

2013 年上海市杨浦区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题每小题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 下列数中能同时被 2、3 整除的是 ()
- A. 1.2 B. 15 C. 16 D. 18
2. (4 分) 下列式子: ① $a+b=c$; ② $5\sqrt{2}$; ③ $a>0$; ④ a^{2n} , 其中属于代数式的是 ()
- A. ①③ B. ②④ C. ①③④ D. ①②③④
3. (4 分) 用配方法解一元二次方程 $x^2 - 4x = 5$ 时, 此方程可变形为 ()
- A. $(x+2)^2 = 1$ B. $(x-2)^2 = 1$ C. $(x+2)^2 = 9$ D. $(x-2)^2 = 9$
4. (4 分) 要了解全校学生的课外作业负担情况, 你认为以下抽样方法中比较合理的是 ()
- A. 调查全体女生
- B. 调查全体男生
- C. 调查九年级全体学生
- D. 调查七, 八, 九年级各 100 名学生
5. (4 分) $\odot O$ 的半径为 R , 直线 l 与 $\odot O$ 有公共点, 如果圆心到直线 l 的距离为 d , 那么 d 与 R 的大小关系是 ()
- A. $d \geq R$ B. $d \leq R$ C. $d > R$ D. $d < R$
6. (4 分) 下列条件, 不能判定 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似的是 ()
- A. $\angle C = \angle F = 90^\circ$, $\angle A = 55^\circ$, $\angle D = 35^\circ$
- B. $\angle C = \angle F = 90^\circ$, $AB = 10$, $BC = 6$, $DE = 15$, $EF = 9$
- C. $\angle C = \angle F = 90^\circ$, $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$
- D. $\angle B = \angle E = 90^\circ$, $\frac{AB}{EF} = \frac{DF}{AC}$

二、填空题（本大题每小题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 当 $x < -2$ 时, 化简: $|x+2| = \underline{\hspace{2cm}}$.
8. (4 分) 因式分解: $a^3 - 4a = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. (4 分) 在平面直角坐标系中, 若点 $P(x-2, x)$ 在第二象限, 则 x 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. (4分) 函数 $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.

11. (4分) 有一个质地均匀的正方体, 其六个面上分别画着圆、等腰三角形、等腰梯形、平行四边形、菱形、正五边形, 投掷该正方体一次, 向上的一面的图形既是轴对称又是中心对称的概率是_____.

12. (4分) 某班 53 名学生右眼视力 (裸视) 的检查结果如下表所示:

视力	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0	1.2	1.5
人数	1	1	2	5	2	4	6	6	8	11	7

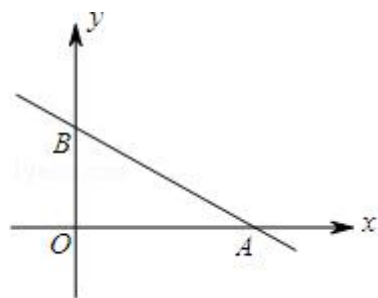
则该班学生右眼视力的中位数是_____.

13. (4分) 圆是轴对称图形, 它的对称轴是_____.

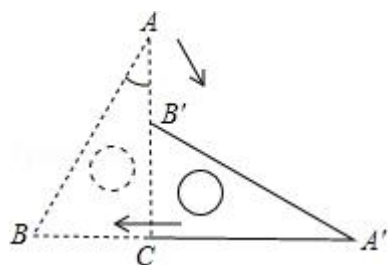
14. (4分) 已知梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $CD = 2AB$, 点 M 、 N 分别是腰 AD 、 BC 的中点, 若 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, 用 $\vec{a}$ 表示 $\overrightarrow{MN}$, 则 $\overrightarrow{MN} =$ _____.

15. (4分) 若正 n 边形的内角为 140° , 边数 n 为_____.

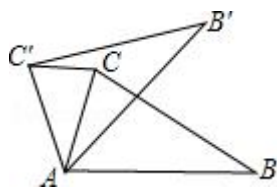
16. (4分) 将直角坐标系中一次函数的图象与坐标轴围成的三角形, 叫做此一次函数的坐标三角形. 例如, 图中的一次函数图象与 x 、 y 轴分别交于点 A 、 B , 则 $\triangle ABO$ 为此一次函数的坐标三角形, 一次函数 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 的坐标三角形的周长是_____.



17. (4分) 如图, 斜边长 12cm , $\angle A = 30^\circ$ 的直角三角尺 ABC 绕点 C 顺时针方向旋转 90° 至 $\triangle A'B'C$ 的位置, 再沿 CB 向左平移使点 B' 落在原三角尺 ABC 的斜边 AB 上, 则三角尺向左平移的距离为_____ cm . (结果保留根号)



18. (4分) 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 70^\circ$, 在同一平面内将 $\triangle ABC$ 绕 A 点旋转到 $\triangle AB'C'$ 位置, 且 $CC' \parallel AB$, 则 $\angle BAB'$ 的度数是_____.

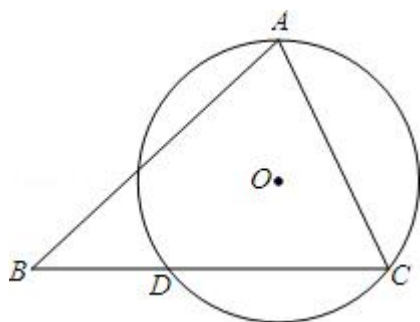


三、解答题

19. (10分) 化简: $(\frac{a}{a+1} - 1) \div \frac{1}{a+1}$.

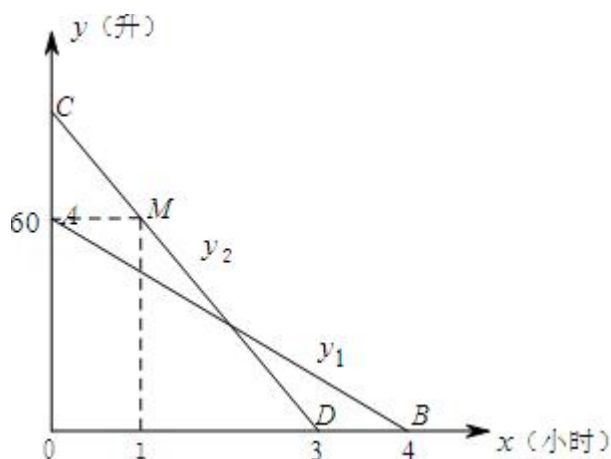
20. (10分) 解方程组:
$$\begin{cases} x+2y=4 \\ x^2-2xy+y^2=1. \end{cases}$$

21. (10分) 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 45^\circ$, $AB = 4\sqrt{2}$, $\tan C = 2$, $\odot O$ 过点 A 、 C , 交 BC 边于点 D . 且 $\widehat{AD} = \widehat{AC}$, 求 CD 的长.



