

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）化简： $|1-\sqrt{2}| =$ _____.

8.（4 分）计算： $(a^3)^2 =$ _____.

9.（4 分）计算： $6 \div 6^{\frac{1}{3}} =$ _____（结果表示为幂的形式）.

10.（4 分）不等式组 $\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

11.（4 分）在一个不透明的布袋中装有 2 个白球和 3 个黄球，它们除颜色不同外，其余均相同. 若从中随机摸出一个球，则摸到黄球的概率是_____.

12.（4 分）如果关于 x 的方程 $(a^2 - 1)x = a + 1$ 无解，那么实数 $a =$ _____.

13.（4 分）近视眼镜的度数 y （度）与镜片焦距 x （米）呈反比例，其函数关系式为 $y = \frac{100}{x}$. 如果近视眼镜镜片的焦距 $x = 0.25$ 米，那么近视眼镜的度数 y 为_____.

14.（4 分）方程 $\sqrt{x+6} = -x$ 的根是_____.

15.（4 分）手机已经普及，家庭座机还有多少？为此，某校中学生从某街道 5000 户家庭中随机抽取 50 户家庭进行统计，列表如下：

拥有座机数(部)	0	1	2	3	4
相应户数	10	14	18	7	1

该街道拥有多部电话（指 1 部以上，不含 1 部）的家庭大约有_____户.

16.（4 分）如果梯形两底的长分别为 3 和 7，那么联结该梯形两条对角线的中点所得的线段长为_____.

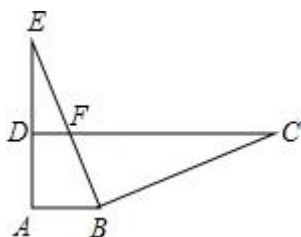
17.（4 分）在平面直角坐标系中，对于平面内任意一点 (x, y) ，若规定以下两种变换：

① $f(x, y) = (x+2, y)$. 如 $f(1, 1) = (3, 1)$;

② $g(x, y) = (-x, -y)$, 如 $g(2, 2) = (-2, -2)$.

按照以上变换有： $g(f(1, 1)) = g(3, 1) = (-3, -1)$ ，那么 $f(g(-3, 4))$ 等于_____.

18.（4 分）如图，在梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB \parallel CD$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 5cm$ ， $BC = 13cm$. 以点 B 为旋转中心，将 BC 逆时针旋转 90° 至 BE ， BE 交 CD 于 F 点. 如果点 E 恰好落在射线 AD 上，那么 DF 的长为_____ cm .



三、简答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

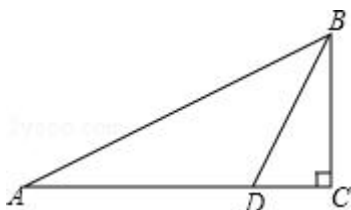
19. (10 分) 计算: $(\sqrt{3})^0 - \sqrt{27} + 4\cos 30^\circ - \frac{\sin 30^\circ}{\tan 45^\circ + \sin 60^\circ}$.

20. (10 分) 解方程: $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} = 1$.

21. (10 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 在 AC 边上, 且 $BC^2 = CD \cdot CA$.

(1) 求证: $\angle A = \angle CBD$;

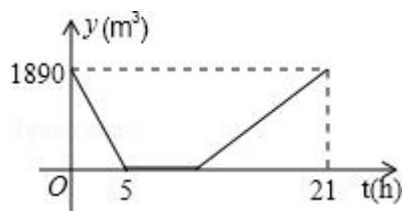
(2) 当 $\angle A = \alpha$, $BC = 2$ 时, 求 AD 的长 (用含 α 的锐角三角比表示).



22. (10 分) 某游泳池内现存水 $1890 (m^3)$, 已知该游泳池的排水速度是灌水速度的 2 倍. 假设在换水时需要经历“排水 - - 清洗 - - 灌水”的过程, 其中游泳池内剩余的水量 $y (m^3)$ 与换水时间 $t (h)$ 之间的函数关系如图所示. 根据图象解答下列问题:

(1) 根据图中提供的信息, 求排水的速度及清洗该游泳池所用的时间;

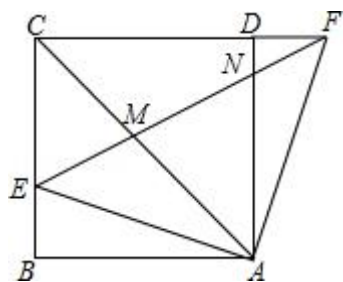
(2) 求灌水过程中的 $y (m^3)$ 与换水时间 $t (h)$ 之间的函数关系式, 写出函数的定义域.



23. (12 分) 如图, 点 E 是正方形 $ABCD$ 边 BC 上的一点 (不与 B 、 C 重合), 点 F 在 CD 边的延长线上, 且满足 $DF = BE$. 联结 EF , 点 M 、 N 分别是 EF 与 AC 、 AD 的交点.

(1) 求 $\angle AFE$ 的度数;

(2) 求证: $\frac{CE}{CM} = \frac{AC}{FC}$.

