

2013 年上海市闸北区中考数学一模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. (4 分) 将抛物线 $y = -x^2$ 向左平移 2 个单位后，得到的抛物线的解析式是 ()
- A. $y = -(x+2)^2$ B. $y = -x^2+2$ C. $y = -(x-2)^2$ D. $y = -x^2-2$
2. (4 分) 已知 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的 BA 、 CA 的延长线上，下列给出的条件中能判定 $ED \parallel BC$ 的是 ()
- A. $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}$ B. $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ C. $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$ D. $\frac{DE}{BC} = \frac{BD}{CE}$
3. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = \alpha$ ， $AC = b$ ，那么 AB 等于 ()
- A. $\frac{b}{\cos \alpha}$ B. $\frac{b}{\sin \alpha}$ C. $\frac{b}{\tan \alpha}$ D. $\frac{b}{\cot \alpha}$
4. (4 分) 如果四条线段 a 、 b 、 c 、 d 构成 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ， $m > 0$ ，则下列式子中，成立的是 ()
- A. $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$ B. $\frac{a}{b} = \frac{c+m}{d+m}$ C. $\frac{a-b}{b} = \frac{d-c}{d}$ D. $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$
5. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中，中线 AD 、 BE 相交于点 O ，且 $S_{\triangle BOD} = 5$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积是 ()
- A. 30 B. 20 C. 15 D. 5
6. (4 分) 根据二次函数 $y = -x^2+2x+3$ 的图象，判断下列说法中，错误的是 ()
- A. 二次函数图象的对称轴是直线 $x = 1$
- B. 当 $x > 0$ 时， $y < 4$
- C. 当 $x \leq 1$ 时，函数值 y 是随着 x 的增大而增大
- D. 当 $y \geq 0$ 时， x 的取值范围是 $-1 \leq x \leq 3$

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 钓鱼岛列岛是我国最早发现、命名，并行使主权的。在一幅比例尺是 1:100000 的地图上，测得钓鱼岛的东西走向长为 3.5 厘米，那么它的东西走向实际长大约为_____米。
8. (4 分) 已知点 D 是线段 AB 的黄金分割点，且线段 AD 的长为 2 厘米，则最

短线段 BD 的长是_____厘米.

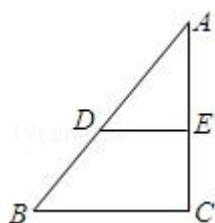
9. (4分) 如果 $\vec{a} + \vec{b} = 2(\vec{a} - 3\vec{b})$, 那么用 $\vec{a}$ 表示 $\vec{b}$, 得 $\vec{b} =$ _____.

10. (4分) 抛物线 $y = 4x^2 + 2x - 1$ 有最_____点 (填“高”、“低”).

11. (4分) 某印刷厂一月份印书 50 万册, 如果从二月份起, 每月印书量的增长率都为 x , 那么三月份的印书量 y (万册) 与 x 的函数解析式是_____.

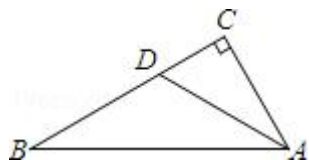
12. (4分) 在坡度为 $i = 1:2.4$ 的斜坡上每走 26 米就上升了_____米.

13. (4分) 如图, 已知点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 上, 且 $DE \parallel BC$, $S_{\triangle AED} : S_{\text{梯形} EDBC} = 1:2$, 则 $AE:AC$ 的比值是_____.

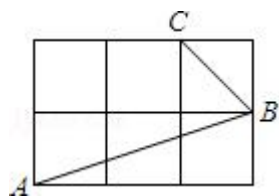


14. (4分) 若二次函数 $y = mx^2 - (2m - 1)x + m$ 的图象顶点在 y 轴上, 则 $m =$ _____.

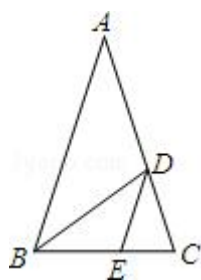
15. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 D 在边 BC 上, 且 $\angle ADC + \angle B = 90^\circ$, $DC = 3$, $BD = 6$, 则 $\cos B =$ _____.



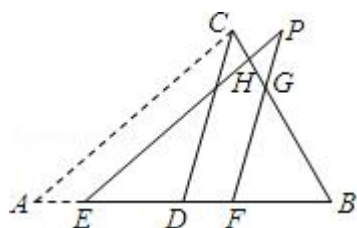
16. (4分) 如图, 在边长相同的小正方形组成的网格中, 点 A 、 B 、 C 都在这些小正方形的顶点上, 则 $\angle ABC$ 的正切值是_____.



17. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 36^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D , DE 平分 $\angle BDC$ 交 BC 于点 E , 则 $\frac{EC}{AD} =$ _____.



18. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = 6\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, 点 D 是斜边 AB 上的中点, 把 $\triangle ADC$ 沿着 AB 方向平移 1cm 得 $\triangle EFP$, EP 与 FP 分别交边 BC 于点 H 和点 G , 则 $GH =$ _____.



三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $\frac{1}{2\sin 45^\circ - 1} - 2\sqrt{(1 - \cos 30^\circ)^2 + \sin^2 60^\circ} + \cos^2 60^\circ$.

20. (10分) 已知: 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象经过点 $(3, 5)$ 、 $(2, 8)$ 、 $(0, 8)$.

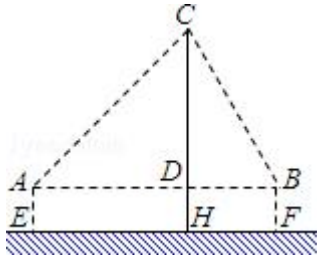
(1) 求这个二次函数的解析式;

(2) 已知抛物线 $y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ ($a_1 \neq 0$), $y_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$ ($a_2 \neq 0$), 且满足

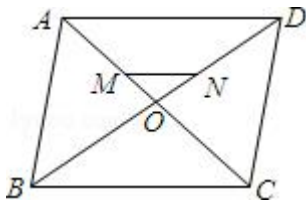
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$ ($k \neq 0, 1$), 则我们称抛物线 y_1 与 y_2 互为“友好抛物线”, 请写

出当 $k = -\frac{1}{2}$ 时第 (1) 小题中的抛物线的友好抛物线, 并求出这友好抛物线的顶点坐标.

21. (10分) 已知: 如图, 九年级某班同学要测量校园内旗杆 CH 的高度, 在地面的点 E 处用测角器测得旗杆顶点 C 的仰角 $\angle CAD = 45^\circ$, 再沿直线 EF 向着旗杆方向行走 10 米到点 F 处, 在点 F 又用测角器测得旗杆顶点 C 的仰角 $\angle CBA = 60^\circ$; 已知测角器的高度为 1.6 米, 求旗杆 CH 的高度 (结果保留根号).