22. (10分) 如图, 线段 AB , CD 分别是一辆轿车和一辆客车在行驶过程中油箱内的剩余油量 y_1 (升)、 y_2 (升) 关于行驶时间 x (小时) 的函数图象.

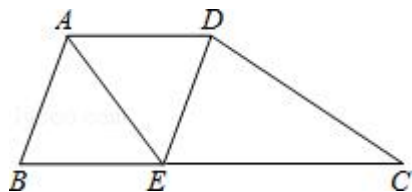
- (1) 写出图中线段 CD 上点 M 的坐标及其表示的实际意义;
- (2) 求出客车行驶前油箱内的油量;
- (3) 求客车行驶1小时所消耗的油量相当于轿车行驶几小时所消耗的油量.



23. (12 分) 如图所示, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = AD$, $\angle BAD$ 的平分线 AE 交 BC 于点 E , 连接 DE .

(1) 求证: 四边形 $ABED$ 是菱形;

(2) 若 $\angle ABC = 60^\circ$, $CE = 2BE$, 试判断 $\triangle CDE$ 的形状, 并说明理由.

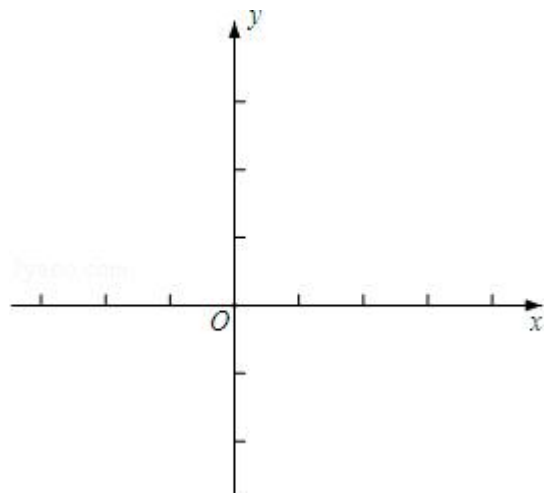


24. (12 分) 将抛物线 $y = -x^2$ 平移, 平移后的抛物线与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D ,

(1) 求平移后的抛物线的表达式和点 D 的坐标;

(2) $\angle ACB$ 与 $\angle ABD$ 是否相等? 请证明你的结论;

(3) 点 P 在平移后的抛物线的对称轴上, 且 $\triangle CDP$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 求 P 的坐标.



25. (14 分) 如图 1, 已知 $\odot O$ 的半径长为 3, 点 A 是 $\odot O$ 上一定点, 点 P 为 $\odot O$ 上不同于点 A 的动点.

(1) 当 $\tan A = \frac{1}{2}$ 时, 求 AP 的长;

(2) 如果 $\odot Q$ 过点 P 、 O , 且点 Q 在直线 AP 上 (如图 2), 设 $AP = x$, $QP = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出函数的定义域;

(3) 在 (2) 的条件下, 当 $\tan A = \frac{4}{3}$ 时 (如图 3), 存在 $\odot M$ 与 $\odot O$ 相内切, 同时与 $\odot Q$ 相外切, 且 $OM \perp OQ$, 试求 $\odot M$ 的半径的长.

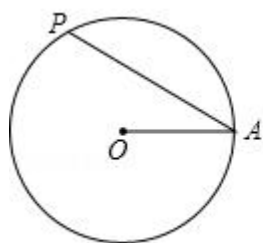


图1

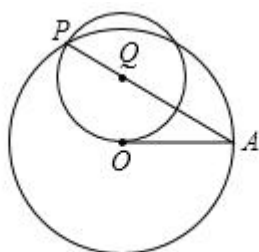


图2

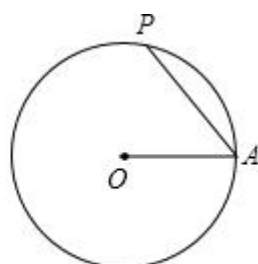


图3

2013 年上海市杨浦区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题每小题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列数中能同时被 2、3 整除的是（ ）

- A. 1.2 B. 15 C. 16 D. 18

【考点】1D：有理数的除法．

【专题】11：计算题．

【分析】用各项中的数字分别除以 2 和 3 即可得到正确的选项．

【解答】解： $\because 18$ 能被 2、3 整除，

$\therefore$ 能同时被 2、3 整除的是可以是 18．

故选：D．

【点评】此题考查了有理数的除法，熟练掌握除法法则是解本题的关键．

2.（4 分）下列式子：① $a+b=c$ ；② $5\sqrt{2}$ ；③ $a>0$ ；④ a^{2n} ，其中属于代数式的是（ ）

- A. ①③ B. ②④ C. ①③④ D. ①②③④

【考点】31：代数式．

【分析】代数式是由数和字母组成，表示加、减、乘、除、乘方、开方等运算的式子，或含有字母的数学表达式，注意不能含有 $=$ 、 $<$ 、 $>$ 、 $\leq$ 、 $\geq$ 、 $\approx$ 、 $\neq$ 等符号．

【解答】解：① $a+b=c$ 含有“ $=$ ”，所以不是代数式；

② $5\sqrt{2}$ 是代数式；

③ $a>0$ 含有“ $>$ ”，所以不是代数式；

④ a^{2n} 是代数式．

故选：B．

【点评】此题主要考查了代数式的定义，是基础题型．

3.（4 分）用配方法解一元二次方程 $x^2 - 4x = 5$ 时，此方程可变形为（ ）

- A. $(x+2)^2 = 1$ B. $(x-2)^2 = 1$ C. $(x+2)^2 = 9$ D. $(x-2)^2 = 9$

【考点】A6：解一元二次方程 - 配方法．

【专题】42：配方法．

【分析】配方法的一般步骤：

- (1) 把常数项移到等号的右边；
- (2) 把二次项的系数化为 1；
- (3) 等式两边同时加上一次项系数一半的平方．

选择用配方法解一元二次方程时，最好使方程的二次项的系数为 1，一次项的系数是 2 的倍数．

【解答】解：∵ $x^2 - 4x = 5$ ，∴ $x^2 - 4x + 4 = 5 + 4$ ，∴ $(x - 2)^2 = 9$ ．故选 D．

【点评】此题考查了配方法解一元二次方程，解题时要注意解题步骤的准确应用．

4. (4 分) 要了解全校学生的课外作业负担情况，你认为以下抽样方法中比较合理的是 ()

