

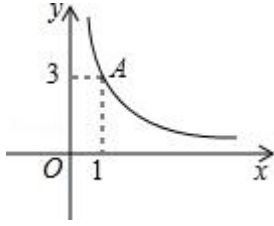
2013 年上海市徐汇区中考数学二模试卷

一. 选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

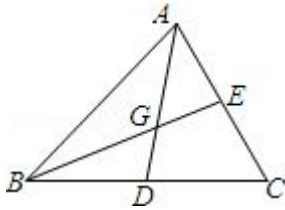
1. (4 分) 下列二次根式中与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是 ()
- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{8}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{18}$
2. (4 分) 将抛物线 $y = (x+2)^2$ 向下平移 2 个单位后, 所得抛物线解析式为 ()
- A. $y = x^2$ B. $y = x^2 - 2$ C. $y = (x+2)^2 + 2$ D. $y = (x+2)^2 - 2$
3. (4 分) 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 那么 x 的取值范围是 ()
- A. $m > 2$ B. $m < 2$ C. $m > 2$ 且 $m \neq 1$ D. $m < 2$ 且 $m \neq 1$
4. (4 分) 下列一组数据: -2 、 -1 、 0 、 1 、 2 的平均数和方差分别是 ()
- A. 0 和 2 B. 0 和 $\sqrt{2}$ C. 0 和 1 D. 0 和 0
5. (4 分) 正方形具有而菱形不具有的性质是 ()
- A. 四条边都相等 B. 对角线相等
- C. 对角线平分一组对角 D. 对角线垂直且互相平分
6. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 2$, $\angle A = 150^\circ$, 那么半径长为 1 的 $\odot B$ 和直线 AC 的位置关系是 ()
- A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 无法确定

二. 填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

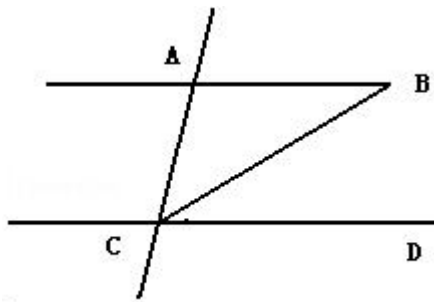
7. (4 分) 计算: $\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x-1} =$ _____.
8. (4 分) 计算: $2a(3a-1) =$ _____.
9. (4 分) 方程 $x-1 = \sqrt{x-1}$ 的解是 _____.
10. (4 分) 已知函数 $f(x) = \frac{2}{2-x}$, 那么 $f(-1) =$ _____.
11. (4 分) 如图, 点 A 在反比例函数的图象上, 那么该反比例函数的解析式是 _____.



12. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 中线 AD 和 BE 相交于点 G , 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{AG} =$ _____.



13. (4分) 如图, $AB \parallel CD$, CB 平分 $\angle ACD$, 如果 $\angle BAC = 120^\circ$, 那么 $\cos B =$ _____.



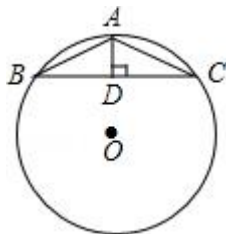
14. (4分) 在形状、大小、颜色都一样的卡片上, 分别画有线段、直角三角形、等腰三角形、等边三角形、平行四边形、菱形、等腰梯形、正五边形、正六边形、圆等 10 个图形, 小杰随机抽取一张卡片, 抽得图形既是轴对称图形, 又是中心对称图形的概率是_____.
15. (4分) 为了解某校初三年级学生一次数学测试成绩的情况, 从近 450 名九年级学生中, 随机抽取 50 名学生这次数学测试的成绩, 通过数据整理, 绘制如下统计表 (给出部分数据, 除 $[90, 100]$ 组外每组数据含最低值, 不含最高值):

分数段	$[0, 60]$	$[60, 70]$	$[70, 80]$	$[80, 90]$	$[90, 100]$
频 数	5		20		
频 率		0.12			0.1

根据上表的信息, 估计该校初三年级本次数学测试的优良率(80 分及 80 分以上)

约为_____ (填百分数).

16. (4分) 如图, $\odot O$ 半径为 5, $\triangle ABC$ 的顶点在 $\odot O$ 上, $AB = AC$, $AD \perp BC$, 垂足是 D , $\cot B = 2$, 那么 AD 的长为_____.



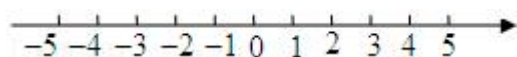
17. (4分) 一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的二元二次方程组的解是 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$, 试写出符合要求的方程组_____ (只要填写一个即可).

18. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = \frac{4}{5}$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转后, 点 C 落在射线 BA 上, 点 B 落到点 D 处, 那么 $\sin \angle ADB$ 的值等于_____.

三. (本大题共 7 题, 第 19-22 题每题 10 分; 第 23、24 题每题 12 分; 第 25 题 14 分; 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $(\pi - \sqrt{2})^0 - \cot 30^\circ + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - (\frac{1}{2})^2$.

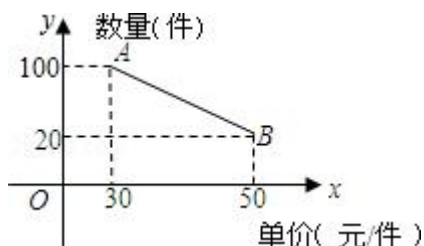
20. (10分) 解不等式组: $\begin{cases} -2(x-4) > 3x-2 \\ x-1 \geq \frac{1-x}{3} \end{cases}$; 并将解集在数轴上表示出来.



21. (10分) 销售某种商品, 根据经验, 销售单价不少于 30 元/件, 但不超过 50 元/件时, 销售数量 y (件) 与商品单价 x (元/件) 的函数关系的图象如图所示中的线段 AB .