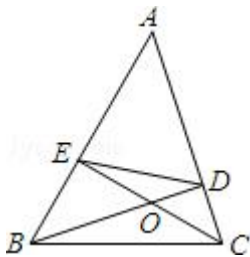


22. (10分) 已知：如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，点 M 、 N 分别在边 AO 和边 OD 上，且 $AM = \frac{2}{3}AO$ ， $ON = \frac{1}{3}OD$ ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的线性组合表示向量 $\overrightarrow{OM}$ 和向量 $\overrightarrow{MN}$ 。

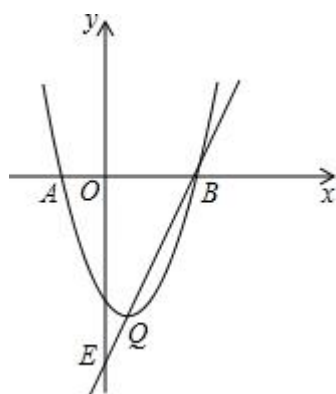


23. (12分) 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BD \perp AC$ 于点 D ， $CE \perp AB$ 于点 E ， EC 和 BD 相交于点 O ，联接 DE 。

- (1) 求证： $\triangle EOD \sim \triangle BOC$ ；
(2) 若 $S_{\triangle EOD} = 16$ ， $S_{\triangle BOC} = 36$ ，求 $\frac{AE}{AC}$ 的值。



24. (12分) 已知：如图，二次函数 $y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$ 的图象与 x 轴交于点 A 、 B (点 A 在点 B 的左侧)，抛物线的顶点为 Q ，直线 QB 与 y 轴交于点 E 。
- (1) 求点 E 的坐标；
(2) 在 x 轴上方找一点 C ，使以点 C 、 O 、 B 为顶点的三角形与 $\triangle BOE$ 相似，请直接写出点 C 的坐标。



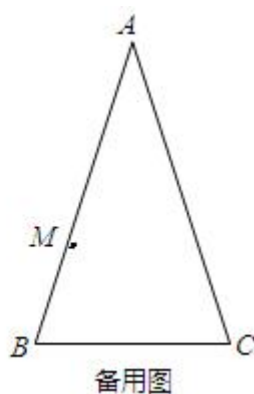
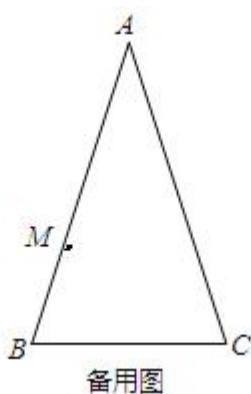
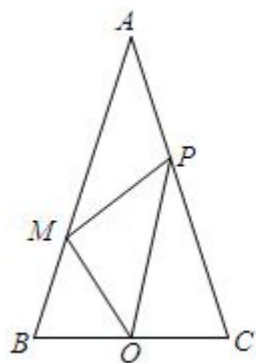
25. (14分) 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 15$ ， $\cos \angle A = \frac{4}{5}$ ，点 M 在 AB

边上， $AM = 2MB$ ，点 P 是边 AC 上的一个动点，设 $PA = x$ 。

(1) 求底边 BC 的长；

(2) 若点 O 是 BC 的中点，联接 MP 、 MO 、 OP ，设四边形 $AMOP$ 的面积是 y ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出 x 的取值范围；

(3) 把 $\triangle MPA$ 沿着直线 MP 翻折后得到 $\triangle MPN$ ，是否可能使 $\triangle MPN$ 的一条边（折痕边 PM 除外）与 AC 垂直？若存在，请求出 x 的值；若不存在，请说明理由。



2013 年上海市闸北区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1.（4 分）将抛物线 $y = -x^2$ 向左平移 2 个单位后，得到的抛物线的解析式是（ ）

A. $y = -(x+2)^2$ B. $y = -x^2+2$ C. $y = -(x-2)^2$ D. $y = -x^2-2$

【考点】H6：二次函数图象与几何变换.

【专题】25：动点型.

【分析】易得原抛物线的顶点和平移后新抛物线的顶点，根据平移不改变二次项的系数用顶点式可得所求抛物线.

【解答】解： $\because$ 原抛物线的顶点为 $(0, 0)$,

$\therefore$ 新抛物线的顶点为 $(-2, 0)$,

设新抛物线的解析式为 $y = -(x-h)^2+k$,

$\therefore$ 新抛物线解析式为 $y = -(x+2)^2$,

故选：A.

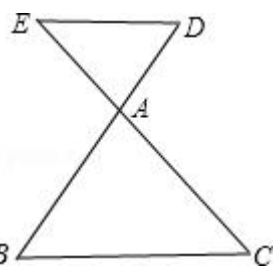
【点评】考查二次函数的几何变换；用到的知识点为：二次函数的平移不改变二次项的系数；左右平移只改变顶点的横坐标，左加右减.

2.（4 分）已知 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的 BA 、 CA 的延长线上，下列给出的条件中能判定 $ED \parallel BC$ 的是（ ）

A. $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}$ B. $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ C. $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$ D. $\frac{DE}{BC} = \frac{BD}{CE}$

【考点】S4：平行线分线段成比例.

【分析】根据选项选出能推出 $\triangle DAE \sim \triangle BAC$ ，推出 $\angle D = \angle B$ 或 $\angle E = \angle C$ 的即可.



【解答】解：B

$$A、\because \frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

$$\because \angle EAD = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle EAD \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \angle E = \angle B, \angle D = \angle C,$$

即不能推出 $DE \parallel BC$ ，故本选项错误；

$$B、\because \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE},$$

$$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC},$$

$$\therefore \frac{BD}{AB} - 1 = \frac{CE}{AC} - 1,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

$$\because \angle EAD = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle DAE \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \angle D = \angle B,$$

$\therefore DE \parallel BC$ ，故本选项正确；

C、 $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$ 不能推出 $\triangle DAE \sim \triangle BAC$ ，即不能推出 $\angle D = \angle B$ ，即不能推出两直线平行，故本选项错误；

D、 $\frac{DE}{BC} = \frac{BD}{CE}$ 不能推出 $\triangle DAE \sim \triangle BAC$ ，即不能推出 $\angle D = \angle B$ ，即不能推出两直线平行，故本选项错误；

故选：B.

【点评】本题考查了相似三角形的性质和判定和平行线的判定的应用，主要考查学生的推理和辨析能力，注意：有两组对应边的比相等，且这两边的夹角相等的两三角形相似.

3. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = \alpha$, $AC = b$, 那么 AB 等于 ()

- A. $\frac{b}{\cos \alpha}$ B. $\frac{b}{\sin \alpha}$ C. $\frac{b}{\tan \alpha}$ D. $\frac{b}{\cot \alpha}$

【考点】T1: 锐角三角函数的定义.

【专题】11: 计算题.

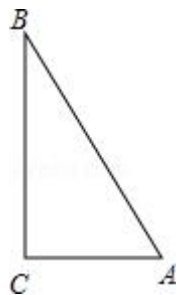
【分析】由于已知 $\angle B$ 和 $\angle B$ 的对边 AC 求斜边 AB , 则根据 $\angle B$ 的正弦的定义可求 AB .

【解答】解: 如图,

$$\because \sin B = \sin \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{AB},$$

$$\therefore AB = \frac{b}{\sin \alpha}.$$

故选: B.



【点评】本题考查了锐角三角函数的定义: 在直角三角形中, 一锐角的正弦等于它的对边与斜边的比值.

4. (4分) 如果四条线段 a 、 b 、 c 、 d 构成 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $m > 0$, 则下列式子中, 成立的是 ()

- A. $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$ B. $\frac{a}{b} = \frac{c+m}{d+m}$ C. $\frac{a-b}{b} = \frac{d-c}{d}$ D. $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$

【考点】S2: 比例线段.

【分析】根据比例的性质变形, 再进行判断.

【解答】解: A、 $\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $m > 0$, $\therefore \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; 故本选项错误;

B、 $\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $m > 0$, $\therefore \frac{a}{b} \neq \frac{c+m}{d+m}$; 故本选项错误;

C、 $\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $m > 0$, $\therefore \frac{a-b}{b} = -\frac{d-c}{d}$; 故本选项错误;

D、 $\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $m > 0$, $\therefore \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$; 故本选项正确.

故选: D.

【点评】本题考查了比例的性质．比例的基本性质：两内项之积等于两外项之积．

5. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中，中线 AD 、 BE 相交于点 O ，且 $S_{\triangle BOD} = 5$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积是()

- A. 30 B. 20 C. 15 D. 5

【考点】K5：三角形的重心．

【分析】根据三角形的重心到顶点的长度等于到对边中点的长度的2倍可得 $OD = 2AO$ ，再根据等高的三角形的面积等于底边的比求出 $\triangle AOB$ 的面积，然后等底等高的三角形的面积相等求解即可．

【解答】解：如图， $\because$ 中线 AD 、 BE 相交于点 O ，

$\therefore O$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore OD = \frac{1}{2}AO,$$

$$\therefore S_{\triangle BOD} = 5,$$

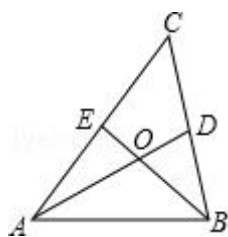
$$\therefore S_{\triangle AOB} = 2S_{\triangle BOD} = 2 \times 5 = 10,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = 10 + 5 = 15,$$

$\because AD$ 是中线，

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积} = 2S_{\triangle ABD} = 2 \times 15 = 30.$$

故选：A.



【点评】本题考查了三角形的重心，三角形的重心到顶点的长度等于到对边中点的长度的2倍，等高的三角形的面积等于底边的比以及等底等高的三角形的面积相等是解题的关键．

6. (4分) 根据二次函数 $y = -x^2 + 2x + 3$ 的图象，判断下列说法中，错误的是()

- A. 二次函数图象的对称轴是直线 $x = 1$
B. 当 $x > 0$ 时， $y < 4$
C. 当 $x \leq 1$ 时，函数值 y 是随着 x 的增大而增大
D. 当 $y \geq 0$ 时， x 的取值范围是 $-1 \leq x \leq 3$ 时

【考点】H3：二次函数的性质.

【分析】把二次函数写成顶点式形式，再根据二次函数的对称轴，增减性对各选项分析判断后利用排除法求解.

【解答】解： $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4$,

A、二次函数 $y = -x^2 + 2x + 3$ 的对称轴为直线 $x = -\frac{2}{2 \times (-1)} = 1$ ，故本选项错误；

B、当 $x = 1$ 时， y 最大值为 4，所以 $x > 0$ 时， $y \leq 4$ ，故本选项正确；

C、当 $x \leq 1$ 时，函数值 y 是随着 x 的增大而增大正确，故本选项错误；

D、令 $y = 0$ ，则 $-x^2 + 2x + 3 = 0$ ，

即 $x^2 - 2x - 3 = 0$ ，

解得 $x_1 = -1$ ， $x_2 = 3$ ，

所以，当 $y \geq 0$ 时， x 的取值范围是 $-1 \leq x \leq 3$ 正确，故本选项错误.

故选：B.

【点评】本题考查了二次函数的性质，主要利用了对称轴解析式，二次函数的增减性，与 x 轴的交点坐标的求解，是基础题.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）钓鱼岛列岛是我国最早发现、命名，并行使主权的. 在一幅比例尺是 1: 100000 的地图上，测得钓鱼岛的东西走向长为 3.5 厘米，那么它的东西走向实际长大约为 3500 米.

【考点】S2：比例线段.

【分析】根据图上距离与比例尺，求实际距离，即图上距离除以比例尺.

【解答】解：根据题意， $3.5 \div (1: 100000) = 350000$ 厘米 = 3500 米.

即它的东西走向实际长大约为 3500 米.

故答案为：3500.

【点评】考查了比例线段，掌握比例线段的定义及比例尺，并能够灵活运用.

8.（4 分）已知点 D 是线段 AB 的黄金分割点，且线段 AD 的长为 2 厘米，则最短线段 BD 的长是 $\sqrt{5} - 1$ 厘米.

【考点】S3：黄金分割.

【分析】根据黄金比值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，可得出最短线段的长.

【解答】解：由题意得， $\frac{BD}{AD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，

解得： $BD = \sqrt{5} - 1$ ．

故答案为： $\sqrt{5} - 1$ ．

【点评】本题考查了黄金分割的知识，属于基础题，注意掌握黄金分割的定义，及黄金比值．

9. (4分) 如果 $\vec{a} + \vec{b} = 2(\vec{a} - 3\vec{b})$ ，那么用 $\vec{a}$ 表示 $\vec{b}$ ，得 $\vec{b} = -\frac{1}{7}\vec{a}$ ．

【考点】LM：*平面向量．

【分析】根据向量的运算，去括号，移项，系数化为1即可得解．

【解答】解：去括号得， $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$ ，

移项得， $\vec{b} + 6\vec{b} = 2\vec{a} - \vec{a}$ ，

合并得， $7\vec{b} = \vec{a}$ ，

系数化为1得， $\vec{b} = \frac{1}{7}\vec{a}$ ．

故答案为： $\frac{1}{7}\vec{a}$ ．

【点评】本题考查了平面向量的运算，类似于解一元一次方程进行计算即可，比较简单，要注意移项要变号．

10. (4分) 抛物线 $y = 4x^2 + 2x - 1$ 有最低点（填“高”、“低”）．

【考点】H7：二次函数的最值．

【分析】根据二次函数的性质， $a > 0$ ，二次函数有最小值解答．

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = 4x^2 + 2x - 1$ 的 $a = 4 > 0$ ，

$\therefore$ 该抛物线有最小值，

即抛物线有最低点．

故答案为：低．

【点评】本题考查了二次函数的最值问题，比较简单，熟记二次项系数与函数图象的关系是解题的关键．

11. (4分) 某印刷厂一月份印书50万册，如果从二月份起，每月印书量的增长率都为 x ，那么三月份的印书量 y （万册）与 x 的函数解析式是 $y = 50(x+1)^2$ 或 $y = 50x^2 + 100x + 50$ ．

【考点】HD：根据实际问题列二次函数关系式.

