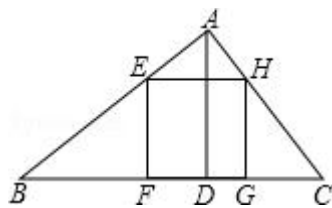


2013 年上海市浦东新区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 如果延长线段 AB 到 C , 使得 $BC = \frac{1}{2}AB$, 那么 $AC:AB$ 等于 ()
 A. 2:1 B. 2:3 C. 3:1 D. 3:2
2. (4 分) 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$, $AC = 3$, 那么 AB 的长为 ()
 A. $3\sin\alpha$ B. $3\cos\alpha$ C. $\frac{3}{\sin\alpha}$ D. $\frac{3}{\cos\alpha}$
3. (4 分) 将抛物线 $y = x^2$ 向左平移 2 个单位, 所得抛物线的解析式为 ()
 A. $y = x^2 - 2$ B. $y = x^2 + 2$ C. $y = (x+2)^2$ D. $y = (x-2)^2$
4. (4 分) 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $(-1, 0)$ 和 $(3, 0)$, 那么对称轴是直线 ()
 A. $x = 0$ B. $x = 1$ C. $x = 2$ D. $x = 3$
5. (4 分) 如果乙船在甲船的北偏东 40° 方向上, 丙船在甲船的南偏西 40° 方向上, 那么丙船在乙船的方向是 ()
 A. 北偏东 40° B. 北偏西 40° C. 南偏东 40° D. 南偏西 40°
6. (4 分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 边 $BC = 6$, 高 $AD = 3$, 正方形 $EFGH$ 的顶点 F, G 在边 BC 上, 顶点 E, H 分别在边 AB 和 AC 上, 那么这个正方形的边长等于 ()



- A. 3 B. 2.5 C. 2 D. 1.5

二、填空题：（本大题共 12 题，，每题 4 分，满分 48 分）

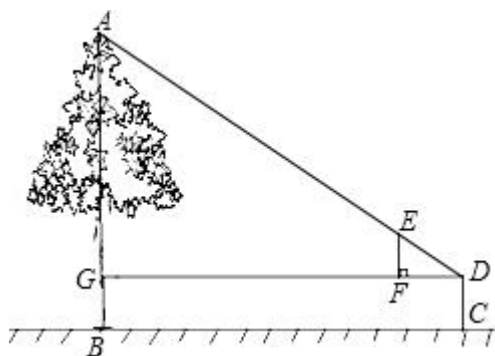
7. (4 分) 已知线段 b 是线段 a, c 的比例中项, 且 $a = 1, b = 2$, 那么 $c =$ _____.
8. (4 分) 计算: $(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}) - \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b}) =$ _____.
9. (4 分) 如果抛物线 $y = (2 - a)x^2$ 的开口方向向下, 那么 a 的取值范围是 _____.
10. (4 分) 二次函数 $y = x^2 - 3$ 的图象的最低点坐标是 _____.
11. (4 分) 在边长为 6 的正方形中间挖去一个边长为 x ($0 < x < 6$) 的小正方形,

如果设剩余部分的面积为 y ，那么 y 关于 x 的函数解析式为_____.

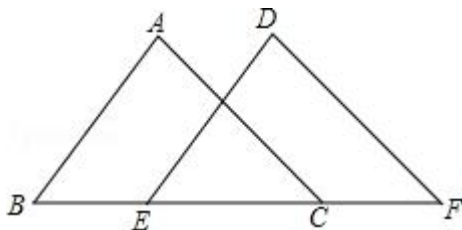
12. (4分) 已知 α 是锐角， $\tan \alpha = 2\cos 30^\circ$ ，那么 $\alpha =$ _____度.

13. (4分) 已知从地面进入地下车库的斜坡的坡度为 1: 2.4，地下车库的地坪与地面的垂直距离等于 5 米，那么此斜坡的长度等于_____米.

14. (4分) 小明用自制的直角三角形纸板 DEF 测量树 AB 的高度. 测量时，使直角边 DF 保持水平状态，其延长线交 AB 于点 G ；使斜边 DE 与点 A 在同一条直线上. 测得边 DF 离地面的高度为 1.4m，点 D 到 AB 的距离等于 6m (如图示). 已知 $DF = 30\text{cm}$ ， $EF = 20\text{cm}$ ，那么树 AB 的高度等于_____m.