(1) 求 y 关于 x 的函数关系式;

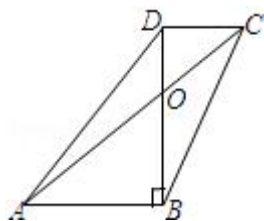
(2) 如果计划每天的销售额为 2400 元时, 那么该商品的单价应该定多少元?



22. (10分) 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, AC 和 BD 相交于点 O , $BD \perp AB$, $AB = 3$, $BD = 4$, $CD = 2$.

求：(1) $\tan \angle CAB$ 的值；

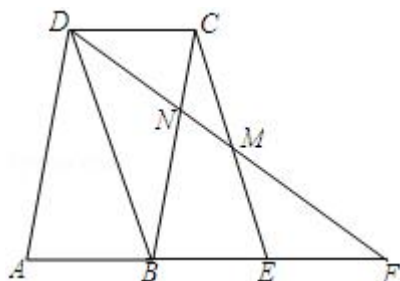
(2) $\triangle AOD$ 的面积.



23. (12 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 在边 AB 的延长线上截取 $BE = AB$, 点 F 在 AE 的延长线上, CE 和 DF 交于点 M , BC 和 DF 交于点 N .

(1) 求证: 四边形 $DBEC$ 是平行四边形;

(2) 如果 $AD^2 = AB \cdot AF$, 求证: $CM \cdot AB = DM \cdot CN$.



24. (12 分) 抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(1, \frac{9}{4})$, 对称轴是直线 $x = 2$,

顶点是 D , 与 x 轴正半轴的交点为点 B .

(1) 求抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 的解析式和顶点 D 的坐标;

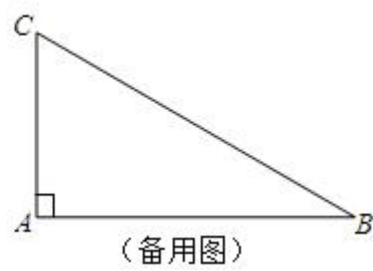
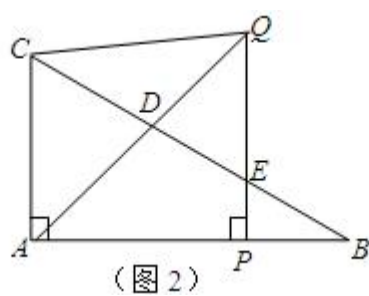
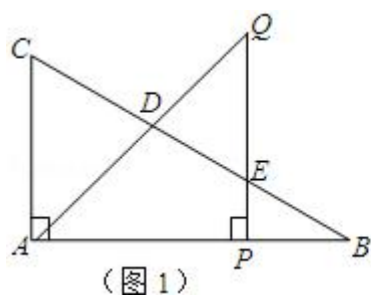
(2) 过点 D 作 y 轴的垂线交 y 轴于点 C , 点 M 在射线 BO 上, 当以 DC 为直径的 $\odot N$ 和以 MB 为半径的 $\odot M$ 相切时, 求点 M 的坐标.

25. (14 分) 如图 1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 4$, 点 P 是边 AB 上任意一点, 过点 P 作 $PQ \perp AB$ 交 BC 于点 E , 截取 $PQ = AP$, 连接 AQ , 线段 AQ 交 BC 于点 D , 设 $AP = x$, $DQ = y$.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式及定义域;

(2) 如图 2, 连接 CQ , 当 $\triangle CDQ$ 和 $\triangle ADB$ 相似时, 求 x 的值;

(3) 当以点 C 为圆心, CQ 为半径的 $\odot C$ 和以点 B 为圆心, BQ 为半径的 $\odot B$ 相交的另一个交点在边 AB 上时, 求 AP 的长.



2013 年上海市徐汇区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一. 选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. （4 分）下列二次根式中与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{6}$

B. $\sqrt{8}$

C. $\sqrt{12}$

D. $\sqrt{18}$

【考点】77：同类二次根式.

【分析】化简各选项后根据同类二次根式的定义判断.

【解答】解： A 、 $\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{3}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式；

B 、 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式；

C 、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{3}$ 被开方数相同，故是同类二次根式；

D 、 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式.

故选： C .

【点评】本题考查了同类二次根式的定义：化成最简二次根式后，被开方数相同，这样的二次根式叫做同类二次根式.

2. （4 分）将抛物线 $y = (x+2)^2$ 向下平移 2 个单位后，所得抛物线解析式为（ ）

A. $y = x^2$

B. $y = x^2 - 2$

C. $y = (x+2)^2 + 2$

D. $y = (x+2)^2 - 2$

【考点】H6：二次函数图象与几何变换.

【分析】求出平移前后的两个抛物线的顶点坐标，然后利用顶点式形式写出即可.

【解答】解：抛物线 $y = (x+2)^2$ 的顶点坐标为 $(-2, 0)$,

向下平移 2 个单位后的顶点坐标是 $(-2, -2)$,

所以，平移后得到的抛物线解析式为 $y = (x+2)^2 - 2$.

故选： D .

【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换，利用顶点的变换确定出函数解析式是此类题目常用的方法，一定要熟练掌握并灵活运用，平移规律“左加右减，上加下减”.

3. （4 分）如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，那么 x 的取值范围是（ ）

A. $m > 2$ B. $m < 2$ C. $m > 2$ 且 $m \neq 1$ D. $m < 2$ 且 $m \neq 1$

【考点】AA：根的判别式.

【分析】根据“一元二次方程 $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根”可得 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，再代入 a 、 b 、 c 的值进行计算即可.

【解答】解：由题意得： $a = 1$ ， $b = -2$ ， $c = m - 1$ ，

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (m - 1) = 4 - 4m + 4 = 8 - 4m > 0,$$

解得： $m < 2$ ，

故选：B.