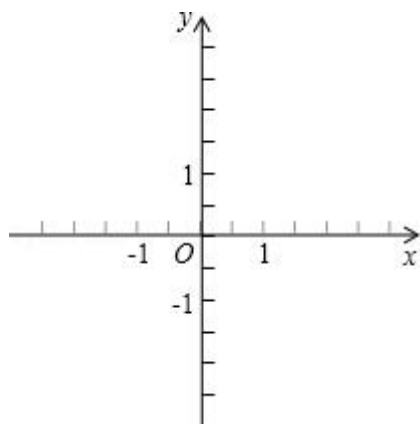


24. (12分) 已知平面直角坐标系 xOy (如图), 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-3, 0)$ 、 $C(0, -\frac{3}{2})$.

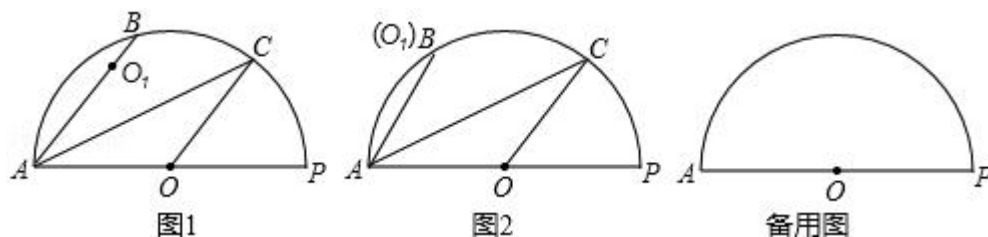
(1) 求该抛物线顶点 P 的坐标;

(2) 求 $\tan \angle CAP$ 的值;

(3) 设 Q 是 (1) 中所求出的抛物线的一个动点, 点 Q 的横坐标为 t , 当点 Q 在第四象限时, 用含 t 的代数式表示 $\triangle QAC$ 的面积.



25. (14分) 已知 AP 是半圆 O 的直径, 点 C 是半圆 O 上的一个动点 (不与点 A 、 P 重合), 联结 AC , 以直线 AC 为对称轴翻折 AO , 将点 O 的对称点记为 O_1 , 射线 AO_1 交半圆 O 于点 B , 联结 OC .



(1) 如图 1, 求证: $AB \parallel OC$;

(2) 如图 2, 当点 B 与点 O_1 重合时, 求证: $\widehat{AB} = \widehat{CB}$;

(3) 过点 C 作射线 AO_1 的垂线, 垂足为 E , 联结 OE 交 AC 于 F . 当 $AO = 5$,

$O_1B = 1$ 时, 求 $\frac{CF}{AF}$ 的值.

2013 年上海市宝山区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列说法中，正确的是（ ）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 是分数

B. 0 是正整数

C. $\frac{22}{7}$ 是有理数

D. $\sqrt{16}$ 是无理数

【考点】27：实数.

【分析】根据实数的分类进行判断.

【解答】解： A 、 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 是无理数，不是分数，故本选项错误；

B 、0 既不是正整数，也不是负整数，故本选项错误；

C 、 $\frac{22}{7}$ 是分数，属于有理数，故本选项正确；

D 、 $\sqrt{16}=4$ ，所以 $\sqrt{16}$ 是开的尽方的数，属于有理数，故本选项错误；

故选： C .

【点评】本题考查了实数的分类，注意，0 是整数，但它既不是正整数，也不是负整数.

2.（4 分）抛物线 $y = (x - 1)^2 + 4$ 与 y 轴的交点坐标是（ ）

A. (0, 4)

B. (1, 4)

C. (0, 5)

D. (4, 0)

【考点】H5：二次函数图象上点的坐标特征.

【专题】11：计算题.

【分析】根据 y 轴上点的坐标特征把 $x = 0$ 代入 $y = (x - 1)^2 + 4$ ，然后计算出对应的 y 的值，即可确定抛物线与 y 轴的交点坐标.

【解答】解： $1 + 4 = 5$ ，

所以抛物线 $y = (x - 1)^2 + 4$ 与 y 轴的交点坐标为 (0, 5).

故选： C .

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征：二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图象上点的坐标满足其解析式.

3.（4 分）下列说法正确的是（ ）

A. 一组数据的平均数和中位数一定相等

- B. 一组数据的平均数和众数一定相等
- C. 一组数据的方差一定是正数
- D. 一组数据的众数一定等于该组数据中的某个数据

【考点】W1：算术平均数；W4：中位数；W5：众数；W7：方差．

【分析】根据各知识点的概念对各选项进行判断选出正确答案即可．

【解答】解：A、一组数据的平均数和中位数有可能相等，故本选项错误；

B、一组数据的平均数和众数不一定相等，故本选项错误；

C、一组数据的方差一定是非负数，故本选项错误；

D、一组数据的众数一定等于该组数据中的某个数据，这种说法是正确的，故本选项正确．

故选：D．

【点评】本题考查了众数、平均数等知识点，属于基础题，解答本题的关键是熟练掌握各知识点的概念．

4.（4分）今年春节期间，小明把2000元压岁钱存入中国邮政储蓄银行，存期三年，年利率是4.25%，小明在存款到期后可以拿到的本利和为（ ）

- A. $2000(1+4.25\%)^3$ 元
- B. $2000+2000 \times 4.25\% \times 3$ 元
- C. $2000 \times 4.25\% \times 3$ 元
- D. $2000(1+4.25\%) \times 3$ 元

【考点】1G：有理数的混合运算．

【专题】12：应用题．

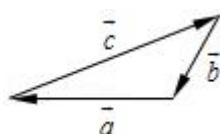
【分析】根据本利和 = 本金 + 本金 × 年利率 × 期数，即可得到结果．

【解答】解：根据题意得：小明在存款到期后可以拿到的本利和为 $2000+2000 \times 4.25\% \times 3$ （元）．

故选：B．

【点评】此题考查了有理数混合运算的应用，弄清题意是解本题的关键．

5.（4分）如图，已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ，那么下列结论正确的是（ ）



- A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$
- B. $\vec{a} - \vec{c} = \vec{b}$
- C. $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$
- D. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

【考点】LM: *平面向量.