【分析】由一月份印书量 50 万册,根据题意可以得到 2 月份印书量为 $50 \times (1+x)$,而三月份在 2 月份的基础上又增长了 x ,那么三月份的印书量也可以用 x 表示出来,由此即可确定函数关系式.

【解答】解: $\because$ 一月份印书量 50 万册,
2 月份起,每月印书量的增长率都为 x ,
 $\therefore$ 2 月份印书量为 $50 \times (1+x)$,
 $\therefore$ 三月份的印书量为 $y = 50 \times (1+x) \times (1+x) = 50(1+x)^2 = 50x^2 + 100x + 50$.
故答案为: $y = 50(1+x)^2$ 或 $y = 50x^2 + 100x + 50$.

【点评】此题主要考查了根据实际问题抽象出二次函数解析式,此题需注意第 3 个月的印数量是在第 2 个月的印数量的基础上增加的,此题是平均增长率的问题,可以用公式 $a(1 \pm x)^2 = b$ 来解题.

12. (4 分) 在坡度为 $i = 1:2.4$ 的斜坡上每走 26 米就上升了 10 米.

【考点】T9: 解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

【分析】根据坡度的定义可以求得 AC 、 BC 的比值,根据 AC 、 BC 的比值和 AB 的长度即可求得 AC 的值,即可解题.

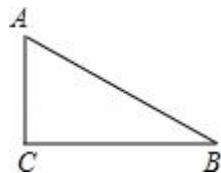
【解答】解: 由题意得, $AB = 26$ 米, $\tan B = \frac{AC}{BC} = 1:2.4$,

设 $AC = x$, 则 $BC = 2.4x$,

则在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $x^2 + (2.4x)^2 = 26^2$,

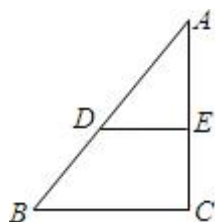
解得: $x = 10$, 即 $AC = 10$ 米.

故答案为: 10.



【点评】本题考查了勾股定理在直角三角形中的运用,坡度的定义及直角三角形中三角函数值的计算,属于基础题.

13. (4 分) 如图, 已知点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 上, 且 $DE \parallel BC$, $S_{\triangle AED} : S_{\text{梯形} EDBC} = 1:2$, 则 $AE:AC$ 的比值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



【考点】S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】由 $DE \parallel BC$ 得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，再根据相似三角形面积比等于相似比的平方进而求出 $AE:AC$ 的比值.

【解答】解： $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\because S_{\triangle ADE} : S_{\text{梯形 } BCED} = 1 : 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} = 1 : 3,$$

$$\therefore AE : AC = 1 : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，三角形相似的判定一直是中考考查的热点之一，在判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形；或依据基本图形对图形进行分解、组合；或作辅助线构造相似三角形，判定三角形相似的方法有时可单独使用，有时需要综合运用，无论是单独使用还是综合运用，都要具备应有的条件方可.

14. (4分) 若二次函数 $y = mx^2 - (2m - 1)x + m$ 的图象顶点在 y 轴上，则 $m = \frac{1}{2}$.

【考点】H3：二次函数的性质.

【分析】根据二次函数的顶点的横坐标列式求解即可.

【解答】解： $\because$ 二次函数 $y = mx^2 - (2m - 1)x + m$ 的图象顶点在 y 轴上，

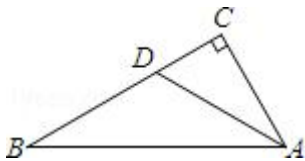
$$\therefore -\frac{-(2m-1)}{2m} = 0,$$

$$\text{解得 } m = \frac{1}{2}.$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.

【点评】 本题考查了二次函数的性质，根据顶点的坐标列出等式是解题的关键.

15. (4分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，点 D 在边 BC 上，且 $\angle ADC + \angle B = 90^\circ$ ， $DC = 3$ ， $BD = 6$ ，则 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



【考点】 S9：相似三角形的判定与性质；T1：锐角三角函数的定义.

【分析】 首先证明 $\triangle ACD \sim \triangle BCA$ ，可得 $\frac{AC}{CB} = \frac{CD}{CA}$ ，再根据条件 $DC = 3$ ， $BD = 6$ 可以计算出 AC^2 ，再利用勾股定理计算出 AB^2 ，进而得到 AB 的长，再根据锐角三角函数定义可得到答案.

【解答】 解： $\because \angle C = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle CDA + \angle DAC = 90^\circ,$$

$$\because \angle ADC + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle DAC,$$

$$\text{又} \because \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{CD}{CA},$$

$$\therefore AC^2 = CB \cdot CD,$$

$$\because DC = 3, BD = 6,$$

$$\therefore CB = 9,$$

$$\therefore AC^2 = 9 \times 3 = 27,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中: } AB^2 = AC^2 + BC^2 = 27 + 81 = 108,$$

$$\therefore AB = \sqrt{108} = 6\sqrt{3},$$

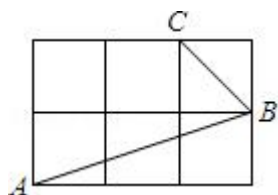
$$\cos B = \frac{CB}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【点评】 此题主要考查了相似三角形的判定与性质，以及勾股定理的应用，关键是证明 $\triangle ACD \sim \triangle BCA$ ，再根据相似三角形的性质得到 AC^2 .

16. (4分) 如图，在边长相同的小正方形组成的网格中，点 A 、 B 、 C 都在这些

小正方形的顶点上，则 $\angle ABC$ 的正切值是 2 .



【考点】 KQ: 勾股定理; KS: 勾股定理的逆定理; T1: 锐角三角函数的定义.