- A. 调查全体女生
- B. 调查全体男生
- C. 调查九年级全体学生
- D. 调查七，八，九年级各 100 名学生

【考点】V4：抽样调查的可靠性．

【专题】12：应用题．

【分析】利用抽样调查的中样本的代表性即可作出判断．

【解答】解：要了解全校学生的课外作业负担情况，抽取的样本一定要具有代表性，故选 D．

【点评】抽样调查抽取的样本要具有代表性，即全体被调查对象都有相等的机会被抽到．

5. (4 分) $\odot O$ 的半径为 R ，直线 l 与 $\odot O$ 有公共点，如果圆心到直线 l 的距离为 d ，那么 d 与 R 的大小关系是 ()

- A. $d \geq R$
- B. $d \leq R$
- C. $d > R$
- D. $d < R$

【考点】MB：直线与圆的位置关系．

【专题】2B：探究型．

【分析】直接根据直线与圆的位置关系进行解答即可．

【解答】解：∵ 直线 l 与 $\odot O$ 有公共点，

∴ 直线与圆相切或相交，即 $d \leq R$ ．

故选：B.

【点评】本题考查的是直线与圆的位置关系，即判断直线和圆的位置关系：设 $\odot O$ 的半径为 r ，圆心 O 到直线 l 的距离为 d ，当 $d < r$ 时，直线 l 和 $\odot O$ 相交；当 $d = r$ 时，直线 l 和 $\odot O$ 相切；当 $d > r$ 时，直线 l 和 $\odot O$ 相离.

6. (4分) 下列条件，不能判定 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似的是 ()

A. $\angle C = \angle F = 90^\circ$, $\angle A = 55^\circ$, $\angle D = 35^\circ$

B. $\angle C = \angle F = 90^\circ$, $AB = 10$, $BC = 6$, $DE = 15$, $EF = 9$

C. $\angle C = \angle F = 90^\circ$, $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

D. $\angle B = \angle E = 90^\circ$, $\frac{AB}{EF} = \frac{DF}{AC}$

【考点】S8: 相似三角形的判定.

【专题】1: 常规题型.

【分析】根据相似三角形的判定方法对各个选项进行分析即可.

【解答】解：A 相似： $\because \angle A = 55^\circ \therefore \angle B = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ \therefore \angle D = 35^\circ \therefore \angle B = \angle D \therefore \angle C = \angle F \therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$

B 相似： $\because AB = 10$, $BC = 6$, $DE = 15$, $EF = 9$, $\frac{AB}{DE} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, $\frac{BC}{EF} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$
 $\therefore \angle C = \angle F \therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$

C 相似： $\because \angle C = \angle F = 90^\circ$, $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$

D 不相似： $\because \frac{AB}{EF} = \frac{DF}{AC}$, 有一组角相等两边对应成比例，但该组角不是这两边的夹角，故不相似.

故选：D.

【点评】此题考查了相似三角形判定的理解及运用.

二、填空题（本大题每小题 4 分，满分 48 分）

7. (4分) 当 $x < -2$ 时，化简： $|x+2| = \underline{-x-2}$.

【考点】15: 绝对值.

【分析】当 $x < -2$ 时， $x+2 > 0$ ，再根据负数的绝对值等于它的相反数即可求解.

【解答】解： $\because x < -2$,

$$\therefore x+2 > 0,$$

$$\therefore |x+2| = -x-2.$$

故答案为: $-x-2$.

【点评】考查了绝对值, 本题的关键是确定 $x+2$ 的符号.

8. (4分) 因式分解: $a^3 - 4a = \underline{a(a+2)(a-2)}$.

【考点】55: 提公因式法与公式法的综合运用.

【专题】44: 因式分解.

【分析】首先提取公因式 a , 进而利用平方差公式分解因式得出即可.

【解答】解: $a^3 - 4a = a(a^2 - 4) = a(a+2)(a-2)$.

故答案为: $a(a+2)(a-2)$.

【点评】此题主要考查了提取公因式法和公式法分解因式, 熟练掌握平方差公式是解题关键.

9. (4分) 在平面直角坐标系中, 若点 $P(x-2, x)$ 在第二象限, 则 x 的取值范围为 $\underline{0 < x < 2}$.

【考点】CB: 解一元一次不等式组; D1: 点的坐标.

【分析】根据点在第二象限的条件是: 横坐标是负数, 纵坐标是正数.

【解答】解: 因为点 $P(x-2, x)$ 在第二象限, 所以 $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x > 0 \end{cases}$, 解得 $0 < x < 2$.

【点评】解答此题的关键是熟记平面直角坐标系中各个象限内点的符号.

10. (4分) 函数 $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$ 中自变量 x 的取值范围是 $\underline{-2 \leq x < 3}$.

【考点】E4: 函数自变量的取值范围.

【专题】11: 计算题.

【分析】让分子中的被开方数为非负数, 分母中的被开方数为正数列式求解即可.

【解答】解: 由题意得: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases}$,

解得 $-2 \leq x < 3$.

故答案为 $-2 \leq x < 3$.

【点评】考查求函数自变量的取值; 用到的知识点为: 二次根式的被开方数为非负数; 分式的分母不为 0.

11. (4分) 有一个质地均匀的正方体, 其六个面上分别画着圆、等腰三角形、等腰梯形、平行四边形、菱形、正五边形, 投掷该正方体一次, 向上的一面

的图形既是轴对称又是中心对称的概率是 $\frac{1}{3}$.

【考点】P6：坐标与图形变化 - 对称；R5：中心对称图形；X4：概率公式.

【分析】抛掷这个正方体一次，圆、等腰三角形、等腰梯形、平行四边形、菱形、正五边形，这 6 个图形出现的机会相同，6 个图形中既是轴对称图形又是中心对称图形的有圆和菱形两个.