【分析】观察图可得: $\vec{a}+\vec{c}=-\vec{b}$ 或 $\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$ 或 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$ 或 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$. 即可求得答案.

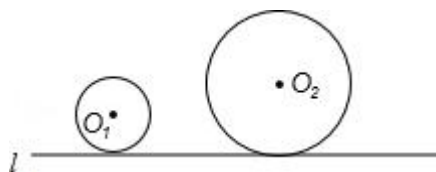
【解答】解: 根据题意得: $\vec{a}+\vec{c}=-\vec{b}$ 或 $\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$ 或 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$ 或 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$.

故 C 正确; A, B, D 错误.

故选: C.

【点评】此题考查了平面向量的知识. 此题难度不大, 注意掌握三角形法则的应用, 注意数形结合思想的应用.

6. (4 分) 已知 $\odot O_1$ 的半径长为 2cm , $\odot O_2$ 的半径长为 4cm . 将 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 放置在直线 l 上 (如图), 如果 $\odot O_1$ 在直线 l 上任意滚动, 那么圆心距 O_1O_2 的长不可能是 ()



A. 1cm

B. 2cm

C. 6cm

D. 8cm .

【考点】MJ: 圆与圆的位置关系.

【分析】从两圆的几种位置关系讨论即可得到答案.

【解答】解: 当两圆外离时, 两圆的圆心距 $> 4+2=6$;

当两圆外切时, 两圆的圆心距 $= 4+2=6$;

当两圆内切时, 两圆的圆心距 $= 4-2=2$;

$\because \odot O_1$ 在直线 l 上任意滚动,

$\therefore$ 不可能内含,

故选: A.

【点评】本题考查了两圆的位置关系, 解题的关键是熟知两圆的圆心距与两圆的半径之间的关系.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 化简: $|1-\sqrt{2}| = \underline{\sqrt{2}-1}$.

【考点】28: 实数的性质.

【分析】先比较 1 与 $\sqrt{2}$ 的大小, 再根据绝对值的定义即可求解.

【解答】解: $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$.

【点评】此题主要考查了求实数的绝对值，其中非负数的绝对值等于他本身，负数的绝对值等于它的相反数.

8. (4分) 计算: $(a^3)^2 = \underline{a^6}$.

【考点】47: 幂的乘方与积的乘方.

【分析】按照幂的乘方法则: 底数不变, 指数相乘计算. 即 $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 是正整数)

【解答】解: $(a^3)^2 = a^6$.

故答案为: a^6 .

【点评】本题考查了幂的乘方法则: 底数不变, 指数相乘. $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 是正整数), 牢记法则是关键.

9. (4分) 计算: $6 \div 6^{\frac{1}{3}} = \underline{6^{\frac{2}{3}}}$ (结果表示为幂的形式).

【考点】2F: 分数指数幂.

【分析】根据同底数幂的除法法则计算即可.

【解答】解: $6 \div 6^{\frac{1}{3}} = 6^{1-\frac{1}{3}} = 6^{\frac{2}{3}}$.

故答案为: $6^{\frac{2}{3}}$.

【点评】本题考查了分数指数幂的知识, 利用同底数幂的除法法则是解题的关键.

10. (4分) 不等式组 $\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}$ 的解集是 $\underline{-2 < x \leq 1}$.

【考点】CB: 解一元一次不等式组.

【专题】11: 计算题.

【分析】先求出两个不等式的解集, 再求其公共解.

【解答】解: $\begin{cases} x-1 \leq 0 \text{ ①} \\ x+2 > 0 \text{ ②} \end{cases}$,

解不等式①, 得 $x \leq 1$,

解不等式②, 得 $x > -2$,

故原不等式组的解集为 $-2 < x \leq 1$.

故答案为: $-2 < x \leq 1$.

【点评】本题主要考查了一元一次不等式组解集的求法, 其简便求法就是用口诀求解. 求不等式组解集的口诀: 同大取大, 同小取小, 大小小大中间找, 大大小小找不到 (无解).

11. (4分) 在一个不透明的布袋中装有 2 个白球和 3 个黄球, 它们除颜色不同外, 其余均相同. 若从中随机摸出一个球, 则摸到黄球的概率是 $\frac{3}{5}$.

【考点】X4: 概率公式.

【专题】12: 应用题.

【分析】根据概率的求法, 找准两点: ①全部情况的总数; ②符合条件的情况数目; 二者的比值就是其发生的概率.

【解答】解: 根据题意可得: 一个不透明的袋中装有除颜色外其余均相同的 2 个白球和 3 个黄球, 共 5 个,

从中随机摸出一个, 则摸到黄球的概率是 $\frac{3}{5}$.

故答案为: $\frac{3}{5}$.

【点评】本题考查概率的求法: 如果一个事件有 n 种可能, 而且这些事件的可能性相同, 其中事件 A 出现 m 种结果, 那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

12. (4分) 如果关于 x 的方程 $(a^2 - 1)x = a + 1$ 无解, 那么实数 $a = \underline{1}$.