【分析】 连接 AC ，根据勾股定理计算出 AC ， AB ， BC 的长，再根据勾股定理的逆定理判定三角形 ACB 是直角三角形，由正切的定义即可求出 $\angle ABC$ 的正切值.

【解答】 解：连接 AC ，

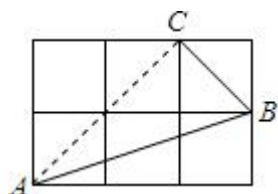
$$\because AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad BC = \sqrt{2}, \quad AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$\therefore$ 三角形 ACB 是直角三角形，

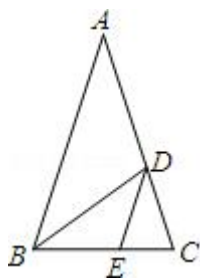
$$\therefore \tan \angle ABC = \frac{AC}{BC} = 2,$$

故答案为：2.



【点评】 此题考查了三角函数的定义以及勾股定理以及逆定理的运用. 此题难度适中，注意掌握辅助线的作法，注意数形结合思想的应用.

17. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle A = 36^\circ$ ， BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D ， DE 平分 $\angle BDC$ 交 BC 于点 E ，则 $\frac{EC}{AD} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.



【考点】 S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】由在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle A = 36^\circ$ ， BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D ，根据等腰三角形的判定与性质，易求得 $AD = BD = BC$ ，又由 DE 平分 $\angle BDC$ 交 BC 于点 E ，可求得 $BE = DE = CD$ ，证得 $\triangle DEC \sim \triangle BDC$ ，然后由相似三角形的对应边成比例，求得答案．

【解答】解： $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle A = 36^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle C = 72^\circ,$$

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D ，

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle A,$$

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \angle BDC = 180^\circ - \angle CBD - \angle C = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle C,$$

$$\therefore BD = BC,$$

$$\therefore AD = BD = BC,$$

$\because DE$ 平分 $\angle BDC$ 交 BC 于点 E ，

$$\therefore \angle CDE = \angle BDE = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle CBD,$$

$$\therefore BE = DE,$$

$$\therefore \angle DEC = 180^\circ - \angle C - \angle CDE = 72^\circ,$$

$$\therefore DE = CD = BE,$$

$$\therefore \triangle DEC \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{EC}{CD},$$

设 $CD = x$ ，则 $EC = BC - BE = AD - CD = AD - x$ ， $BC = BD = AD$ ，

$$\therefore \frac{x}{AD} = \frac{AD-x}{x},$$

$$\text{解得：} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}AD,$$

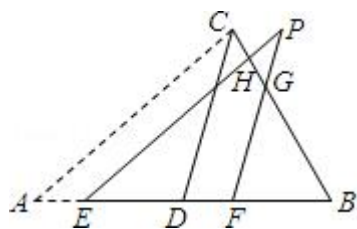
$$\therefore EC = \frac{3-\sqrt{5}}{2}AD,$$

$$\therefore \frac{EC}{AD} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

故答案为: $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质以及等腰三角形的判定与性质. 此题难度适中, 注意掌握数形结合思想与方程思想的应用.

18. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = 6\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, 点 D 是斜边 AB 上的中点, 把 $\triangle ADC$ 沿着 AB 方向平移 1cm 得 $\triangle EFP$, EP 与 FP 分别交边 BC 于点 H 和点 G , 则 $GH = \frac{2}{3}\text{cm}$.



【考点】Q2: 平移的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半知 $AD = BD = CD = \frac{1}{2}AB = 3\text{cm}$; 然后由平移的性质推知 $AC \parallel PE$; 最后根据相似三角形的性质与判定, 即可求得 GH 的长度.

【解答】解: 连接 PC ,

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = 6\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, 点 D 是斜边 AB 上的中点,

$$\therefore AD = BD = CD = \frac{1}{2}AB = 3(\text{cm});$$

又 $\because$ 把 $\triangle ADC$ 沿着 AB 方向平移 1cm 得 $\triangle EFP$, $\therefore AC \parallel PE$, $AE = CP = 1\text{cm}$,

$$\therefore BE = 6 - 1 = 5(\text{cm}), \quad BF = 3 - 1 = 2(\text{cm}),$$

$$\because AC \parallel PE,$$

$$\therefore \triangle CHP \sim \triangle BHE, \quad \triangle CGP \sim \triangle BGF,$$

$$\therefore \frac{CP}{BE} = \frac{CH}{BH}, \quad \frac{CG}{BG} = \frac{PC}{BF},$$

$$\therefore \frac{1}{5} = \frac{CH}{4-CH}, \quad \frac{CG}{4-CG} = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得: } CH = \frac{2}{3}, \quad CG = \frac{4}{3}$$

$$\therefore GH = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(\text{cm});$$

故答案是: $\frac{2}{3}\text{cm}$.

【分析】(1) 先把三个点的坐标代入 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 得到关于 a 、 b 、 c 的方程组, 然后解方程组求出 a 、 b 、 c 的值;

(2) 根据题中的定义得到 $\frac{-1}{a_2} = \frac{2}{b_2} = \frac{8}{c_2} = -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{a_1}{-1} = \frac{b_1}{2} = \frac{c_1}{8} = -\frac{1}{2}$, 则可得到友好抛物线的解析式是: $y = 2x^2 - 4x - 16$ 或 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$, 然后分别配成顶点式, 则可得到它们的顶点坐标.

【解答】解: (1) 根据题意, 得 $\begin{cases} c=8 \\ 4a+2b+c=8 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=8 \end{cases}$,

所以这个抛物线的解析式是 $y = -x^2 + 2x + 8$;

(2) 根据题意, 得 $\frac{-1}{a_2} = \frac{2}{b_2} = \frac{8}{c_2} = -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{a_1}{-1} = \frac{b_1}{2} = \frac{c_1}{8} = -\frac{1}{2}$

解得 $a_2 = 2$, $b_2 = -4$, $c_2 = -16$ 或 $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = -1$, $c_1 = -4$,

所以友好抛物线的解析式是: $y = 2x^2 - 4x - 16$ 或 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$,

因为 $y = 2x^2 - 4x - 16 = 2(x-1)^2 - 18$,

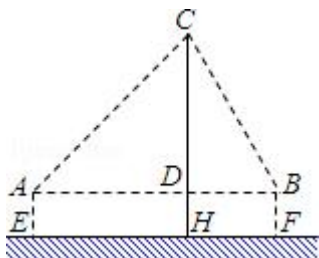
所以抛物线 $y = 2x^2 - 4x - 16$ 的顶点坐标为 $(1, -18)$;

因为 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{9}{2}$,

所以抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ 的顶点坐标为 $(1, -\frac{9}{2})$.

【点评】本题考查了待定系数法求二次函数的解析式: 先设二次函数的解析式(一般式、顶点式或交点式), 再列方程(组)、解方程(组), 然后确定二次函数的解析式. 也考查了二次函数的性质.