15. (4分) 如图，将 $\triangle ABC$ 沿射线 BC 方向平移得到 $\triangle DEF$ ，边 DE 与 AC 相交于点 G ，如果 $BC = 3\text{cm}$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 9cm^2 ， $\triangle EGC$ 的面积等于 4cm^2 ，那么 $BE =$ _____cm.



16. (4分) 相邻两边长的比值是黄金分割数的矩形，叫做黄金矩形，从外形看，它最具美感. 现在想要制作一张“黄金矩形”的贺年卡，如果较长的一条边长等于 20 厘米，那么相邻一条边的边长等于_____厘米.

17. (4分) 九年级数学课本上，用“描点法”画二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象时，列出了如下的表格：

x	...	0	1	2	3	4	...
$y = ax^2 + bx + c$	...	3	0	-1	0	3	...

那么该二次函数在 $x = 5$ 时， $y =$ _____.

18. (4分) 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $BC = a$, 点 D 在边 BC 上, 将这个三角形沿直线 AD 折叠, 点 C 恰好落在边 AB 上, 那么 $BD =$ _____. (用 a 的代数式表示)

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 已知: 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 两点, 顶点为 A .

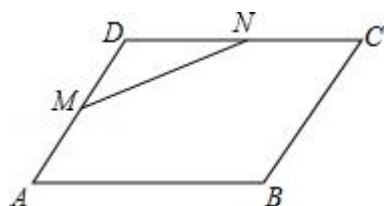
求: (1) 抛物线的表达式;

(2) 顶点 A 的坐标.

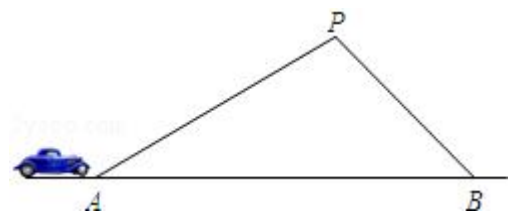
20. (10分) 如图, 已知在平行四边形 $ABCD$ 中, M 、 N 分别是边 AD 、 DC 的中点, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

(1) 求向量 $\overrightarrow{MD}$ 、 $\overrightarrow{MN}$ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示);

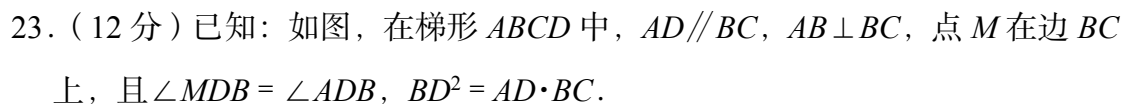
(2) 求作向量 $\overrightarrow{MN}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 方向上的分向量. (不要求写作法, 但要指出所作图中表示结论的向量)



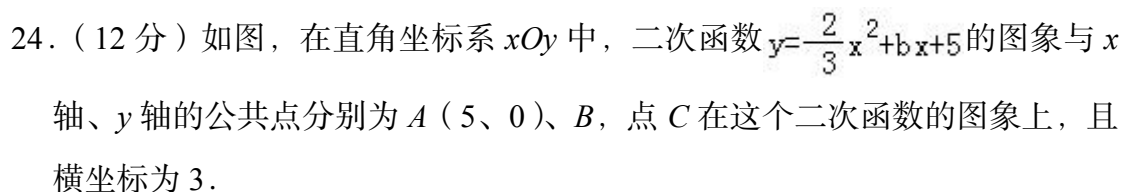
21. (10分) 某条道路上通行车辆限速为 60 千米/时, 在离道路 50 米的点处建一个监测点 P , 道路 AB 段为检测区 (如图). 在 $\triangle ABP$ 中, 已知 $\angle PAB = 32^\circ$, $\angle PBA = 45^\circ$, 那么车辆通过 AB 段的时间在多少秒以内时, 可认定为超速 (精确到 0.1 秒)? (参考数据: $\sin 32^\circ \approx 0.53$, $\cos 32^\circ \approx 0.85$, $\tan 32^\circ \approx 0.62$, $\cot 32^\circ \approx 1.60$)



22. (10分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 BC 上, 连接 AE 并延长, 交对角线 BD 于点 F 、 DC 的延长线于点 G , 如果 $\frac{BE}{EC} = \frac{3}{2}$. 求 $\frac{EF}{EG}$ 的值.