【考点】85: 一元一次方程的解.

【专题】11: 计算题.

【分析】当 x 系数为 0 时, 方程无解, 即可求出此时 a 的值.

【解答】解: $\because$ 方程 $(a^2 - 1)x = a + 1$ 无解,

$\therefore a^2 - 1 = 0$, 且 $a + 1 \neq 0$,

解得: $a = 1$.

故答案为: 1

【点评】此题考查了一元一次方程的解, 弄清题意是解本题的关键.

13. (4分) 近视眼镜的度数 y (度) 与镜片焦距 x (米) 呈反比例, 其函数关系式为 $y = \frac{100}{x}$. 如果近视眼镜镜片的焦距 $x = 0.25$ 米, 那么近视眼镜的度数 y 为 $\underline{400}$.

【考点】G1: 反比例函数的定义.

【分析】把 $x = 0.25$ 代入 $y = \frac{100}{x}$, 即可算出 y 的值.

【解答】解: 把 $x = 0.25$ 代入 $y = \frac{100}{x}$,

$$y = 400,$$

故答案为：400.

【点评】此题主要考查了反比例函数的定义，本题实际上是已知自变量的值求函数数值的问题，比较简单.

14. (4 分) 方程 $\sqrt{x+6} = -x$ 的根是 $x = -2$.

【考点】AG：无理方程.

【分析】先把方程两边平方去根号后求解，再根据 $x < 0$ ，即可得出答案.

【解答】解：由题意得： $x < 0$ ，

两边平方得： $x+6 = x^2$ ，

解得 $x = 3$ （不合题意舍去）或 $x = -2$ ；

故答案为： $x = -2$.

【点评】此题考查了无理方程，在解无理方程是最常用的方法是两边平方法及换元法，本题用了平方法.

15. (4 分) 手机已经普及，家庭座机还有多少？为此，某校中学生从某街道 5000 户家庭中随机抽取 50 户家庭进行统计，列表如下：

拥有座机数(部)	0	1	2	3	4
相应户数	10	14	18	7	1

该街道拥有多部电话（指 1 部以上，不含 1 部）的家庭大约有 2600 户.

【考点】V5：用样本估计总体.

【分析】先求出随机抽取 50 户家庭中拥有多部电话（指 1 部以上，不含 1 部）的家庭所占的比值，进而求出街道拥有多部电话（指 1 部以上，不含 1 部）的家庭数.

【解答】解： $(18+7+1) \div 50$

$$= 26 \div 50$$

$$= 0.52,$$

$$5000 \times 0.52 = 2600 \text{ (户)}.$$

故答案为：2600.

【点评】本题考查的是通过样本去估计总体，关键是得到随机抽取 50 户家庭中拥有多部电话（指 1 部以上，不含 1 部）的家庭所占的比例.

16. (4分) 如果梯形两底的长分别为 3 和 7, 那么联结该梯形两条对角线的中点所得的线段长为 2.

【考点】KX: 三角形中位线定理; LL: 梯形中位线定理.

【分析】作出图形, 先判定出 MN 是梯形的中位线, 根据图形的中位线等于两底和的一半求出 MN 的长, 再根据三角形的中位线定理求出 ME 、 NF , 然后求解即可.

【解答】解: 如图, $\because E$ 、 F 是 BD 、 AC 的中点,

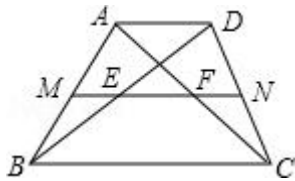
$\therefore EF$ 是梯形 $ABCD$ 的中位线,

$$\therefore MN = \frac{1}{2}(3+7) = 5,$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 和 } \triangle ACD \text{ 中, } ME = NF = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore EF = MN - ME - MF = 5 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 2.$$

故答案为: 2.



【点评】本题考查了梯形的中位线定理, 三角形的中位线定理, 熟记定理是解题的关键, 作出图形更形象直观.

17. (4分) 在平面直角坐标系中, 对于平面内任意一点 (x, y) , 若规定以下两种变换:

① $f(x, y) = (x+2, y)$. 如 $f(1, 1) = (3, 1)$;

② $g(x, y) = (-x, -y)$, 如 $g(2, 2) = (-2, -2)$.

按照以上变换有: $g(f(1, 1)) = g(3, 1) = (-3, -1)$, 那么 $f(g(-3, 4))$ 等于 $(5, -4)$.

【考点】D1: 点的坐标.

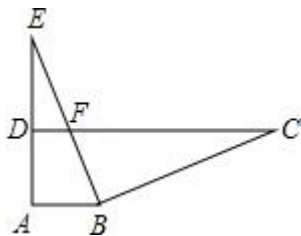
【分析】根据所给规定进行计算即可.

【解答】解: $f(g(-3, 4)) = f(3, -4) = (5, -4)$,

故答案为: $(5, -4)$,

【点评】此题主要考查了点的坐标, 关键是正确理解题目意思.

18. (4分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AB \parallel CD$, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 5\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$. 以点 B 为旋转中心, 将 BC 逆时针旋转 90° 至 BE , BE 交 CD 于 F 点. 如果点 E 恰好落在射线 AD 上, 那么 DF 的长为 $\frac{35}{12}\text{cm}$.