21. (10分) 已知: 如图, 九年级某班同学要测量校园内旗杆 CH 的高度, 在地面的点 E 处用测角器测得旗杆顶点 C 的仰角 $\angle CAD = 45^\circ$, 再沿直线 EF 向着旗杆方向行走 10 米到点 F 处, 在点 F 又用测角器测得旗杆顶点 C 的仰角 $\angle CBA = 60^\circ$; 已知测角器的高度为 1.6 米, 求旗杆 CH 的高度(结果保留根号).



【考点】TA：解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题.

【分析】首先假设出 $DB = x$ 米，在 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中， $\angle CBD = 60^\circ$ ，进而表示出 CD 的长，再利用 $CD + BD = 10$ 求出 x ，进而得出 CD 与 CH 即可.

【解答】解：根据题意，设 $DB = x$ 米在 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中， $\angle CBD = 60^\circ$ ，

$$\therefore CD = DB \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}x \text{ 米},$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $\angle CAD = 45^\circ$ ，

$$\therefore CD = AD = \sqrt{3}x \text{ 米},$$

$$\therefore \sqrt{3}x + x = 10,$$

解得： $x = (5\sqrt{3} - 5)$ 米，

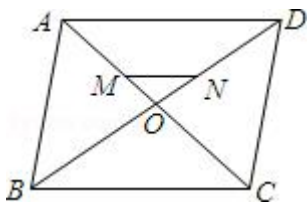
$$CD = \sqrt{3} \cdot (5\sqrt{3} - 5) = (15 - 5\sqrt{3}) \text{ (米)},$$

$$\therefore CH = 15 - 5\sqrt{3} + 1.6 = (16.6 - 5\sqrt{3}) \text{ (米)}.$$

答：旗杆 CH 的高度是 $(16.6 - 5\sqrt{3})$ 米.

【点评】此题主要考查了解直角三角形的应用，根据已知得出 CD 的长是解题关键.

22. (10 分) 已知：如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，点 M 、 N 分别在边 AO 和边 OD 上，且 $AM = \frac{2}{3}AO$ ， $ON = \frac{1}{3}OD$ ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的线性组合表示向量 $\overrightarrow{OM}$ 和向量 $\overrightarrow{MN}$.



【考点】LM：*平面向量.

【分析】根据平行四边形法则求出 $\overrightarrow{AC}$ ，再根据平行四边形的对角线互相平分表示 $\overrightarrow{AO}$ ，然后根据 $OM = \frac{1}{3}AO$ ，再表示出 $\overrightarrow{OM}$ 即可；

根据平行线分线段成比例定理求出 $MN \parallel AD$ ，并求出 $\frac{MN}{AD} = \frac{1}{3}$ ，然后根据向量的

表示 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ 即可得解.

【解答】 解：根据平行四边形法则， $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$,

$\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore AO = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}),$$

$$\because AM = \frac{2}{3}AO,$$

$$\therefore OM = \frac{1}{3}AO,$$

$$\therefore \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AO},$$

$$\therefore \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b};$$

$$\because AM = \frac{2}{3}AO, \quad ON = \frac{1}{3}OD,$$

$$\therefore \frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OD} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore MN \parallel AD,$$

$$\therefore \frac{MN}{AD} = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD},$$

又 $\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

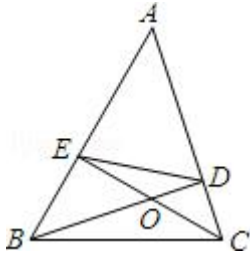
$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\vec{b}.$$

【点评】 本题是对向量的考查，主要利用了平行四边形法则，平行四边形的对角线互相平分的性质，平行线分线段成比例定理，要注意线性组合的特点的利用.

23. (12 分) 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BD \perp AC$ 于点 D ， $CE \perp AB$ 于点 E ， EC 和 BD 相交于点 O ，联接 DE .

(1) 求证: $\triangle EOD \sim \triangle BOC$;

(2) 若 $S_{\triangle EOD} = 16$, $S_{\triangle BOC} = 36$, 求 $\frac{AE}{AC}$ 的值.



【考点】 S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 首先证明 $\triangle BOE \sim \triangle COD$, 由相似三角形的性质可得 $\frac{OE}{OB} = \frac{OD}{OC}$, 又

因为 $\angle EOD = \angle BOC$, 所以: $\triangle EOD \sim \triangle BOC$;

(2) 由面积之比可得到对应边之比即 $\frac{OD}{OC} = \frac{2}{3}$, 在 $\triangle ODC$ 与 $\triangle EAC$ 中, 因为 $\angle AEC = \angle ODC$, $\angle OCD = \angle ACE$, 所以 $\triangle ODC \sim \triangle AEC$, 利用相似的性质即可求出 $\frac{AE}{AC}$ 的值.

【解答】 (1) 证明: 在 $\triangle BOE$ 与 $\triangle DOC$ 中,

$$\because \angle BEO = \angle CDO, \angle BOE = \angle COD,$$

$$\therefore \triangle BOE \sim \triangle COD,$$

$$\therefore \frac{OE}{OD} = \frac{OB}{OC},$$

$$\text{即 } \frac{OE}{OB} = \frac{OD}{OC},$$

$$\text{又 } \because \angle EOD = \angle BOC,$$

$$\therefore \triangle EOD \sim \triangle BOC;$$

(2) 解: $\because \triangle EOD \sim \triangle BOC$

$$\therefore \frac{S_{\triangle EOD}}{S_{\triangle BOC}} = \left(\frac{OD}{OC}\right)^2,$$

$$\because S_{\triangle EOD} = 16, S_{\triangle BOC} = 36,$$

$$\therefore \frac{OD}{OC} = \frac{2}{3},$$

在 $\triangle ODC$ 与 $\triangle EAC$ 中,

$$\because \angle AEC = \angle ODC, \angle OCD = \angle ACE,$$

$$\therefore \triangle ODC \sim \triangle AEC,$$

$$\therefore \frac{OD}{AE} = \frac{OC}{AC},$$

$$\text{即 } \frac{OD}{OC} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}.$$

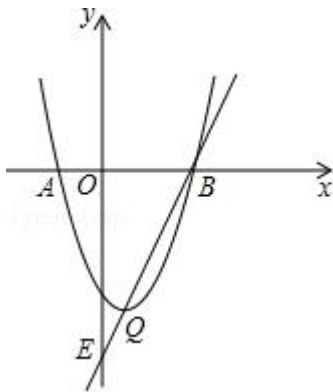
【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，三角形相似的判定一直是中考考查的热点之一，在判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用.