【解答】解：∵ 抛掷这个正方体一次，圆、等腰三角形、等腰梯形、平行四边形、菱形、正五边形，这 6 个图形出现的机会相同，6 个图形中既是轴对称图形又是中心对称图形的有圆和菱形两个.

∴ 抛掷这个正方体一次，向上一面的图形既是轴对称图形，又是中心对称图形的概率是 $\frac{1}{3}$.

故答案为： $\frac{1}{3}$.

【点评】此题考查了概率的求法以及中心对称图形、轴对称图形和概率知识. 如果一个事件有 n 种可能，而且这些事件的可能性相同，其中事件 A 出现 m 种结果，那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

12. (4 分) 某班 53 名学生右眼视力 (裸视) 的检查结果如下表所示:

视力	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0	1.2	1.5
人数	1	1	2	5	2	4	6	6	8	11	7

则该班学生右眼视力的中位数是 0.8 .

【考点】W4：中位数.

【专题】27：图表型.

【分析】找中位数要把数据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数或两个数的平均数为中位数.

【解答】解：因为由 53 个数据，排序后最中间的是第 27 数，所以该班学生右眼视力的中位数是 0.8.

故填 0.8.

【点评】本题属于基础题，考查了确定一组数据的中位数的能力. 注意找中位数的时候一定要先排好顺序，然后再根据奇数和偶数个来确定中位数，如果数据有奇数个，则正中间的数字即为所求. 如果是偶数个则找中间两位数的平

均数.

13. (4分) 圆是轴对称图形, 它的对称轴是 过圆心的直线/直径所在的直线.

【考点】M1: 圆的认识; P2: 轴对称的性质.

【分析】根据对称轴的概念, 可知圆的对称轴是过圆心的一条直线.

【解答】解: 圆是轴对称图形, 它的对称轴是过圆心的直线.

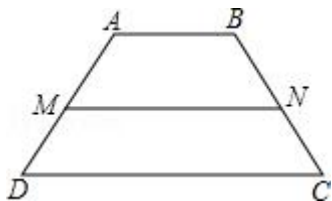
【点评】注意: (1) 对称轴应是直线. (2) 圆有无数条对称轴.

14. (4分) 已知梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $CD = 2AB$, 点 M 、 N 分别是腰 AD 、 BC 的中点, 若 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, 用 $\vec{a}$ 表示 $\overrightarrow{MN}$, 则 $\overrightarrow{MN} = \underline{-\frac{3}{2}\vec{a}}$.

【考点】LM: *平面向量.

【分析】先画出示意图, 然后可得 MN 是梯形 $ABCD$ 的中位线, 继而可用 $\vec{a}$ 表示出 $\overrightarrow{MN}$.

【解答】解: 示意图如下:



$$\because CD = 2AB, \overrightarrow{BA} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = 2\vec{a},$$

$\because$ 点 M 、 N 分别是腰 AD 、 BC 的中点,

$\therefore MN$ 是梯形 $ABCD$ 的中位线,

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = -\frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}) = -\frac{3}{2}\vec{a}.$$

故答案为: $-\frac{3}{2}\vec{a}$.

【点评】本题考查了平面向量的知识及梯形的知识, 解答本题的关键是判断出 MN 是梯形 $ABCD$ 的中位线, 注意熟练掌握梯形中位线的性质.

15. (4分) 若正 n 边形的内角为 140° , 边数 n 为 9.

【考点】L3: 多边形内角与外角.

【分析】根据多边形每个内角与其相邻的外角互补, 则正 n 边形的每个外角的度数 $= 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$, 然后根据多边形的外角和为 360° 即可得到 n 的

值.

【解答】解：∵正 n 边形的每个内角都是 140° ，

∴正 n 边形的每个外角的度数 $= 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ ，

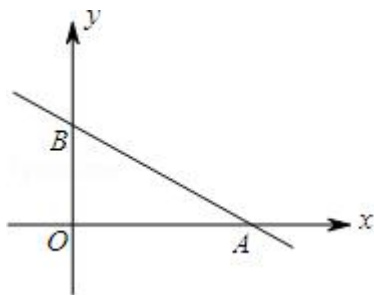
∴ $n = 360 \div 40 = 9$.

故答案为 9.

【点评】本题考查了多边形内角与外角的关系及多边形的外角和定理，用到的知识点：

多边形每个内角与其相邻的外角互补；多边形的外角和为 360° .

16. (4 分) 将直角坐标系中一次函数的图象与坐标轴围成的三角形，叫做此一次函数的坐标三角形. 例如，图中的一次函数图象与 x 、 y 轴分别交于点 A 、 B ，则 $\triangle ABO$ 为此一次函数的坐标三角形，一次函数 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 的坐标三角形的周长是 12 .



【考点】F8：一次函数图象上点的坐标特征；KQ：勾股定理.

【专题】11：计算题.

【分析】先把 $y = 0$ 或 $x = 0$ 代入解析式可确定 A 点坐标为 $(3, 0)$ ， B 点坐标为 $(0, 4)$ ，再利用勾股定理计算出 AB ，然后利用三角形周长的定义进行计算.

【解答】解：把 $y = 0$ 代入 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 得 $-\frac{4}{3}x + 4 = 0$ ，解得 $x = 3$ ，则 A 点坐标为 $(3, 0)$ ，

把 $x = 0$ 代入 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 得 $y = 4$ ，则 B 点坐标为 $(0, 4)$ ，

所以 $OA = 3$ ， $OB = 4$ ，

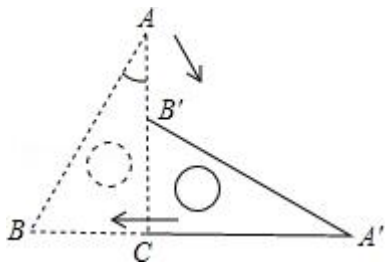
所以 $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $3 + 4 + 5 = 12$.

故答案为 12.