【考点】 LH: 梯形; R2: 旋转的性质.

【分析】 由将 BC 逆时针旋转 90° 至 BE , $BC = 13\text{cm}$. 可得 $BE = BC = 13\text{cm}$, $\angle CBF = \angle A = 90^\circ$, 继而求得 AE 的长, 易证得 $\triangle ABE \sim \triangle BFC$ 与 $\triangle DEF \sim \triangle AEB$, 然后由相似三角形的对应边成比例, 求得答案.

【解答】 解: $\because$ 将 BC 逆时针旋转 90° 至 BE , $BC = 13\text{cm}$.

$$\therefore BE = BC = 13\text{cm}, \angle CBF = \angle A = 90^\circ,$$

$$\because \angle A = 90^\circ, AB = 5\text{cm},$$

$$\therefore AE = \sqrt{BE^2 - AB^2} = 12 (\text{cm}),$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle ABE = \angle BFC,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle BFC,$$

$$\therefore \frac{AE}{BC} = \frac{AB}{BF},$$

$$\therefore BF = \frac{AB \cdot BC}{AE} = \frac{65}{12},$$

$$\therefore EF = BE - BF = \frac{91}{12},$$

$$\because \triangle DEF \sim \triangle AEB,$$

$$\therefore \frac{DF}{AB} = \frac{EF}{EB},$$

$$\therefore DF = \frac{AB \cdot EF}{EB} = \frac{35}{12}.$$

故答案为: $\frac{35}{12}$.

【点评】 此题考查了旋转的性质以及相似三角形的判定与性质. 此题难度适中, 注意掌握旋转前后图形的对应关系, 注意掌握数形结合思想的应用.

三、简答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 计算: $(\sqrt{3})^0 - \sqrt{27} + 4\cos 30^\circ - \frac{\sin 30^\circ}{\tan 45^\circ + \sin 60^\circ}$.

【考点】6E: 零指数幂; 79: 二次根式的混合运算; T5: 特殊角的三角函数值.

【专题】11: 计算题.

【分析】原式第一项利用零指数幂法则计算, 第二项化为最简二次根式, 第三、四项利用特殊角的三角函数值化简, 即可得到结果.

【解答】解: 原式 $= 1 - 3\sqrt{3} + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$= 1 - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3},$$
$$= -1.$$

【点评】此题考查了二次根式的混合运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. (10 分) 解方程: $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} = 1$.

【考点】B3: 解分式方程.

【专题】11: 计算题.

【分析】分式方程去分母转化为整式方程, 求出整式方程的解得到 x 的值, 经检验即可得到分式方程的解.

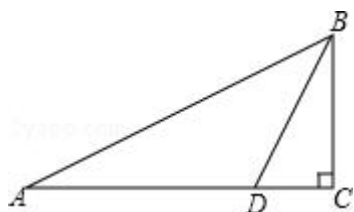
【解答】解: 方程两边同乘以 $(x-2)(x+2)$, 得 $x+2+2(x-2) = (x-2)(x+2)$,
整理, 得: $x^2 - 3x - 2 = 0$,
解得: $x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$,
经检验: $x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ 和 $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ 都是原方程的根,
 $\therefore$ 原方程的解为 $x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ 和 $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

【点评】此题考查了解分式方程, 解分式方程的基本思想是“转化思想”, 把分式方程转化为整式方程求解. 解分式方程一定要注意要验根.

21. (10 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 在 AC 边上, 且 $BC^2 = CD \cdot CA$.

(1) 求证: $\angle A = \angle CBD$;

(2) 当 $\angle A = \alpha$, $BC = 2$ 时, 求 AD 的长 (用含 α 的锐角三角比表示).



【考点】 S9: 相似三角形的判定与性质; T7: 解直角三角形.

【分析】 (1) 根据 $BC^2 = CD \cdot CA$, $\angle ACB = \angle BCD$, 得出 $\triangle ACB \sim \triangle BCD$, 即可证出 $\angle A = \angle CBD$;

(2) 根据 $\angle A = \angle CBD$, $\angle A = \alpha$, 得出 $\angle CBD = \alpha$, 根据 $\cot \angle A = \frac{AC}{BC}$, 得出 $AC = BC \cdot \cot \alpha = 2 \cdot \cot \alpha$, 再根据 $\tan \angle CBD = \frac{CD}{BC}$, 得出 $CD = BC \cdot \tan \alpha = 2 \tan \alpha$, 即可得出 $AD = AC - CD = 2 \cot \alpha - 2 \tan \alpha$;

【解答】 解: (1) $\because BC^2 = CD \cdot CA$,

$$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{CA}{BC},$$

$\because \angle ACB = 90^\circ$, 点 D 在 AC 边上,

$$\therefore \angle ACB = \angle BCD,$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \angle A = \angle CBD;$$

(2) $\because \angle A = \angle CBD$, $\angle A = \alpha$,

$$\therefore \angle CBD = \alpha,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 2$, $\angle A = \alpha$,

$$\therefore \cot \angle A = \frac{AC}{BC},$$

$$\therefore AC = BC \cdot \cot \alpha = 2 \cdot \cot \alpha,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\angle BCD = 90^\circ$, $\angle CBD = \alpha$, $BC = 2$,

$$\therefore \tan \angle CBD = \frac{CD}{BC},$$

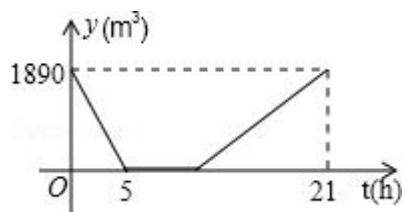
$$\therefore CD = BC \cdot \tan \alpha = 2 \tan \alpha,$$

$$\therefore AD = AC - CD = 2 \cot \alpha - 2 \tan \alpha;$$

【点评】 此题考查了相似三角形的判定与性质、解直角三角形, 解题的关键是证出 $\triangle ACB \sim \triangle BCD$, 根据解直角三角形求出 AC 和 CD 的值.