24. (12分) 已知：如图，二次函数 $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$ 的图象与 x 轴交于点 A 、 B

(点 A 在点 B 的左侧)，抛物线的顶点为 Q ，直线 QB 与 y 轴交于点 E .

(1) 求点 E 的坐标；

(2) 在 x 轴上方找一点 C ，使以点 C 、 O 、 B 为顶点的三角形与 $\triangle BOE$ 相似，请直接写出点 C 的坐标.



【考点】 HF：二次函数综合题.

【分析】 (1) 根据二次函数解析式求得点 B 的坐标；设直线 $BQ: y = kx + b$ ($k \neq 0$). 则把 B 、 Q 的坐标代入该解析式列出关于系数 k 、 b 的方程组，通过解方程组即可求得它们的值；最后令 $x = 0$ ，则 $y = -8$ ，即 $E(0, -8)$ ；

(2) 需要分类讨论：①如图 1，若 $\angle COB = \angle EOB = 90^\circ$ ；②如图 1，若 $\angle CBO = \angle EOB = 90^\circ$ ；③如图 2，若 $\angle OCB = \angle BOE = 90^\circ$. 由相似三角形的对应边成比例求得相关线段的长度.

【解答】 解：(1) 令 $y = 0$ ，得 $\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{16}{3} = 0$,

解方程，得

$$x_1 = -2, x_2 = 4,$$

∵ 点 A 在点 B 的左侧,

$$\therefore B(4, 0)$$

$$\text{又 } y = \frac{2}{3}(x-1)^2 - 6,$$

$$\therefore Q(1, -6).$$

设直线 $BQ: y = kx + b (k \neq 0)$. 则把 B 、 Q 的坐标代入, 得

$$\begin{cases} 4k + b = 0 \\ k + b = -6 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} k = 2 \\ b = -8 \end{cases}$,

∴ 直线 BQ 的解析式是: $y = 2x - 8$,

$$\therefore E(0, -8);$$

(2) 由 (1) 知, $B(4, 0)$, $E(0, -8)$, 则 $OE = 8$, $OB = 4$.

① 如图 1, 若 $\angle COB = \angle EOB = 90^\circ$.

当 $\triangle BOC \sim \triangle BOE$ 时, $\frac{BO}{BO} = \frac{OC}{OE} = 1$, 即 $OC = OE = 8$, 则 $C_1(0, 8)$;

当 $\triangle COB \sim \triangle BOE$ 时, $\frac{BO}{EO} = \frac{CO}{BO}$, 即 $\frac{4}{8} = \frac{CO}{4}$, 则 $CO = 2$, 故 $C_2(0, 2)$;

② 如图 1, 若 $\angle CBO = \angle EOB = 90^\circ$.

当 $\triangle CBO \sim \triangle BOE$ 时, $\frac{CB}{BO} = \frac{BO}{OE}$, 即 $\frac{CB}{4} = \frac{4}{8}$, 解得, $CB = 2$, 故 $C_3(4, 2)$;

当 $\triangle OBC \sim \triangle BOE$ 时, $\frac{OB}{BO} = \frac{BC}{OE} = 1$, 即 $BC = OE = 8$, 故 $C_4(4, 8)$;

③ 如图 2, 若 $\angle OCB = \angle BOE = 90^\circ$, 设 $C(x, y)$.

$\triangle OCB \sim \triangle BOE$ 时, $\frac{OC}{BO} = \frac{CB}{OE}$, 即 $\frac{OC}{4} = \frac{CB}{8}$, 或 $\frac{OC}{CB} = \frac{1}{2}$ ①.

∵ 直角 $\triangle BOC$ 中, 根据勾股定理知 $OC^2 + BC^2 = OB^2 = 16$, ②

$$\therefore \text{由①②得, } OC = \frac{4\sqrt{5}}{5}, BC = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$OC \cdot BC = \frac{32}{5}.$$

$$\therefore \frac{1}{2}OB \cdot y = \frac{1}{2}OC \cdot BC,$$

$$\therefore y = \frac{8}{5},$$

$$\therefore x = \frac{4}{5}, \text{ 即 } C_5 \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5} \right).$$

同理, 当 $\triangle BCO \sim \triangle BOE$ 时, $C_6 \left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5} \right)$.

综上所述, 符合条件的点 C 的坐标是:

$$C_1(0, 8), C_2(0, 2), C_3(4, 2), C_4(4, 8), C_5\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right), C_6\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right).$$

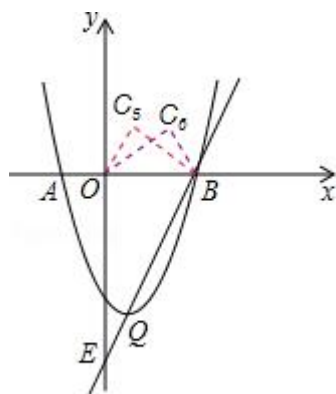


图2

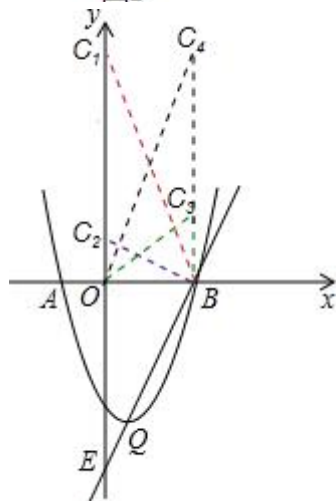


图1

【点评】 本题考查了待定系数法求一次函数解析式, 相似三角形的判定与性质以及二次函数的综合题. 解答(2)题时, 要分类讨论, 以防漏解.

25. (14分) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 15$, $\cos \angle A = \frac{4}{5}$. 点 M 在 AB

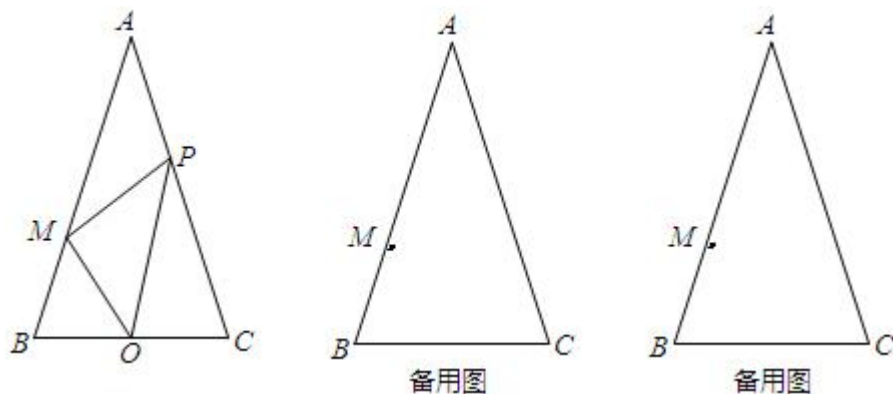
边上, $AM = 2MB$, 点 P 是边 AC 上的一个动点, 设 $PA = x$.