【点评】此题主要考查了根的判别式，关键是掌握一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：

(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；

(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；

(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

4. (4分) 下列一组数据：-2、-1、0、1、2 的平均数和方差分别是 ()

A. 0 和 2 B. 0 和 $\sqrt{2}$ C. 0 和 1 D. 0 和 0

【考点】W1：算术平均数；W7：方差.

【分析】先求出这组数据的平均数，再根据方差公式 $S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$ 进行计算即可.

【解答】解：这组数据：-2、-1、0、1、2 的平均数是 $(-2 - 1 + 0 + 1 + 2) \div 5 = 0$ ；

$$\text{则方差} = \frac{1}{5}[(-2 - 0)^2 + (-1 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (1 - 0)^2 + (2 - 0)^2] = 2;$$

故选：A.

【点评】此题考查了平均数和方差，一般地设 n 个数据， $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$ ，则方差 $S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$ ，它反映了一组数据的波动大小，方差越大，波动性越大，反之也成立.

5. (4分) 正方形具有而菱形不具有的性质是 ()

A. 四条边都相等 B. 对角线相等
C. 对角线平分一组对角 D. 对角线垂直且互相平分

【考点】L8：菱形的性质；LE：正方形的性质．

【分析】根据正方形的性质以及菱形的性质即可判断．

【解答】解：正方形和菱形都满足：四条边都相等，对角线平分一组对角，对角线垂直且互相平分；

菱形的对角线不一定相等，而正方形的对角线一定相等．

故选：B．

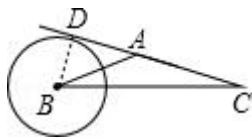
【点评】本题主要考查了正方形与菱形的性质，正确对图形的性质的理解记忆是解题的关键．

6. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 2$ ， $\angle A = 150^\circ$ ，那么半径长为1的 $\odot B$ 和直线 AC 的位置关系是（ ）

A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 无法确定

【考点】MB：直线与圆的位置关系．

【分析】过 B 作 $BD \perp AC$ 交 CA 的延长线于 D ，求出 BD ，和 $\odot B$ 的半径比较，即可得出答案．



【解答】

解：过 B 作 $BD \perp AC$ 交 CA 的延长线于 D ，

$$\because \angle BAC = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

即 B 到直线 AC 的距离等于 $\odot B$ 的半径，

$\therefore$ 半径长为1的 $\odot B$ 和直线 AC 的位置关系是相切，

故选：B．

【点评】本题考查了直线与圆的位置关系的应用，主要考查学生的推理能力．

二. 填空题（本大题共12题，每题4分，满分48分）

7. (4分) 计算： $\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x-1} = \underline{\quad -1 \quad}$ ．

【考点】6B：分式的加减法．

【分析】应用同分母分式的加减运算法则求解即可求得答案，注意要化简．

【解答】解： $\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x-1} = \frac{1-x}{x-1} = -1$.

故答案为：-1.

【点评】此题考查了同分母分式的加减运算法则. 题目比较简单，解题需细心.

8. (4分) 计算： $2a(3a-1) = \underline{6a^2 - 2a}$.

【考点】4A：单项式乘多项式.

【分析】根据单项式与多项式相乘，先用单项式乘多项式的每一项，再把所得的积相加计算即可.

【解答】解： $2a(3a-1) = 6a^2 - 2a$.

故答案为： $6a^2 - 2a$.

【点评】本题考查了单项式与多项式相乘，熟练掌握运算法则是解题的关键，计算时要注意符号的处理.

9. (4分) 方程 $x-1 = \sqrt{x-1}$ 的解是 $\underline{x_1 = 1 \text{ 或 } x_2 = 2}$.

【考点】AG：无理方程.

【分析】先把方程两边分别平方，得到 $(x-1)^2 = x-1$ ，再求出方程的解，然后进行检验即可.

【解答】解： $x-1 = \sqrt{x-1}$,

$$(x-1)^2 = x-1,$$

$$(x-1)^2 - (x-1) = 0,$$

$$(x-1)(x-2) = 0,$$

$$x-1 = 0 \text{ 或 } x-2 = 0,$$

$$x_1 = 1 \text{ 或 } x_2 = 2;$$

经检验 $x_1 = 1$ 或 $x_2 = 2$ 是原方程的解;

故答案为： $x_1 = 1$ 或 $x_2 = 2$.

【点评】此题考查了无理方程，关键是通过把方程两边分别平方，把无理方程转化成有理方程，要注意检验.

10. (4分) 已知函数 $f(x) = \frac{2}{2-x}$ ，那么 $f(-1) = \underline{\frac{2}{3}}$.

【考点】E5：函数值.

【专题】11：计算题.

【分析】把自变量的值 $x = -1$ 代入函数关系式进行计算即可得解.

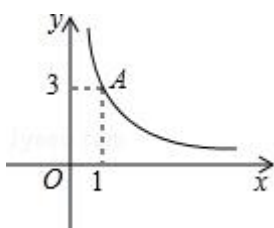
【解答】 解： $f(-1) = \frac{2}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$.

故答案为： $\frac{2}{3}$.

【点评】 本题考查了函数值求解，把自变量的值代入函数解析式计算即可，比较简单.

11. (4分) 如图，点 A 在反比例函数的图象上，那么该反比例函数的解析式是

$y = \frac{3}{x}$.



【考点】 G7: 待定系数法求反比例函数解析式.

【分析】 设反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$ ，将 $A(1, 3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 即可得到 k 的值，

从而得到反比例函数解析式.

【解答】 解：设反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$,

将 $A(1, 3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得，

$$k = 1 \times 3 = 3,$$

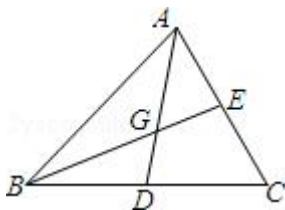
则反比例函数解析式为 $y = \frac{3}{x}$.