22. (10 分) 某游泳池内现存水 $1890 (m^3)$, 已知该游泳池的排水速度是灌水速度的 2 倍. 假设在换水时需要经历“排水 - 清洗 - 灌水”的过程, 其中游泳池内剩余的水量 $y (m^3)$ 与换水时间 $t (h)$ 之间的函数关系如图所示. 根据图象解答下列问题:

- (1) 根据图中提供的信息, 求排水的速度及清洗该游泳池所用的时间;
- (2) 求灌水过程中的 $y (m^3)$ 与换水时间 $t (h)$ 之间的函数关系式, 写出函数的定义域.



【考点】 FH: 一次函数的应用.

【分析】 (1) 由图象可知, 该游泳池 5 个小时排水 $1890 (m^3)$, 根据速度公式求出即可, 求出灌水的速度和时间即可求出清洗该游泳池所用的时间;

(2) 设灌水过程中的 $y (m^3)$ 与换水时间 $t (h)$ 之间的函数关系式是 $y = kt + b$. 将 $(11, 0)$, $(21, 1890)$ 代入 $y = kt + b$ 求出即可.

【解答】 解: (1) $\because$ 由图象可知, 该游泳池 5 个小时排水 $1890 (m^3)$,

$\therefore$ 该游泳池排水的速度是 $1890 \div 5 = 378 (m^3/h)$,

由题意得该游泳池灌水的速度是 $378 \times \frac{1}{2} = 189 (m^3/h)$,

由此得灌水 $1890 m^3$ 需要的时间是 $1890 \div 189 = 10 (h)$,

$\therefore$ 清洗该游泳池所用的时间是 $21 - 5 - 10 = 6 (h)$,

(2) 设灌水过程中的 $y (m^3)$ 与换水时间 $t (h)$ 之间的函数关系式是 $y = kt + b$.

将 $(11, 0)$, $(21, 1890)$ 代入 $y = kt + b$, 得
$$\begin{cases} 11k + b = 0 \\ 21k + b = 1890 \end{cases},$$

解得: $k = 189$, $b = -2079$,

即灌水过程中的 $y (m^3)$ 与时间 $t (h)$ 之间的函数关系式是 $y = 189t - 2079$, $(11 < t \leq 21)$.

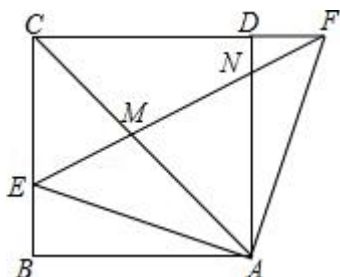
【点评】 本题考查了一次函数的应用, 主要考查学生能否把实际问题转化成数学问题, 题目比较典型, 是一道比较好的题目.

23. (12 分) 如图, 点 E 是正方形 $ABCD$ 边 BC 上的一点 (不与 B 、 C 重合), 点

F 在 CD 边的延长线上, 且满足 $DF = BE$. 联结 EF , 点 M 、 N 分别是 EF 与 AC 、 AD 的交点.

(1) 求 $\angle AFE$ 的度数;

(2) 求证: $\frac{CE}{CM} = \frac{AC}{FC}$.



【考点】 LE: 正方形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 由四边形 $ABCD$ 是正方形, 可得 $\angle B = \angle ADC = \angle BAD = 90^\circ$, $AB = AD$, 易证得 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ (SAS), 然后由全等三角形的性质, 可求得 $AE = AF$, $\angle BAE = \angle DAF$, 继而可求得答案;

(2) 由四边形 $ABCD$ 是正方形, 易证得 $\triangle ACE \sim \triangle FCM$, 然后由相似三角形的对应边成比例, 证得: $\frac{CE}{CM} = \frac{AC}{FC}$.

【解答】 解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle B = \angle ADC = \angle BAD = 90^\circ$, $AB = AD$. $\cdots$ (1 分)

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} BE=DF \\ \angle B=\angle ADF=90^\circ \\ AB=AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$ (SAS). $\cdots$ (1 分)

$\therefore AE = AF$, $\angle BAE = \angle DAF$. $\cdots$ (1 分)

$\therefore \angle EAF = \angle EAD + \angle DAF = \angle EAD + \angle BAE = \angle BAD = 90^\circ$.

$\because AE = AF$,

$\therefore \angle AFE = \angle AEF$.

$\therefore \angle AFE = \angle AEF = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$.