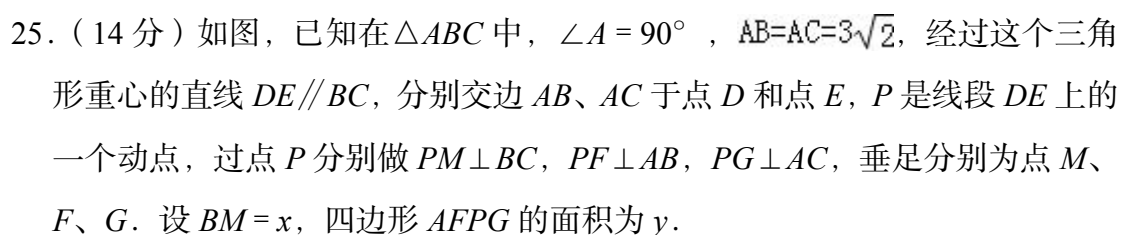


(2) 作 $BE \perp DM$, 垂足为点 E , 并交 CD 于点 F . 求证: $2AD \cdot DM = DF \cdot DC$.

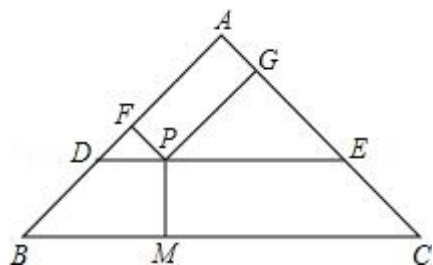


(2) 求 $\angle BAC$ 的正切值;

(3) 如果点 D 在这个二次函数的图象上, 且 $\angle DAC = 45^\circ$, 求点 D 的坐标.



- (1) 求 PM 的长；
- (2) 求 y 关于 x 的函数解析式，并写出它的定义域；
- (3) 连接 MF 、 MG ，当 $\triangle PMF$ 与 $\triangle PMG$ 相似时，求 BM 的长．



2013 年上海市浦东新区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）如果延长线段 AB 到 C ，使得 $BC = \frac{1}{2}AB$ ，那么 $AC:AB$ 等于（ ）

A. 2:1

B. 2:3

C. 3:1

D. 3:2

【考点】ID：两点间的距离．

【分析】作出图形，用 AB 表示出 AC ，然后求比值即可．

【解答】解：如图， $\because BC = \frac{1}{2}AB$ ，

$$\therefore AC = AB + BC = AB + \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}AB,$$

$$\therefore AC:AB = 3:2.$$

故选：D．



【点评】本题考查了两点间的距离，用 AB 表示出 AC 是解题的关键，作出图形更形象直观．

2.（4 分）已知在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = \alpha$ ， $AC = 3$ ，那么 AB 的长为（ ）

A. $3\sin\alpha$

B. $3\cos\alpha$

C. $\frac{3}{\sin\alpha}$

D. $\frac{3}{\cos\alpha}$

【考点】T1：锐角三角函数的定义；T7：解直角三角形．

【专题】11：计算题．

【分析】利用 $\angle A$ 的余弦值解答即可．

【解答】解： $\because \cos A = \frac{AC}{AB}$ ， $\angle A = \alpha$ ， $AC = 3$ ，

$$\therefore AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{3}{\cos \alpha},$$

故选：D．

【点评】考查解直角三角形的知识；掌握和一个角的邻边与斜边有关的三角函数值是余弦值的知识是解决本题的关键．

3.（4 分）将抛物线 $y = x^2$ 向左平移 2 个单位，所得抛物线的解析式为（ ）

A. $y = x^2 - 2$

B. $y = x^2 + 2$

C. $y = (x+2)^2$

D. $y = (x-2)^2$

【考点】H6：二次函数图象与几何变换.

【专题】2C：存在型.

【分析】直接根据“左加右减”的原则进行解答即可.

【解答】解：由“左加右减”的原则可知，将抛物线 $y = x^2$ 向左平移 2 个单位，
所得抛物线的解析式为： $y = (x+2)^2$.

故选：C.

【点评】本题考查的是二次函数的图象与几何变换，熟知函数图象平移的法则是解答此题的关键.

4. (4 分) 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $(-1, 0)$ 和 $(3, 0)$ ，那么对称轴是直线 ()

- A. $x = 0$ B. $x = 1$ C. $x = 2$ D. $x = 3$

【考点】H3：二次函数的性质.