【点评】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征：一次函数 $y=kx+b$ (k 、 b 为常数， $k \neq 0$) 的图象上的点满足其解析式．也考查了勾股定理．

17. (4 分) 如图，斜边长 12cm ， $\angle A = 30^\circ$ 的直角三角尺 ABC 绕点 C 顺时针方向旋转 90° 至 $\triangle A'B'C$ 的位置，再沿 CB 向左平移使点 B' 落在原三角尺 ABC 的斜边 AB 上，则三角尺向左平移的距离为 $6-2\sqrt{3}$ cm ．(结果保留根号)



【考点】 Q2：平移的性质；R2：旋转的性质；S9：相似三角形的判定与性质．

【分析】 首先根据题意作图，然后连接 $B'B''$ ，由在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = 12$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，即可求得 AC 与 BC 的值，则可得 AB' 的值，又由 $B'C \parallel B''C''$ ， $B'C = B''C''$ ，四边形 $B''C''CB'$ 是矩形，可得 $\triangle AB''B' \sim \triangle ABC$ ，然后根据相似三角形的对应边成比例，即可求得答案．

【解答】 解：如图：连接 $B'B''$ ，

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = 12$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，

$$\therefore BC = \frac{1}{2}AB = 6, AC = 6\sqrt{3},$$

$$\therefore B'C = 6,$$

$$\therefore AB' = AC - B'C = 6\sqrt{3} - 6,$$

$\because B'C \parallel B''C''$ ， $B'C = B''C''$ ，

$\therefore$ 四边形 $B''C''CB'$ 是矩形，

$$\therefore B''B' \parallel BC, B''B' = C''C,$$

$$\therefore \triangle AB''B' \sim \triangle ABC,$$

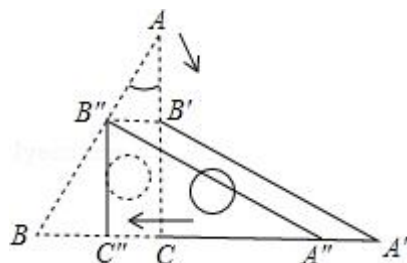
$$\therefore \frac{AB'}{AC} = \frac{B''B'}{BC},$$

$$\text{即：} \frac{6\sqrt{3}-6}{6\sqrt{3}} = \frac{B''B'}{6},$$

解得： $B''B' = 6 - 2\sqrt{3}$.

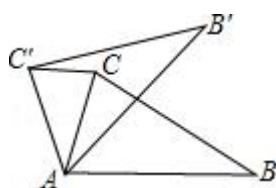
$\therefore C''C = B''B' = 6 - 2\sqrt{3}$.

故答案为： $6 - 2\sqrt{3}$.



【点评】 此题考查了相似三角形的判定与性质，旋转与平移的性质，以及直角三角形的性质等知识．此题综合性较强，难度适中，解题的关键是数形结合思想的应用．

18. (4分) 已知：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB = 70^\circ$ ，在同一平面内将 $\triangle ABC$ 绕 A 点旋转到 $\triangle AB'C'$ 位置，且 $CC' \parallel AB$ ，则 $\angle BAB'$ 的度数是 40° ．



【考点】 R2：旋转的性质．

【专题】 16：压轴题．

【分析】 旋转中心为点 A ， B 与 B' ， C 与 C' 分别是对应点，根据旋转的性质可知，旋转角 $\angle BAB' = \angle CAC'$ ， $AC = AC'$ ，再利用平行线的性质得 $\angle C'CA = \angle CAB$ ，把问题转化到等腰 $\triangle ACC'$ 中，根据内角和定理求 $\angle CAC'$ ，即可求出 $\angle BAB'$ 的度数．

【解答】 解： $\because CC' \parallel AB$ ， $\angle CAB = 70^\circ$ ，

$\therefore \angle C'CA = \angle CAB = 70^\circ$ ，

又 $\because C、C'$ 为对应点，点 A 为旋转中心，

$\therefore AC = AC'$ ，即 $\triangle ACC'$ 为等腰三角形，

$\therefore \angle BAB' = \angle CAC' = 180^\circ - 2\angle C'CA = 40^\circ$ ．

故填： 40° ．

【点评】 本题考查了旋转的基本性质，对应点到旋转中心的距离相等，对应点与

旋转中心的连线的夹角为旋转角. 同时考查了平行线的性质.

三、解答题

19. (10 分) 化简: $(\frac{a}{a+1}-1) \div \frac{1}{a+1}$.

【考点】6C: 分式的混合运算.

【专题】11: 计算题.

【分析】先将除法化成乘法, 再根据乘法的分配律进行计算即可.

【解答】解: 原式 = $(\frac{a}{a+1} - \frac{a+1}{a+1}) \cdot (a+1)$,

$$= a - (a+1),$$

$$= a - a - 1,$$

$$= -1.$$

【点评】本题考查了分式的混合运算, 乘法和除法是互为逆运算, 是中档题, 难度不大.

20. (10 分) 解方程组: $\begin{cases} x+2y=4 \\ x^2-2xy+y^2=1. \end{cases}$

【考点】AF: 高次方程.

【专题】11: 计算题.

【分析】首先观察方程组中第二个等式, 可以写成完全平方式的形式, 把高次方程转化成二元一次方程进行求解.

【解答】解: $\begin{cases} x+2y=4 & (1) \\ x^2-2xy+y^2=1. & (2) \end{cases}$

由 (2) 式得到: $(x-y)^2=1$,

再得到 $x-y=1$ 或者 $x-y=-1$,

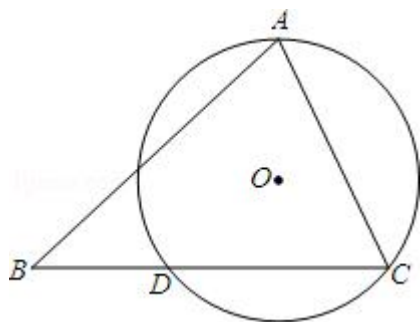
与 (1) 式组成方程组: $\begin{cases} x+2y=4 \\ x-y=1. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+2y=4 \\ x-y=-1. \end{cases}$

解得: $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=1. \end{cases}$, $\begin{cases} x_2=\frac{2}{3} \\ y_2=\frac{5}{3}. \end{cases}$

经检验, 原方程组的解是: $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=1. \end{cases}$, $\begin{cases} x_2=\frac{2}{3} \\ y_2=\frac{5}{3}. \end{cases}$.

【点评】本题主要考查高次方程的知识点，解答本题的关键是把二元二次方程转化成二元一次方程进行求解，本题难度不大.

21. (10分) 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 45^\circ$ ， $AB = 4\sqrt{2}$ ， $\tan C = 2$ ， $\odot O$ 过点 A 、 C ，交 BC 边于点 D ，且 $\widehat{AD} = \widehat{AC}$ ，求 CD 的长.