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle ACB = \angle ACD = 45^\circ$.

$$\because \triangle ABE \cong \triangle ADF,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AFD.$$

$$\because \angle AEB = \angle ACB + \angle CAE = 45^\circ + \angle CAE, \quad \angle AFD = \angle AFE + \angle CFM = 45^\circ + \angle CFM,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle CFM.$$

$$\text{又} \because \angle ACB = \angle ACD,$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle FCM.$$

$$\therefore \frac{CE}{CM} = \frac{AC}{FC}.$$

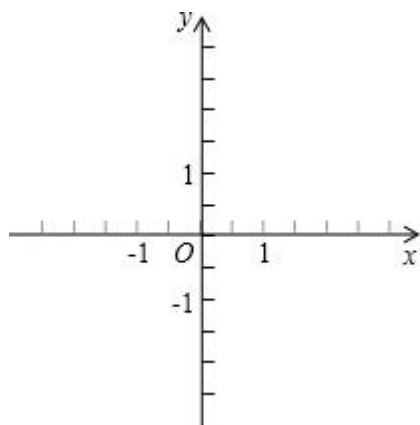
【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质、正方形的性质、全等三角形的判定与性质以及等腰三角形的性质. 此题难度适中, 注意掌握数形结合思想的应用.

24. (12分) 已知平面直角坐标系 xOy (如图), 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-3, 0)$ 、 $C(0, -\frac{3}{2})$.

(1) 求该抛物线顶点 P 的坐标;

(2) 求 $\tan \angle CAP$ 的值;

(3) 设 Q 是 (1) 中所求出的抛物线的一个动点, 点 Q 的横坐标为 t , 当点 Q 在第四象限时, 用含 t 的代数式表示 $\triangle QAC$ 的面积.



【考点】HF: 二次函数综合题.

【分析】(1) 将已知点的坐标代入到给定的函数的解析式中求解即可;

(2) 延长 AP 交 y 轴于 G , 过 C 作 $CH \perp AG$, 垂足是 H , 首先求得直线 AP 的解析式, 然后表示出有关线段长, 从而求得 $\tan \angle CAP$ 的值;

(3) 利用 $S_{\triangle QAC} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle QOC} - S_{\triangle AOQ}$ 求解即可.

【解答】解：（1）将 $A(-3, 0)$ 、 $C(0, -\frac{3}{2})$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 得

$$\begin{cases} \frac{(-3)^2}{2} - 3b + c = 0 \\ c = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} b = 1 \\ c = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

所以抛物线的表达式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$.

其顶点 P 的坐标为 $(-1, -2)$. $\cdots$ (1分)

（2）延长 AP 交 y 轴于 G ，过 C 作 $CH \perp AG$ ，垂足是 H 。

设直线 AP 的表达式为 $y = kx + b$,

将 $A(-3, 0)$ 、 $P(-1, -2)$ 代入，得

$$\begin{cases} -3k + b = 0 \\ -k + b = -2 \end{cases}, \quad \text{解得} \quad \begin{cases} k = -1 \\ b = -3 \end{cases}.$$

$$\therefore y = -x - 3.$$

进而可得 $G(0, -3)$.

$$\therefore OG = OA, \quad \angle G = \angle OAG = 45^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle CHG \text{ 中, } HG = CH = CG \cdot \sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOG \text{ 中, } AG = \frac{OG}{\cos 45^\circ} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore AH = AG - HG = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \tan \angle CAP = \frac{CH}{AH} = \frac{1}{3}.$$

$$(3) \text{ 设 } Q(t, \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{3}{2}),$$

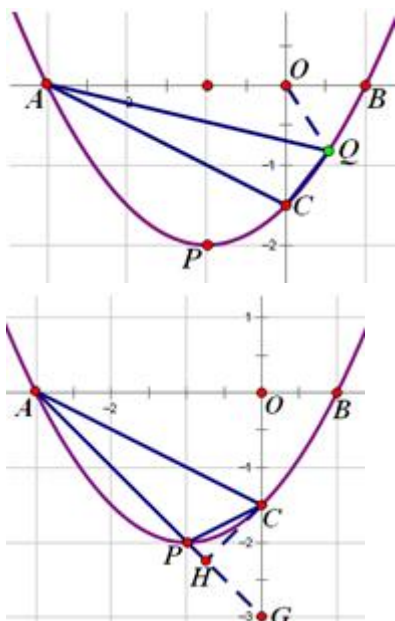
$$\text{由 } Q \text{ 在第四象限, 得 } |t| = t, \quad |\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{3}{2}| = -\frac{1}{2}t^2 - t + \frac{3}{2}.$$

$$\text{联结 } OQ, \text{ 易得 } S_{\triangle QAC} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle QOC} - S_{\triangle AOQ}.$$

$$\therefore S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times |-3| \times |-\frac{3}{2}| = \frac{9}{4}, \quad S_{\triangle QOC} = \frac{1}{2} \times |-\frac{3}{2}| \times t = \frac{3}{4}t,$$

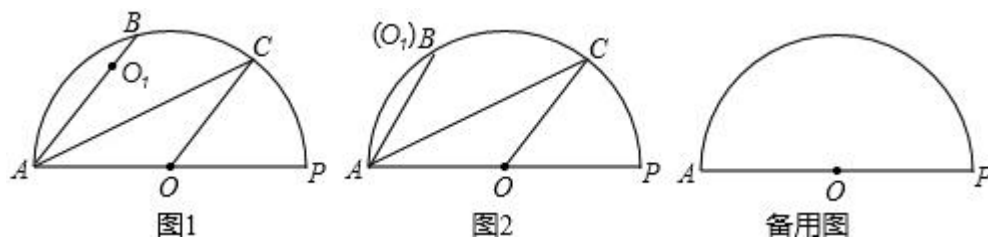
$$S_{\triangle AOQ} = \frac{1}{2} \times |-3| \times |\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{3}{2}| = -\frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle QAC} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4}t - (-\frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}) = \frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{4}t.$$



【点评】此题主要考查了二次函数的综合题目，利用一般式求二次函数解析式及解直角三角形是考查的重点内容，同学们应学会应用.

