三点的抛物线为: } y = -\frac{5}{16}x^2 - \frac{5}{2}x$$

同理, 当点 C 为 $(0, -6)$ 时,

$$\text{经过 } A、D、O \text{ 三点的抛物线为: } y = \frac{5}{16}x^2 + \frac{5}{2}x.$$

综上所述, 经过 $A、D、O$ 三点的抛物线为: $y = -\frac{5}{16}x^2 - \frac{5}{2}x$ 或 $y = \frac{5}{16}x^2 + \frac{5}{2}x$.

(3) 设 S 点为直线 $y = kx + b$ 与圆的切点, 过 S 作 $SN \perp OP$, 连接 PN, PS, SM , SM 交 y 轴与点 T ,

在 $\triangle PSM$ 中, 有 $PM^2 = PS^2 + SM^2$, 即: $36 = 16 + SM^2$, 可得 $SM = 2\sqrt{5}$, ①

在 $\triangle PSN$ 中, 有 $PS^2 = PN^2 + SN^2$, 即: $16 = PN^2 + SN^2$, ②

$$\tan \angle SPN = \frac{SN}{PN} = \frac{SM}{PS} \text{ ③}$$

$$\text{联立①②③, 可解得 } SN = \frac{4}{3}\sqrt{5}, PN = \frac{8}{3},$$

$$\text{则 } MN = \frac{10}{3},$$

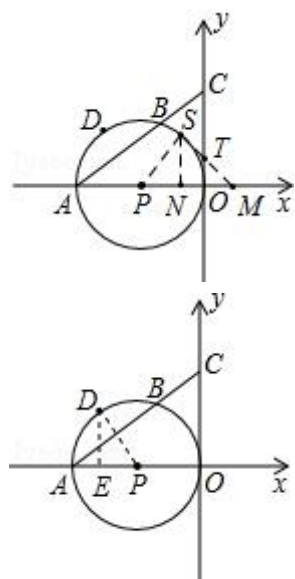
易知 $\triangle SNM \sim \triangle TOM$,

$$\text{得: } \frac{SN}{OT} = \frac{MN}{OM},$$

$$\text{即: } OT = b = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

由对称性, 同理可得在 y 轴负半轴是 $OT' = \frac{4}{5}\sqrt{5}$,

故 b 的取值范围 $-\frac{4}{5}\sqrt{5} < b < \frac{4\sqrt{5}}{5}$, 且 $b \neq 0$.



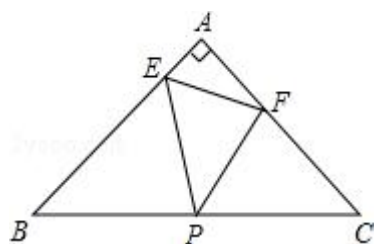
【点评】 此题考查了垂径定理、勾股定理、三角函数以及待定系数法求二次函数的解析式. 此题难度适中, 注意掌握辅助线的作法, 注意掌握数形结合思想与方程思想的应用.

25. (7分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=2$, $\angle A=90^\circ$, P 为 BC 的中点, E 、 F 分别是 AB 、 AC 上的动点, $\angle EPF=45^\circ$.

(1) 求证: $\triangle BPE \sim \triangle CFP$.

(2) 设 $BE=x$, $\triangle PEF$ 的面积为 y , 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出 x 的取值范围.

(3) 当 E 、 F 在运动过程中, $\angle EFP$ 是否可能等于 60° ? 若可能求出 x 的值, 若不可能请说明理由.



【考点】 KW: 等腰直角三角形; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 由等腰直角三角形的性质求得 $\angle B = \angle C = 45^\circ$; 然后由三角形内角和定理、邻补角的定义求得 $\angle BPE = \angle CFP$, 则由“两角法”证得结论;

(2) $S_{\triangle PEF} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BPE} - S_{\triangle PFC} - S_{\triangle AEF}$;

(3) 利用反证法证明. 假设当 E 、 F 在运动过程中, $\angle EFP$ 是等于 60° . 如图, 过点 E 作 $EM \perp FP$ 于点 M . 设 $FM=a$. 构造两个直角三角形, 通过解图中的

两个直角三角形分别求得 $EM = \sqrt{3}a$, $PM = \sqrt{3}a$, $EP = \sqrt{6}a$, 则 $\frac{EP}{FP} = \frac{\sqrt{6}a}{a+\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$; 再利用 (1) 中的全等三角形的对应边成比例得到 $\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$, 解得

x 的值符合 (2) 中的取值范围时, 假设成立. 反之, 假设不成立.

【解答】 解: (1) 如图, $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 2$, $\angle A = 90^\circ$,

$$\therefore \angle B = \angle C = 45^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle 1 = 180^\circ - \angle EPF - \angle 3, \angle EPF = 45^\circ, \angle C + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = 135^\circ - \angle 3, \angle 2 = 135^\circ - \angle 3,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \triangle BPE \sim \triangle CFP.$$

(2) 如图, $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 2$, $\angle A = 90^\circ$, P 为 BC 的中点,

$$\therefore BP = CP = \sqrt{2}.$$

由 (1) 知 $\triangle BPE \sim \triangle CFP$, 则 $\frac{BP}{CF} = \frac{BE}{CP}$, 即 $\frac{\sqrt{2}}{CF} = \frac{x}{\sqrt{2}}$,

$$\text{解得, } CF = \frac{2}{x}.$$

$$\text{则 } S_{\triangle PEF} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BPE} - S_{\triangle PFC} - S_{\triangle AEF}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times \sqrt{2}x \times \sin B - \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{2}{x} \times \sin C - \frac{1}{2} \times (2-x) \times (2 - \frac{2}{x})$$

$$= 2 - \frac{1}{2} \times \sqrt{2}x \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{2}{x} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times (2-x) \times (2 - \frac{2}{x})$$

$$= -1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{x}, \text{ 即 } y = -1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \quad (1 \leq x \leq 2);$$

(3) 当 E 、 F 在运动过程中, $\angle EFP$ 可能等于 60° . 理由如下:

假设当 E 、 F 在运动过程中, $\angle EFP$ 是等于 60° .

如图, 过点 E 作 $EM \perp FP$ 于点 M .

设 $FM = a$.

在 $\text{Rt}\triangle EMF$ 中, $EM = \sqrt{3}a$.

在 $\text{Rt}\triangle EMP$ 中, 得到 $PM = \sqrt{3}a$, $EP = \sqrt{6}a$,

$$\text{则 } \frac{EP}{FP} = \frac{\sqrt{6}a}{a+\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}},$$

$$\therefore \triangle BPE \sim \triangle CFP,$$

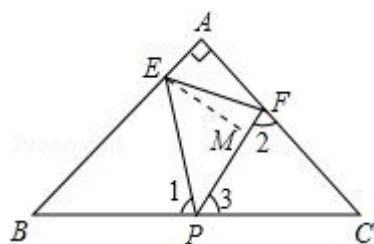
$$\therefore \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}},$$

$$\therefore x = 3 - \sqrt{3}.$$

$$\because 1 \leq x \leq 2,$$

$$\therefore x = 3 - \sqrt{3} \text{ 符合题意,}$$

$\therefore$ 当 E 、 F 在运动过程中, $\angle EFP$ 可能等于 60° .



【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质、等腰直角三角形的性质. 在利用相似三角形的对应边成比例来解题时, 一定要找准“对应边”.