【考点】KJ：等腰三角形的判定与性质；M4：圆心角、弧、弦的关系；T7：解直角三角形.

【分析】如图，连接 AC ，延长 AO 交 BC 于点 E . 根据圆心角、弧、弦间的关系推知 $\triangle ACD$ 是等腰三角形，由其“三合一”的性质证得 AE 是 CD 的中垂线. 在直角 $\triangle AEC$ 中根据勾股定理求得线段 CE 的长度，进而根据垂径定理来求线段 CD 的长度.

【解答】解：如图，连接 AD ，延长 AO 交 BC 于点 E .

$$\because \widehat{AD} = \widehat{AC},$$

$$\therefore AD = AC,$$

$\because$ 点 O 是等腰 $\triangle ACD$ 的外心，

$$\therefore AE \perp CD, \text{ 且 } CD = 2CE.$$

$$\therefore \text{在直角}\triangle ABE \text{中}, \angle B = 45^\circ, AB = 4\sqrt{2}, \text{ 则 } AE = 4.$$

$$\because \tan C = 2,$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = 2, \text{ 即 } AE = 2CE,$$

$$\therefore CD = AE = 4, \text{ 即线段 } CD \text{ 的长度是 } 4.$$

解得： $\begin{cases} a=-30 \\ b=90 \end{cases}$,

则解析式为： $y = -30x + 90$

当 $x = 0$ 时， $y = 90$,

故客车行驶前油箱内的油量 90 升；

(3) $\because$ 轿车的耗油量为： $60 \div 4 = 15$ 升/时，

客车的耗油量为： $90 \div 3 = 30$ 升/时，

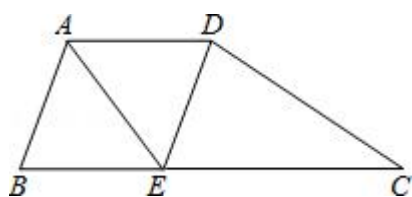
$\therefore$ 客车行驶 1 小时所消耗的油量相当于轿车行驶 2 小时所消耗的油量。

【点评】 此题主要考查了一次函数的应用，求出直线 CD 一次函数的解析式是解题关键。

23. (12 分) 如图所示，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = AD$ ， $\angle BAD$ 的平分线 AE 交 BC 于点 E ， 连接 DE 。

(1) 求证：四边形 $ABED$ 是菱形；

(2) 若 $\angle ABC = 60^\circ$ ， $CE = 2BE$ ， 试判断 $\triangle CDE$ 的形状， 并说明理由。



【考点】 KD：全等三角形的判定与性质；KM：等边三角形的判定与性质；LA：菱形的判定与性质；LH：梯形。

【专题】 152：几何综合题。

【分析】 (1) 根据 $AB = AD$ 及 AE 为 $\angle BAD$ 的平分线可得出 $\angle 1 = \angle 2$ ，从而证得 $\triangle BAE \cong \triangle DAE$ ，这样就得出四边形 $ABED$ 为平行四边形，根据菱形的判定定理即可得出结论；

(2) 过点 D 作 $DF \parallel AE$ 交 BC 于点 F ，可得出 $DF = AE$ ， $AD = EF = BE$ ，再由 $CE = 2BE$ 得出 $DE = EF$ ，从而结合 $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AB \parallel DE$ 可判断出结论。

【解答】 (1) 证明：如图， $\because AE$ 平分 $\angle BAD$ ，

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\because AB = AD, AE = AE,$$

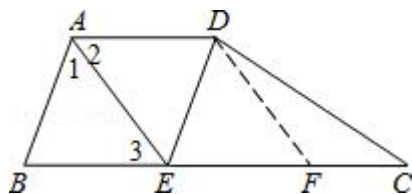
$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle DAE,$$

$\therefore BE = DE$,
 $\because AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle 2 = \angle 3 = \angle 1$,
 $\therefore AB = BE$,
 $\therefore AB = BE = DE = AD$,
 $\therefore$ 四边形 $ABED$ 是菱形.

(2) 解: $\triangle CDE$ 是直角三角形.

如图, 过点 D 作 $DF \parallel AE$ 交 BC 于点 F ,

$\because AD \parallel BC, DF \parallel AE$
 $\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形,
 $\therefore DF = AE, AD = EF = BE$,
 $\because CE = 2BE$,
 $\therefore BE = EF = FC$,
 $\therefore DE = EF$,
 又 $\because \angle ABC = 60^\circ, AB \parallel DE$,
 $\therefore \angle DEF = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle DEF$ 是等边三角形,
 $\therefore DF = EF = FC$,
 $\therefore \triangle CDE$ 是直角三角形.

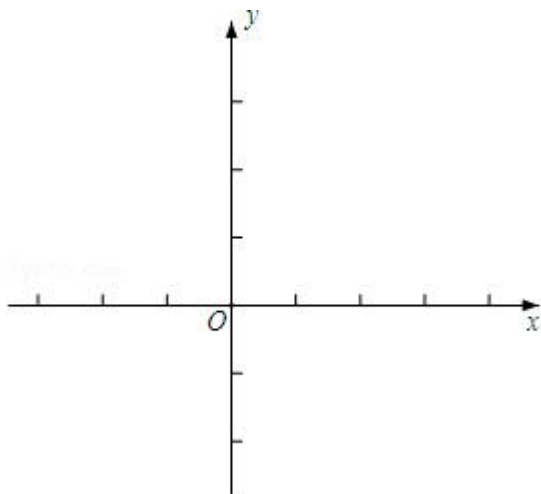


【点评】 本题综合考查了梯形、全等三角形的判定及性质、菱形的判定及性质, 难度较大, 解答本题需要掌握①有一组邻边相等的平行四边形是菱形, ②直角三角形中, 斜边的中线等于斜边的一半.