25. (14分) 已知 AP 是半圆 O 的直径，点 C 是半圆 O 上的一个动点 (不与点 A 、 P 重合)，联结 AC ，以直线 AC 为对称轴翻折 AO ，将点 O 的对称点记为 O_1 ，射线 AO_1 交半圆 O 于点 B ，联结 OC 。



- (1) 如图 1，求证： $AB \parallel OC$ ；
- (2) 如图 2，当点 B 与点 O_1 重合时，求证： $\widehat{AB} = \widehat{CB}$ ；
- (3) 过点 C 作射线 AO_1 的垂线，垂足为 E ，联结 OE 交 AC 于 F 。当 $AO = 5$ ， $O_1B = 1$ 时，求 $\frac{CF}{AF}$ 的值。

【考点】MR：圆的综合题。

【分析】(1) 利用对称性得出 $\angle OAC = \angle O_1AC$ ，再利用等边对等角得出 $\angle OAC = \angle C$ ，即可得出 $\angle C = \angle O_1AC$ ，求出 $AB \parallel OC$ 即可；

- (2) 由点 O_1 与点 O 关于直线 AC 对称， $AC \perp OO_1$ ，由点 O_1 与点 B 重合，可得 $AC \perp OB$ ，再利用垂径定理推论得出 $AB = CB$ ；

- (3) 分别根据当点 O_1 在线段 AB 上以及当点 O_1 在线段 AB 的延长线上时分别求

出 AE 的长即可得出答案.

【解答】解: (1) $\because$ 点 O_1 与点 O 关于直线 AC 对称,

$$\therefore \angle OAC = \angle O_1AC.$$

在 $\odot O$ 中,

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle C.$$

$$\therefore \angle C = \angle O_1AC,$$

$$\therefore O_1A \parallel OC,$$

即 $AB \parallel OC$;

(2) 方法一: 如图 2, 连结 OB .

$\because$ 点 O_1 与点 O 关于直线 AC 对称, $AC \perp OO_1$,

由点 O_1 与点 B 重合, 可得 $AC \perp OB$.

$\because$ 点 O 是圆心, $AC \perp OB$,

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{CB};$$

方法 2: $\because$ 点 O_1 与点 O 关于直线 AC 对称,

$$\therefore AO = AO_1, CO = CO_1,$$

由点 O_1 与点 B 重合, 可得 $AO = AB, CB = CO$,

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore AB = CB.$$

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{CB};$$

(3) 当点 O_1 在线段 AB 上 (如图 3), 过点 O 作 $OH \perp AB$, 垂足为 H .

$$\because OH \perp AB, CE \perp AB,$$

$$\therefore OH \parallel CE,$$

又 $\because AB \parallel OC$,

$$\therefore HE = OC = 5.$$

$$\because AB = AO_1 + O_1B = AO + O_1B = 6 \text{ 且 } OH \perp AB,$$

$$\therefore AH = \frac{1}{2}AB = 3.$$

$$\therefore AE = EH + AH = 5 + 3 = 8,$$

$$\because AB \parallel OC,$$

$$\therefore \frac{CF}{AF} = \frac{OC}{AE} = \frac{5}{8},$$

当点 O_1 在线段 AB 的延长线上, 如图 4,

过点 O 作 $OH \perp AB$, 垂足为 H .

$$\because OH \perp AB, CE \perp AB,$$

$$\therefore OH \parallel CE,$$

$$\text{又} \because AB \parallel OC,$$

$$\therefore HE = OC = 5.$$

$$\because AB = AO_1 - O_1B = AO - O_1B = 4,$$

$$\text{又} \because OH \perp AB,$$

$$\therefore AH = \frac{1}{2}AB = 2.$$

$$\therefore AE = EH + AH = 5 + 2 = 7,$$

$$\because AB \parallel OC,$$

$$\therefore \frac{CF}{AF} = \frac{CO}{AE} = \frac{5}{7}.$$

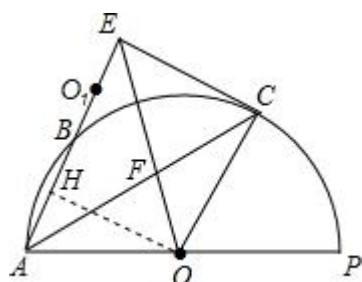


图4

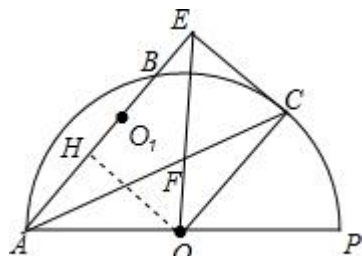


图3

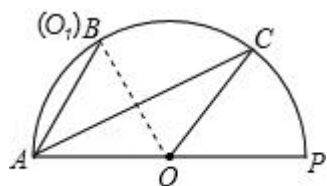


图2

【点评】此题主要考查了圆的综合应用以及垂径定理和关于直线对称的性质等知识，利用数形结合以及分类讨论的思想得出是解题关键．