故答案为 $y = \frac{3}{x}$.

【点评】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，经过函数的某点一定在函数的图象上.

12. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，中线 AD 和 BE 相交于点 G ，如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} =$

$\vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.



【考点】 LM: *平面向量.

【分析】由 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 利用三角形法则, 即可求得 $\overrightarrow{BC}$ 的长, 又由在 $\triangle ABC$ 中, 中线 AD 和 BE 相交于点 G , 可求得 $\overrightarrow{BD}$ 的长, 继而求得 $\overrightarrow{AD}$ 的长, 又由重心的性质, 即可求得答案.

【解答】解: $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, 中线 AD 和 BE 相交于点 G ,

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a},$$

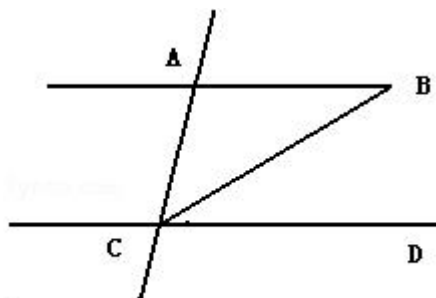
$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{a} + \left(\frac{1}{2} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a} \right) = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right) = \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}.$$

故答案为: $\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}$.

【点评】此题考查了平面向量的知识. 此题难度适中, 注意掌握三角形法则的应用, 注意掌握数形结合思想的应用.

13. (4分) 如图, $AB \parallel CD$, CB 平分 $\angle ACD$, 如果 $\angle BAC = 120^\circ$, 那么 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



【考点】JA: 平行线的性质; T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】根据平行线的性质求出 $\angle ACD$ 的度数, 根据 CB 平分 $\angle ACD$ 求出 $\angle BCD$ 的度数, 根据 $\angle B = \angle BCD$ 得出 $\angle B$ 的度数即可求出 $\cos B$ 的值.

【解答】解: $\because AB \parallel CD$, $\angle BAC = 120^\circ$,

$$\therefore \angle ACD = 180^\circ - \angle BAC = 60^\circ,$$

$\because CB$ 平分 $\angle ACD$,

$$\therefore \angle BCD = \frac{1}{2} \angle ACD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle BCD = 30^\circ ,$$

$$\therefore \cos \angle B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【点评】 本题考查了特殊角的三角函数值及平行四边形的性质，熟练记忆一些特殊角的三角函数值是关键.

14. (4 分) 在形状、大小、颜色都一样的卡片上，分别画有线段、直角三角形、等腰三角形、等边三角形、平行四边形、菱形、等腰梯形、正五边形、正六边形、圆等 10 个图形，小杰随机抽取一张卡片，抽得图形既是轴对称图形，又是中心对称图形的概率是 $\frac{2}{5}$.

【考点】 P3：轴对称图形；R5：中心对称图形；X4：概率公式.

【分析】 先判断出线段、直角三角形、等腰三角形、等边三角形、平行四边形、菱形、等腰梯形、正五边形、正六边形、圆中既是中心对称图形，又是轴对称图形的个数，再根据概率公式进行解答即可.

【解答】 解： $\because$ 在这一组图形中既是中心对称图形，又是轴对称图形的是：线段、正六边形、菱形、圆共 4 个，

$$\therefore 10 \text{ 张卡片上的图形既是中心对称图形，又是轴对称图形的概率是 } \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{5}.$$

【点评】 本题考查的是概率公式及中心对称图形和轴对称图形的概念，如果一个事件有 n 种可能，而且这些事件的可能性相同，其中事件 A 出现 m 种结果，那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

15. (4 分) 为了解某校初三年级学生一次数学测试成绩的情况，从近 450 名九年级学生中，随机抽取 50 名学生这次数学测试的成绩，通过数据整理，绘制如下统计表（给出部分数据，除[90, 100]组外每组数据含最低值，不含最高值）:

分数段	[0, 60]	[60, 70]	[70, 80]	[80, 90]	[90, 100]
频 数	5		20		
频 率		0.12			0.1

根据上表的信息,估计该校初三年级本次数学测试的优良率(80分及80分以上)约为 38% (填百分数).

【考点】 V5: 用样本估计总体; V7: 频数(率)分布表.

【分析】 求出 $[0, 60]$ 与 $[70, 80]$ 的频率之和,再根据各组频率之和等于1求出 $[80, 90]$ 和 $[90, 100]$ 的频率之和,即可得解.

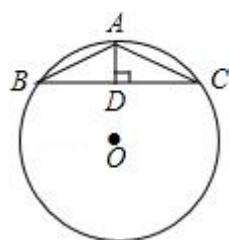
【解答】 解:由图可知, $[0, 60]$ 与 $[70, 80]$ 的频率之和 $= \frac{5+20}{50} = 0.5$,

所以, $[80, 90]$ 和 $[90, 100]$ 的频率之和 $= 1 - 0.5 - 0.12 = 0.38 = 38\%$.

故答案为:38%.

【点评】 本题考查了频数分布直方表,用样本估计总体,解答本题的关键在于整体思想的利用.

16. (4分)如图, $\odot O$ 半径为5, $\triangle ABC$ 的顶点在 $\odot O$ 上, $AB=AC$, $AD \perp BC$,垂足是 D , $\cot B = 2$,那么 AD 的长为 2.



【考点】 KQ: 勾股定理; M2: 垂径定理; T7: 解直角三角形.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 由 $AB=AC$, AD 垂直于 BC ,利用垂径定理得到 AD 延长线过圆心 O ,连接 OB ,由 $\cot B$ 得到 BD 与 AD 的关系,设出 AD 及 BD ,由 $OA-AD$ 表示出 OD ,在直角三角形 OBD 中,利用勾股定理列出关于 x 的方程,求出方程的解得到 x 的值,即可确定出 AD 的长.