24. (12 分) 将抛物线 $y = -x^2$ 平移, 平移后的抛物线与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D ,
- (1) 求平移后的抛物线的表达式和点 D 的坐标;

(2) $\angle ACB$ 与 $\angle ABD$ 是否相等? 请证明你的结论;

(3) 点 P 在平移后的抛物线的对称轴上, 且 $\triangle CDP$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 求 P 的坐标.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【分析】 (1) 根据平移不改变二次项系数 a 的值, 且平移后的抛物线与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(3, 0)$, 可知平移后的抛物线的表达式为 $y = -(x+1)(x-3) = -x^2+2x+3$, 再运用配方法化为顶点式, 即可求出顶点 D 的坐标;

(2) 先由 B 、 C 两点的坐标, 得出 $\angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$, 再根据勾股定理的逆定理判断 $\triangle BCD$ 是直角三角形, 且 $\angle BCD = 90^\circ$, 则由正切函数的定义求出 $\tan \angle CBD = \frac{1}{3}$, 在 $\triangle AOC$ 中, 由正切函数的定义也求出 $\tan \angle ACO = \frac{1}{3}$, 得出 $\angle ACO = \angle CBD$, 则 $\angle ACO + \angle OCB = \angle CBD + \angle OBC$, 即 $\angle ACB = \angle ABD$;

(3) 设 P 点的坐标为 $(1, n)$, 先由相似三角形的形状相同, 得出 $\triangle CDP$ 是锐角三角形, 则 $n < 4$, 再根据 $\angle CDP = \angle ABC = 45^\circ$, 得到 D 与 B 是对应点, 所以分两种情况进行讨论: ① $\triangle CDP \sim \triangle ABC$;

② $\triangle CDP \sim \triangle CBA$. 根据相似三角形对应边的比相等列出关于 n 的方程, 解方程即可.

【解答】 解: (1) $\because$ 将抛物线 $y = -x^2$ 平移, 平移后的抛物线与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(3, 0)$,

$\therefore$ 平移后的抛物线的表达式为 $y = -(x+1)(x-3) = -x^2+2x+3$, 即 $y = -x^2+2x+3$,

$\because y = -x^2+2x+3 = -(x-1)^2+4$,

$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $(1, 4)$;

(2) $\angle ACB$ 与 $\angle ABD$ 相等, 理由如下:

如图, $\because y = -x^2 + 2x + 3$,

$\therefore$ 点 $x = 0$ 时, $y = 3$, 即 C 点坐标为 $(0, 3)$,

又 $\because B(3, 0)$, $\angle BOC = 90^\circ$,

$\therefore OB = OC$, $\angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$.

在 $\triangle BCD$ 中, $\because BC^2 = 3^2 + 3^2 = 18$, $CD^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, $BD^2 = 2^2 + 4^2 = 20$,

$\therefore BC^2 + CD^2 = BD^2$,

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore \tan \angle CBD = \frac{CD}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{1}{3}$,

$\because$ 在 $\triangle AOC$ 中, $\angle AOC = 90^\circ$,

$\therefore \tan \angle ACO = \frac{OA}{OC} = \frac{1}{3}$,

$\therefore \tan \angle ACO = \tan \angle CBD$,

$\therefore \angle ACO = \angle CBD$,

$\therefore \angle ACO + \angle OCB = \angle CBD + \angle OBC$,

即 $\angle ACB = \angle ABD$;

(3) $\because$ 点 P 在平移后的抛物线的对称轴上, 而 $y = -x^2 + 2x + 3$ 的对称轴为 $x = 1$,

$\therefore$ 可设 P 点的坐标为 $(1, n)$.

$\because \triangle ABC$ 是锐角三角形,

$\therefore$ 当 $\triangle CDP$ 与 $\triangle ABC$ 相似时, $\triangle CDP$ 也是锐角三角形,

$\therefore n < 4$, 即点 P 只能在点 D 的下方,

又 $\because \angle CDP = \angle ABC = 45^\circ$,

$\therefore D$ 与 B 是对应点, 分两种情况:

① 如果 $\triangle CDP \sim \triangle ABC$, 那么 $\frac{CD}{AB} = \frac{DP}{BC}$,

即 $\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{4-n}{3\sqrt{2}}$, 解得 $n = \frac{5}{2}$,

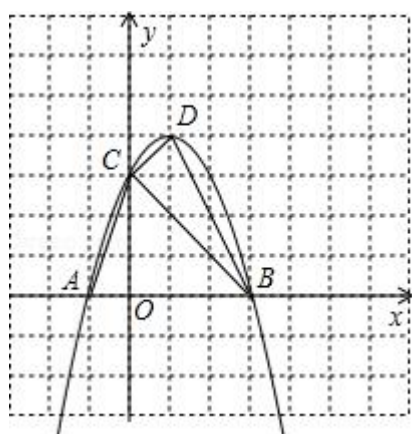
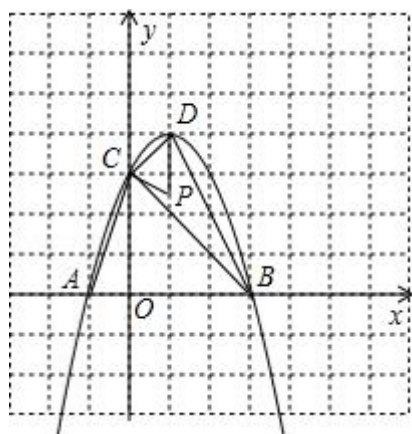
$\therefore P$ 点的坐标为 $(1, \frac{5}{2})$;

②如果 $\triangle CDP \sim \triangle CBA$ ，那么 $\frac{CD}{CB} = \frac{DP}{AB}$ ，

即 $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{4-n}{4}$ ，解得 $n = \frac{8}{3}$ ，

$\therefore P$ 点的坐标为 $(1, \frac{8}{3})$ 。

综上所述 P 点的坐标为 $(1, \frac{5}{2})$ 或 $(1, \frac{8}{3})$ 。



【点评】本题是二次函数的综合题型，其中涉及到的知识点有抛物线的平移规律，对称轴、顶点坐标的求法，勾股定理及其逆定理，锐角三角函数的定义，相似三角形的判定与性质，综合性较强，难度适中．两个三角形相似没有明确对应顶点时要注意分析题意分情况讨论结果．

25. (14分) 如图1，已知 $\odot O$ 的半径长为3，点 A 是 $\odot O$ 上一定点，点 P 为 $\odot O$ 上不同于点 A 的动点．

(1) 当 $\tan A = \frac{1}{2}$ 时，求 AP 的长；

(2) 如果 $\odot Q$ 过点 P 、 O ，且点 Q 在直线 AP 上（如图2），设 $AP = x$ ， $QP = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出函数的定义域；

(3) 在(2)的条件下, 当 $\tan A = \frac{4}{3}$ 时 (如图3), 存在 $\odot M$ 与 $\odot O$ 相内切, 同时与 $\odot Q$ 相外切, 且 $OM \perp OQ$, 试求 $\odot M$ 的半径的长.