(1) 求底边 BC 的长;

(2) 若点 O 是 BC 的中点, 联接 MP 、 MO 、 OP , 设四边形 $AMOP$ 的面积是 y , 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出 x 的取值范围;

(3) 把 $\triangle MPA$ 沿着直线 MP 翻折后得到 $\triangle MPN$, 是否可能使 $\triangle MPN$ 的一条边 (折痕边 PM 除外) 与 AC 垂直? 若存在, 请求出 x 的值; 若不存在, 请说明

理由.



【考点】SO：相似形综合题.

【分析】(1) 作 $BH \perp AC$ 于点 H ，求出 $AH = 12$ ， $BH = 9$ ，求出 CH ，根据勾股定理得出 $BC^2 = BH^2 + CH^2$ ，求出即可；

(2) 作 $OE \perp AB$ 于点 E ， $OF \perp AC$ 于点 F ，求出 $OE = OF = \frac{1}{2}BH = \frac{9}{2}$ ，求出 $PC = 15 - x$ ，根据 $y = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BOM} - S_{\triangle COP}$ 和三角形面积公式求出即可；

(3) ①当 $PN \perp AC$ 时，作 $MG \perp AC$ 于点 G ，求出 $AG = 8$ ， $MG = 6$ ，①若点 P_1 在 AG 上，由折叠知 $\angle AP_1M = 135^\circ$ ，求出 $P_1G = MG = 6$ ，代入 $AP_1 = AG - P_1G$ 求出即可；②若点 P_2 在 CG 上，由折叠知 $\angle AP_2M = 45^\circ$ ，求出 $P_2G = MG = 6$ ，代入 $AP_2 = AG + P_2G$ 求出即可；③当 $MN \perp AC$ 时，

由折叠知 $\angle AMP_3 = \angle NMP_3$ ，求出 $P_3G = 8 - x$ ， $GN_3 = 4$ ，根据 $P_3N_3^2 = P_3G^2 + GN_3^2$ 得出 $x^2 = (8 - x)^2 + 4^2$ ，求出即可.

【解答】解：

(1) 作 $BH \perp AC$ 于点 H ，如图 1，

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中， $\cos \angle A = \frac{4}{5}$ ， $AB = 15$ ，

$\therefore AH = 12$ ，

$\therefore BH = 9$ ，

$\because AC = 15$ ，

$\therefore CH = 3$ ，

$\because BC^2 = BH^2 + CH^2$ ，

$\therefore BC^2 = 9^2 + 3^2 = 90$ ，

$\therefore BC = 3\sqrt{10}$.

(2) 作 $OE \perp AB$ 于点 E , $OF \perp AC$ 于点 F , 如图 2,

$\because OE \perp AB$, $OF \perp AC$, 点 O 是 BC 的中点, $AB = AC$,

$$\therefore OE = OF = \frac{1}{2}BH = \frac{9}{2},$$

$\because AM = 2MB$, $AB = AC = 15$,

$\therefore AM = 10$, $BM = 5$,

$\because PA = x$,

$\therefore PC = 15 - x$,

$$\therefore y = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BOM} - S_{\triangle COP}$$

$$= \frac{1}{2}BH \cdot AC - \frac{1}{2}OE \cdot BM - \frac{1}{2}OF \cdot PC$$

$$= \frac{1}{2} \times 9 \times 15 - \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 5 - \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times (15 - x)$$

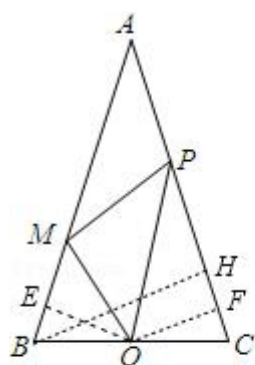
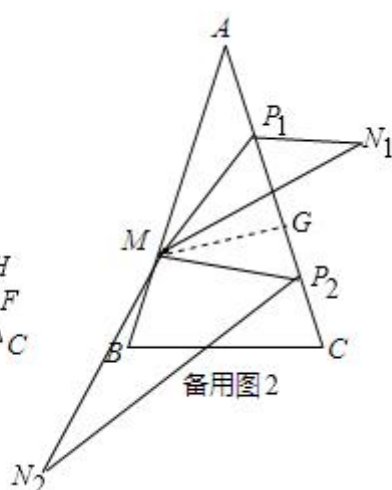
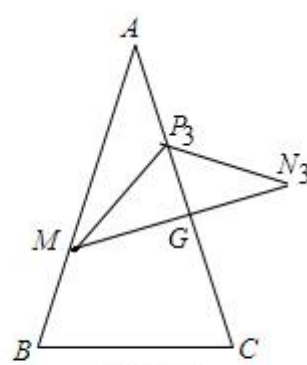


图1



备用图2



备用图3

即 $y = \frac{9}{4}x + \frac{45}{2}$. 定义域是 $0 < x \leq 15$.

(3) ①当 $PN \perp AC$ 时, 如图 2, 作 $MG \perp AC$ 于点 G ,

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle AMG$ 中, $\cos \angle A = \frac{4}{5}$, $AM = 10$,

$\therefore AG = 8$,

$\therefore MG = 6$,

②若点 P_1 在 AG 上, $\angle AP_1N_1 = 90^\circ$, 由折叠知: $\angle AP_1M = \angle N_1P_1M = 135^\circ$,

$\therefore \angle MP_1G = 45^\circ$,

$\because MG \perp AC$,

$$\therefore P_1G = MG = 6,$$

$$\therefore AP_1 = AG - P_1G = 2.$$

③若点 P_2 在 CG 上，由折叠知： $\angle AP_2M = 45^\circ$,

$$\because MG \perp AC,$$

$$\therefore P_2G = MG = 6,$$

$$\therefore AP_2 = AG + P_2G = 14.$$

④当 $MN \perp AC$ 时，如图 3，

由折叠知： $\angle AMP_3 = \angle NMP_3$, $P_3N_3 = AP_3 = x$, $MN_3 = MA = 10$,

$$\therefore P_3G = 8 - x, \quad GN_3 = 4,$$

$$\because P_3N_3^2 = P_3G^2 + GN_3^2,$$

$$\therefore x^2 = (8 - x)^2 + 4^2,$$

$$\therefore x = 5,$$

综上所述， $x = 2$ 或 5 或 14 时满足 $\triangle MPN$ 的一条边与 AC 垂直.

【点评】 本题考查了折叠性质，勾股定理，解直角三角形等知识点的应用，主要考查学生综合运用性质进行推理和计算的能力，题目比较好，难度偏大.