【解答】 解:延长 AD ,由垂径定理得 AD 的延长线过圆心 O ,连接 OB ,

$$\because \cot B = \frac{BD}{AD} = 2,$$

$$\therefore \text{设 } AD = x, \text{ 则有 } BD = 2x,$$

$$\therefore OD = OA - AD = 5 - x,$$

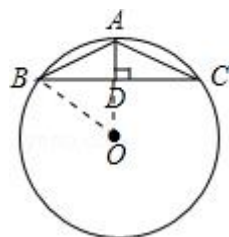
在 $\text{Rt}\triangle OBD$ 中,根据勾股定理得: $OB^2 = BD^2 + OD^2$,

$$\text{即 } 25 = 4x^2 + (5 - x)^2,$$

解得: $x = 2$ 或 $x = 0$ (舍去),

则 $AD = 2$.

故答案为: 2



【点评】 此题考查了垂径定理, 勾股定理, 以及解直角三角形, 熟练掌握垂径定理是解本题的关键.

17. (4 分) 一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的二元二次方程组的解

是 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$, 试写出符合要求的方程组 $\begin{cases} y=2x \\ xy=8 \end{cases}$ (只要填写一个即可).

【考点】 AF: 高次方程.

【专题】 16: 压轴题; 26: 开放型.

【分析】 从方程组的两组解入手, 找到两组解之间的乘积关系为二元二次方程, 倍数关系为二元一次方程, 联立方程组即可.

【解答】 解: 根据方程组的解可看出: $xy = 8$, $y = 2x$

所以符合要求的方程组为

$$\begin{cases} y=2x \\ xy=8 \end{cases}.$$

【点评】 根据未知数的解写方程组的题目通常是利用解之间的数量关系 (和差关系或倍数关系等) 来表示方程组.

18. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = \frac{4}{5}$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转后, 点

C 落在射线 BA 上, 点 B 落到点 D 处, 那么 $\sin \angle ADB$ 的值等于 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【考点】 R2: 旋转的性质.

【分析】 作出图形, 设 $BC = 4a$, $AB = 5a$, 求出 AC , 再根据旋转的性质可得 $AB = AD$, $AC = AC'$, $BC = C'D$, 然后分①逆时针旋转时, 求出 BC' , 再利用勾股定理列式求出 BD , 根据等边对等角求出 $\angle ADB = \angle ABD$, 然后根据锐角的正弦等于对边比斜边列式计算即可得解; ②顺时针旋转时, 求出 BC' , 再利用勾股定理列式求出 BD , 过点 A 作 $AE \perp BD$ 于 E , 根据等腰三角形三线

合一的性质求出 BE ，再利用勾股定理列式求出 AE ，然后根据锐角的正弦值等于对边比斜边列式计算即可得解．

【解答】 解： $\because \angle C = 90^\circ$ ， $\sin A = \frac{4}{5}$ ，

$\therefore$ 设 $BC = 4a$ ， $AB = 5a$ ，

则 $AC = \sqrt{(5a)^2 - (4a)^2} = 3a$ ，

根据旋转的性质， $AB = AD = 5a$ ， $AC = AC' = 3a$ ， $BC = C'D = 4a$ ，

①如图 1，逆时针旋转时， $BC' = AB + AC' = 5a + 3a = 8a$ ，

根据勾股定理， $BD = \sqrt{BC'^2 + C'D^2} = \sqrt{(8a)^2 + (4a)^2} = 4\sqrt{5}a$ ，

$\because AB = AD$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle ABD$ ，

$\therefore \sin \angle ADB = \sin \angle ABD = \frac{C'D}{BD} = \frac{4a}{4\sqrt{5}a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ；

②如图 2，顺时针旋转时， $BC' = AB - AC' = 5a - 3a = 2a$ ，

根据勾股定理， $BD = \sqrt{BC'^2 + C'D^2} = \sqrt{(2a)^2 + (4a)^2} = 2\sqrt{5}a$ ，

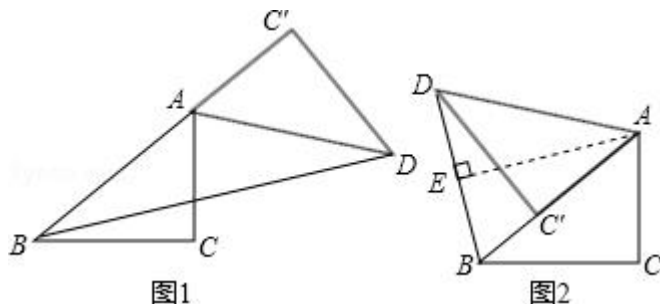
过点 A 作 $AE \perp BD$ 于 E ，则 $BE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5}a = \sqrt{5}a$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{(5a)^2 - (\sqrt{5}a)^2} = 2\sqrt{5}a$ ，

$\therefore \sin \angle ADB = \frac{AE}{AD} = \frac{2\sqrt{5}a}{5a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ；

综上所述， $\sin \angle ADB$ 的值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ．

故答案为： $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ．



【点评】 本题考查了旋转的性质，勾股定理的应用，等边对等角的性质，等腰三角形三线合一的性质，难点在于要分情况讨论并找出 $\angle ADB$ 所在的直角三角形，作出图形更形象直观．

三. (本大题共 7 题, 第 19-22 题每题 10 分; 第 23、24 题每题 12 分; 第 25 题 14 分; 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $(\pi - \sqrt{2})^0 - \cot 30^\circ + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - (\frac{1}{2})^2$.

【考点】6E: 零指数幂; 79: 二次根式的混合运算; T5: 特殊角的三角函数值.

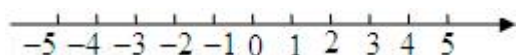
【专题】11: 计算题.

【分析】根据零指数幂、特殊角的三角函数值和分母有理化 $\frac{1}{4}$, 然后合并即可.