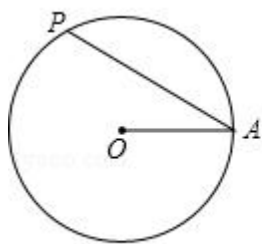


图1

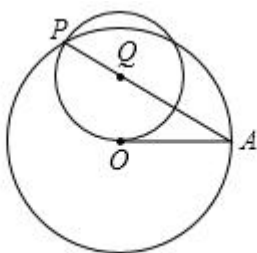


图2

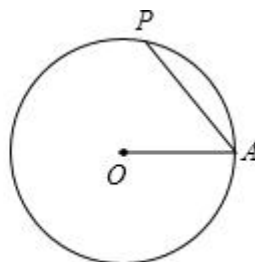


图3

【考点】MR: 圆的综合题.

【专题】152: 几何综合题.

【分析】(1) 过点 P 作 $PB \perp OA$ 交 AO 的延长线于 B , 连接 OP , 设 $PB = a$, 根据 $\angle A$ 的正切值表示出 $AB = 2a$, 再表示出 $OE = 2a - 3$, 在 $\text{Rt}\triangle POB$ 中, 利用勾股定理列方程求出 a , 然后在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中, 利用勾股定理列式计算即可求出 AP ;

(2) 连接 OP 、 OQ , 根据等边对等角可得 $\angle P = \angle POQ = \angle A$, 求出 $\triangle AOP$ 和 $\triangle PQO$ 相似, 利用相似三角形对应边成比例列式整理即可得到 y 与 x 的关系式, 根据直径是圆的最长的弦写出 x 的取值范围;

(3) 过点 O 作 $OC \perp AP$ 于 C , 根据 $\angle A$ 的正切值, 设 $OC = 4b$, 则 $AC = 3b$, 在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, 利用勾股定理列方程求出 b , 从而得到 OC 、 AC , 再根据等腰三角形三线合一的性质可得 $PC = AC$, 设 $\odot Q$ 的半径为 c , 然后表示出 CQ , 在 $\text{Rt}\triangle COQ$ 中, 利用勾股定理列方程求出 c , 设 $\odot M$ 的半径为 r , 根据圆与圆的位置关系表示出 MQ 、 MO 然后利用勾股定理列方程求解即可得到 r 的值, 从而得解.

【解答】解: (1) 如图1, 过点 P 作 $PB \perp OA$ 交 AO 的延长线于 B , 连接 OP , 设 $PB = a$,

$$\because \tan A = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AB = 2a,$$

$$\therefore OB = AB - OA = 2a - 3,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle POB \text{ 中, } PB^2 + OB^2 = OP^2,$$

$$\text{即 } a^2 + (2a - 3)^2 = 3^2,$$

$$\text{解得 } a_1 = \frac{12}{5}, a_2 = 0 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore AB = 2 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABP \text{ 中, } AP = \sqrt{PB^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{12\sqrt{5}}{5};$$

(2) 连接 OP 、 OQ , 则 $AO = PO$, $PQ = OQ$,

$$\therefore \angle P = \angle A, \angle POQ = \angle P,$$

$$\therefore \angle P = \angle POQ = \angle A,$$

$$\therefore \triangle AOP \sim \triangle PQO,$$

$$\therefore \frac{QP}{OP} = \frac{OP}{AP},$$

$$\text{即 } \frac{y}{3} = \frac{3}{x},$$

$$\text{整理得, } y = \frac{9}{x},$$

$\because \odot O$ 的半径为 3, 点 P 不同于点 A ,

$$\therefore 0 < x \leq 6;$$

$$\therefore y = \frac{9}{x} \text{ (} 0 < x \leq 6 \text{)};$$

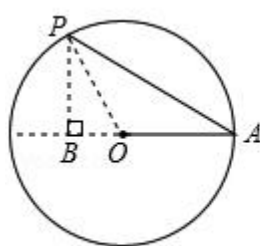


图1

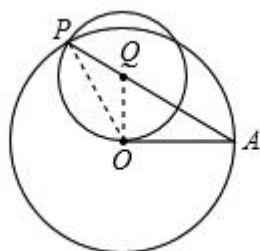


图2

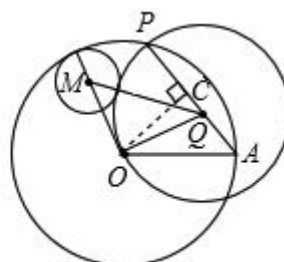


图3

(3) 过点 O 作 $OC \perp AP$ 于 C ,

$$\because \tan A = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{设 } OC = 4b, AC = 3b,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOC \text{ 中, } OC^2 + AC^2 = OA^2,$$

$$\text{即 } (4b)^2 + (3b)^2 = 3^2,$$

解得 $b = \frac{3}{5}$,

$$\therefore OC = 4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}, \quad AC = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5},$$

根据垂径定理, $PC = AC = \frac{9}{5}$,

设 $\odot Q$ 的半径为 c , 则 $CQ = QP - PC = c - \frac{9}{5}$,

在 $\text{Rt}\triangle COQ$ 中, $OC^2 + CQ^2 = OQ^2$,

$$\text{即 } \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(c - \frac{9}{5}\right)^2 = c^2,$$

解得 $c = \frac{5}{2}$,

设 $\odot M$ 的半径为 r ,

$\because \odot M$ 与 $\odot O$ 相内切, 同时与 $\odot Q$ 相外切,

$$\therefore MO = 3 - r, \quad MQ = r + \frac{5}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle OMQ$ 中, $MO^2 + OQ^2 = MQ^2$,

$$\text{即 } (3 - r)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(r + \frac{5}{2}\right)^2,$$

解得 $r = \frac{9}{11}$.

【点评】 本题考查了圆的综合题型, 主要利用了解直角三角形, 勾股定理, 同一个圆的半径相等, 等边对等角的性质, 相似三角形的判定与性质, 圆与圆的位置关系, 作辅助线构造出直角三角形与相似三角形是解题的关键, 难点在于反复利用勾股定理列出方程求解.