【解答】解: 原式 $= 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \frac{1}{4}$
 $= \frac{3}{4} + \sqrt{2}$.

【点评】本题考查了二次根式的混合运算: 先把各二次根式化为最简二次根式, 再进行二次根式的乘除运算, 然后合并同类二次根式. 也考查了零指数幂和特殊角的三角函数值.

20. (10 分) 解不等式组: $\begin{cases} -2(x-4) > 3x-2 \\ x-1 \geq \frac{1-x}{3} \end{cases}$; 并将解集在数轴上表示出来.



【考点】C4: 在数轴上表示不等式的解集; CB: 解一元一次不等式组.

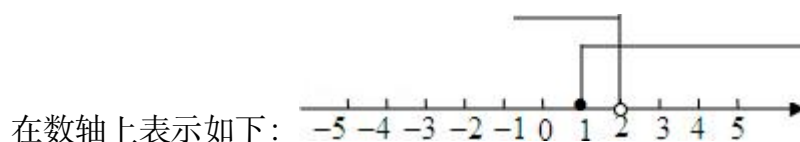
【专题】11: 计算题.

【分析】先求出两个不等式的解集, 再求其公共解.

【解答】解: $\begin{cases} -2(x-4) > 3x-2 \text{ ①} \\ x-1 \geq \frac{1-x}{3} \text{ ②} \end{cases}$,

由不等式①解得, $x < 2$,

由不等式②解得, $x \geq 1$,



所以, 原不等式组的解集是 $1 \leq x < 2$.

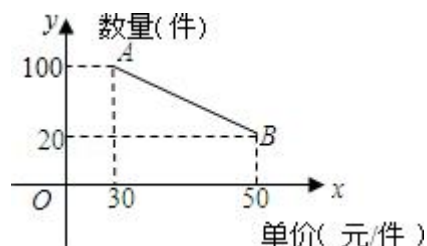
【点评】本题考查了一元一次不等式组的解法, 在数轴上表示不等式组的解集,

需要把每个不等式的解集在数轴上表示出来（ $>$ ， $\geq$ 向右画； $<$ ， $\leq$ 向左画），在表示解集时“ $\geq$ ”，“ $\leq$ ”要用实心圆点表示；“ $<$ ”，“ $>$ ”要用空心圆点表示．

21.（10 分）销售某种商品，根据经验，销售单价不少于 30 元 / 件，但不超过 50 元 / 件时，销售数量 y （件）与商品单价 x （元 / 件）的函数关系的图象如图所示中的线段 AB ．

（1）求 y 关于 x 的函数关系式；

（2）如果计划每天的销售额为 2400 元时，那么该商品的单价应该定多少元？



【考点】 AD：一元二次方程的应用；FH：一次函数的应用．

【分析】（1）根据 A 、 B 两点的坐标值可求出一次函数的解析式；

（2）设该商品的单价应该定 x 元，利用：每天的销售额 = 商品单价 $\times$ 销售数量，得到关于 x 的一元二次方程，计算求出 x 的值即可．

【解答】解：（1）设 y 关于 x 的函数关系式为 $y = kx + b$ （ $k \neq 0$ ）．

由题意，得
$$\begin{cases} 30k + b = 100 \\ 50k + b = 20 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} k = -4 \\ b = 220 \end{cases}$$
．

故 y 关于 x 的函数关系式为 $y = -4x + 220$ ；

（2）设该商品的单价应该定 x 元．

由题意，得 $x(-4x + 220) = 2400$ ．

化简整理，得 $x^2 - 55x + 600 = 0$ ．

解得， $x_1 = 40$ ， $x_2 = 15$ ．

经检验， $x_2 = 15$ 不合题意，舍去．

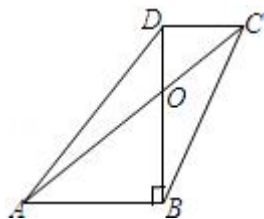
答：计划每天的销售额为 2400 元时，该商品的单价应该定 40 元．

【点评】 本题考查了用待定系数法求一次函数的解析式以及二次函数和一元二次方程的关系，是中考题中常见题型．

22. (10分) 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, AC 和 BD 相交于点 O , $BD \perp AB$,
 $AB = 3$, $BD = 4$, $CD = 2$.

求: (1) $\tan \angle CAB$ 的值;

(2) $\triangle AOD$ 的面积.



【考点】 LH: 梯形; T1: 锐角三角函数的定义.

【分析】 (1) 先求出 BO 的长度, 根据 $\tan \angle CAB = \frac{BO}{AB}$ 即可得出答案.

(2) 根据 (1) 中求得的 BO 的长度, 可得出 OD 的长度, $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} OD \times AB$,

代入数据即可得出答案.

【解答】 解: (1) $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \frac{BO}{DO} = \frac{AB}{CD} = \frac{3}{2},$$

$$\because BD = 4,$$

$$\therefore BO = \frac{3}{5} \times 4 = \frac{12}{5},$$

在 $\text{Rt} \triangle ABO$ 中, $\angle ABO = 90^\circ$,

$$\therefore \tan \angle CAB = \frac{BO}{AB} = \frac{4}{5};$$

$$(2) \because DO = BD - BO = 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5},$$

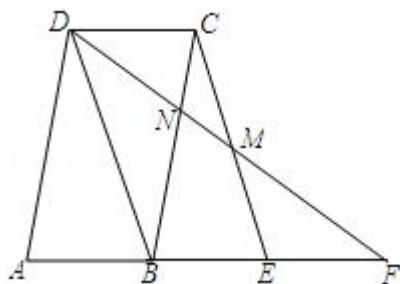
$$\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} AB \cdot DO = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{8}{5} = \frac{12}{5}.$$

【点评】 本题考查了梯形、平行线分线段成比例的知识, 解答本题的关键是利用比例的知识求出 BO 的长度, 难度一般.

23. (12分) 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 在边 AB 的延长线上截取 $BE = AB$, 点 F 在 AE 的延长线上, CE 和 DF 交于点 M , BC 和 DF 交于点 N .

(1) 求证: 四边形 $DBEC$ 是平行四边形;

(2) 如果 $AD^2 = AB \cdot AF$, 求证: $CM \cdot AB = DM \cdot CN$.



【考点】L7：平行四边形的判定与性质；S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】（1）根据“对边平行且相等的四边形是平行四边形”证得结论；

（2）通过相似三角形 $\triangle ADB \sim \triangle AFD$ 的对应角相等知 $\angle ADB = \angle DFA$ ，然后由 $\square ABCD$ 、 $\square DBEC$ 的性质以及等量代换证得 $\triangle CMN \sim \triangle CMD$ ，则该对相似三角形的对应边成比例，即 $\frac{CM}{DM} = \frac{CN}{DC}$ ，又因为 $DC = AB$ ，所以 $\frac{CM}{DM} = \frac{CN}{AB}$ ，即 $CM \cdot AB = DM \cdot CN$.

【解答】证明：（1） $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore DC \parallel AB, DC = AB.$$

$$\because BE = AB,$$

$$\therefore DC = BE.$$

$$\text{又} \because DC \parallel BE,$$

$\therefore$ 四边形 $DBEC$ 是平行四边形；

$$(2) \because AD^2 = AB \cdot AF,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AD},$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle AFD,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DFA.$$

$$\because DC \parallel AB,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle DFA.$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore BC \parallel AD,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC.$$

$\because$ 四边形 $DBEC$ 是平行四边形，

$$\therefore CE \parallel DB,$$

$$\therefore \angle MCN = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle MCN = \angle CDF.$$

$$\text{又} \because \angle CMN = \angle DMC,$$

$$\therefore \triangle CMN \sim \triangle CMD,$$

$$\therefore \frac{CM}{DM} = \frac{CN}{DC},$$

$$\because DC = AB,$$

$$\therefore \frac{CM}{DM} = \frac{CN}{AB},$$

$$\therefore CM \cdot AB = DM \cdot CN.$$

【点评】 本题考查了平行四边形的判定与性质、相似三角形的判定与性质. 三角形相似的判定一直是中考考查的热点之一, 在判定两个三角形相似时, 应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件, 以充分发挥基本图形的作用.

24. (12分) 抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(1, \frac{9}{4})$, 对称轴是直线 $x = 2$, 顶点是 D , 与 x 轴正半轴的交点为点 B .

(1) 求抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 的解析式和顶点 D 的坐标;

(2) 过点 D 作 y 轴的垂线交 y 轴于点 C , 点 M 在射线 BO 上, 当以 DC 为直径的 $\odot N$ 和以 MB 为半径的 $\odot M$ 相切时, 求点 M 的坐标.

【考点】 HF: 二次函数综合题.

【分析】 (1) 根据抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(1, \frac{9}{4})$, 对称轴是直线 $x = 2$, 可得关于 a, b 的方程组, 求得 a, b 的值, 从而得到抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 的解析式; 再根据顶点坐标公式即可得到顶点 D 的坐标;

(2) 设 $\odot M$ 的半径为 r . 分两种情况: ①当 $\odot M$ 和 $\odot N$ 外切时, 此时点 M 在线段 BO 上; ②当 $\odot M$ 和 $\odot N$ 外切时, 此时点 M 在线段 BO 的延长线上; 列出关于 r 的方程, 求得 r 的值, 从而得到点 M 的坐标.

【解答】 解: (1) 由题意, 得
$$\begin{cases} a+b=\frac{9}{4} \\ -\frac{b}{2a}=2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases}.$$

则抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 的解析式 $y = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$, 顶点 $D(2, 3)$.

(2) 设 $\odot M$ 的半径为 r .

由当以 DC 为直径的 $\odot N$ 和以 MB 为半径的 $\odot M$ 相切时, 分下列两种情况:

① 当 $\odot M$ 和 $\odot N$ 外切时, 此时点 M 在线段 BO 上,

$$\text{可得 } 3^2 + (4 - r - 1)^2 = (r + 1)^2.$$

$$\text{解得 } r = \frac{17}{8},$$

$$\therefore M\left(\frac{15}{8}, 0\right).$$

② 当 $\odot M$ 和 $\odot N$ 内切时, 此时点 M 在线段 BO 的延长线上,

$$\text{可得 } 3^2 + (r - 1 - 2)^2 = (r - 1)^2.$$

$$\text{解得 } r = \frac{17}{4},$$

$$\therefore M\left(-\frac{1}{4}, 0\right).$$

综合①、②可知, 当 $\odot M$ 和 $\odot N$ 相切时, $M\left(\frac{15}{8}, 0\right)$ 或 $M\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$.

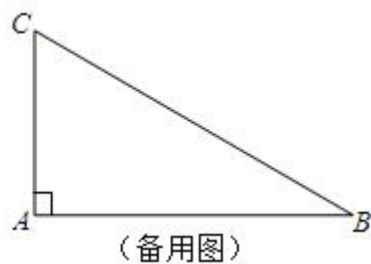
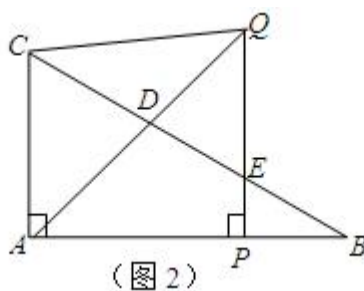
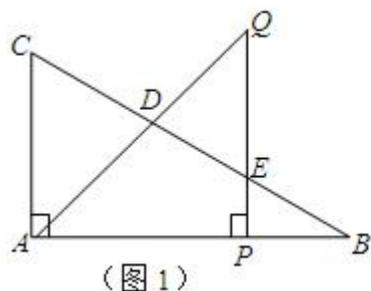
【点评】 考查了二次函数综合题, 涉及的知识点有: 待定系数法求函数解析式, 对称轴公式、顶点坐标公式; 第(2)问注意分内切和外切两种情况讨论求解, 综合性较强.

25. (14分) 如图1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 4$, 点 P 是边 AB 上任意一点, 过点 P 作 $PQ \perp AB$ 交 BC 于点 E , 截取 $PQ = AP$, 连接 AQ , 线段 AQ 交 BC 于点 D , 设 $AP = x$, $DQ = y$.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式及定义域;

(2) 如图2, 连接 CQ , 当 $\triangle CDQ$ 和 $\triangle ADB$ 相似时, 求 x 的值;

(3) 当以点 C 为圆心, CQ 为半径的 $\odot C$ 和以点 B 为圆心, BQ 为半径的 $\odot B$ 相交的另一个交点在边 AB 上时, 求 AP 的长.



【考点】 SO：相似形综合题.

【分析】 (1) 过点 D 作 $DM \perp AC$ ，垂足为 M 。根据等腰直角三角形的性质和相似三角形的判定和性质可求 AQ ， AD ，再根据线段之间的和差关系可得 y 关于 x 的函数解析式；

(2) 当 $\triangle CDQ$ 和 $\triangle ADB$ 相似时，分两种情况：①当 $\angle QCD = \angle B$ 时；②当 $\angle QCD = \angle QAB$ 时；根据相似三角形的性质可求 x 的值；

(3) 设 $\odot C$ 与 $\odot B$ 相交的另一个交点为 M ，连接 QM 交 BC 于点 N 。可得 $\therefore \triangle BMN \sim \triangle BCA$ ， $\triangle QPM \sim \triangle BAC$ ，根据相似三角形的性质即可求出 AP 的长。

【解答】 解：(1) 过点 D 作 $DM \perp AC$ ，垂足为 M 。

由题意，可知 $\triangle APQ$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore AQ = \sqrt{2}x;$$

$$\because \angle CAB = 90^\circ, \angle QAP = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = 45^\circ,$$

$$\because DM \perp AC,$$

$$\therefore \triangle DAM \text{ 是等腰直角三角形},$$

易得 $\triangle CMD \sim \triangle CAB$ ，

$$\therefore \frac{CM}{DM} = \frac{CA}{AB} = \frac{3}{4};$$

设 $CM = 3a$ ， $DM = 4a$ ，

$$\therefore AM = 4a,$$

$$\therefore a = \frac{3}{7}, DM = AM = \frac{12}{7},$$

$$\therefore AD = \frac{12}{7}\sqrt{2},$$

$$\therefore y = \sqrt{2}x - \frac{12}{7}\sqrt{2}.$$

定义域是： $\frac{12}{7} \leq x \leq 4$.

(注: 其它解法参照评分.)

$$(2) \because \angle CDQ = \angle ADB,$$

$\therefore$ 当 $\triangle CDQ$ 和 $\triangle ADB$ 相似时, 分以下两种情况:

① 当 $\angle QCD = \angle B$ 时,

$$\therefore CQ \parallel AB,$$

四边形 $CAPQ$ 是正方形;

$$\therefore x = AP = AC = 3.$$

② 当 $\angle QCD = \angle QAB$ 时,

$$\therefore \frac{CD}{AD} = \frac{QD}{BD},$$

由上述 (1) 的解法, 可得 $CD = \frac{15}{7}$, $BD = \frac{20}{7}$,

$$\therefore \frac{12}{7} \sqrt{2} y = \frac{15}{7} \times \frac{20}{7},$$

$$\therefore y = \frac{25\sqrt{2}}{14};$$

$$\therefore \sqrt{2} x - \frac{12}{7} \sqrt{2} = \frac{25\sqrt{2}}{14},$$

$$\text{解得 } x = \frac{7}{2}.$$

综合①②, 当 $\triangle CDQ$ 和 $\triangle ADB$ 相似时, x 的值为 3 或 $\frac{7}{2}$.

(3) 如图, 设 $\odot C$ 与 $\odot B$ 相交的另一个交点为 M , 连接 QM 交 BC 于点 N .

$$\therefore BC \perp QM, QN = MN.$$

$$\therefore \triangle BMN \sim \triangle BCA, \triangle QPM \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{MN}{BN} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4},$$

设 $MN = 3t$, $BN = 4t$,

$$\therefore BM = 5t;$$

$$\therefore QM = 6t,$$

$$\therefore PQ = \frac{24}{5}t;$$

$$\therefore BQ = BM = 5t,$$

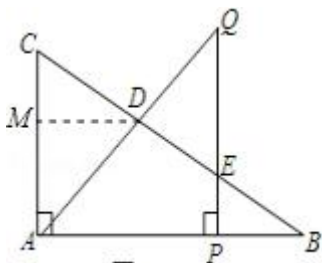
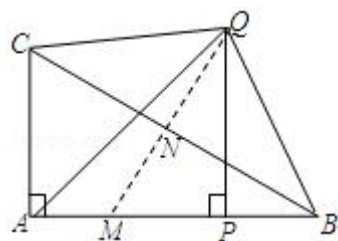
$$\therefore BP = \frac{7}{5}t;$$

$$\text{又} \because AP = PQ = \frac{24}{5}t,$$

$$\therefore \frac{24}{5}t + \frac{7}{5}t = 4,$$

$$\text{解得 } t = \frac{20}{31};$$

$$\therefore AP = \frac{24}{5} \times \frac{20}{31} = \frac{96}{31}.$$



(图 1)

【点评】此题主要考查了相似形综合题，涉及的知识有：相似三角形的判定和性质，求一次函数解析式，分类思想的运用，正方形的判定和性质，综合性较强，有一定的难度．