【专题】11：计算题.

【分析】根据抛物线的对称性得到抛物线的对称轴经过两点 $(-1, 0)$ 和 $(3, 0)$ 的中点，于是可得到抛物线的对称轴为直线 $x = 2$.

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴两交点的坐标为 $(-1, 0)$ 和 $(3, 0)$ ，
而抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴两交点是对称点，
 $\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$.

故选：B.

【点评】本题考查了二次函数的图象的性质：二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象为抛物线，当 $a > 0$ ，抛物线开口向上；对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$ ；抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0, c)$ ；当 $b^2 - 4ac > 0$ ，抛物线与 x 轴有两个交点；当 $b^2 - 4ac = 0$ ，抛物线与 x 轴有一个交点；当 $b^2 - 4ac < 0$ ，抛物线与 x 轴没有交点.

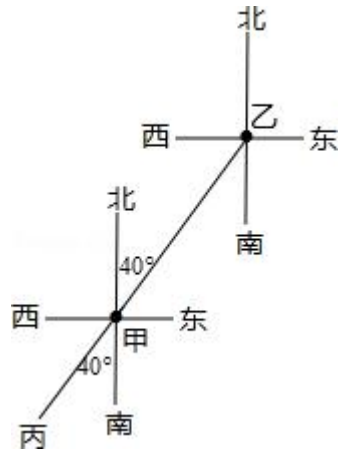
5. (4 分) 如果乙船在甲船的北偏东 40° 方向上，丙船在甲船的南偏西 40° 方向上，那么丙船在乙船的方向是 ()

- A. 北偏东 40° B. 北偏西 40° C. 南偏东 40° D. 南偏西 40°

【考点】IH：方向角.

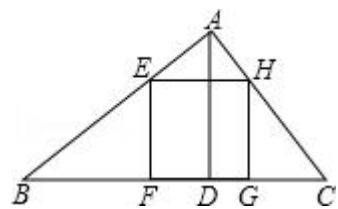
【分析】根据题意画出图形可直接得到答案.

【解答】解：如图所示：丙船在乙船的方向是南偏西 40° ，
故选：D.



【点评】此题主要考查了方向角，关键是正确画出图形，这样可以直观的得到答案.

6. (4分) 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，边 $BC = 6$ ，高 $AD = 3$ ，正方形 $EFGH$ 的顶点 F 、 G 在边 BC 上，顶点 E 、 H 分别在边 AB 和 AC 上，那么这个正方形的边长等于 ()



- A. 3 B. 2.5 C. 2 D. 1.5

【考点】LE：正方形的性质；S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】利用正方形的性质可知 $EH \parallel BC$ ，再利用平行线分线段成比例定理的推论可得 $\triangle AHE \sim \triangle ACB$ ，利用相似三角形的性质可得比例线段，利用比例线段可求正方形的边长

【解答】解： $\because$ 四边形 $EFGH$ 是正方形，

$$\therefore EH \parallel BC, EH = EF,$$

$$\therefore \triangle AEH \sim \triangle ABC,$$

又 $\because AD \perp BC$,

$$\therefore AD \perp BC, EH = EF = MD,$$

$$\therefore \frac{AM}{AD} = \frac{EH}{BC},$$

设 $EH = x$, 则 $AM = 3 - x$,

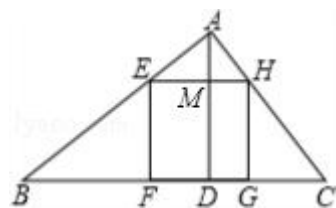
$$\therefore \frac{3-x}{3} = \frac{x}{6},$$

解得: $x = 2$,

$$\therefore EH = 2.$$

答: 这个正方形的边长为 2.

故选: C.



【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质、正方形的性质和平行线分线段成比例定理, 是各地中考考查相似三角形常见题型.

二、填空题: (本大题共 12 题,, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 已知线段 b 是线段 a 、 c 的比例中项, 且 $a = 1$ 、 $b = 2$, 那么 $c = \underline{4}$.

【考点】 S2: 比例线段.

【分析】 根据比例中项的定义可得 $b^2 = ac$, 从而易求 b .

【解答】 解: $\because$ 线段 b 是线段 a 、 c 的比例中项,

$$\therefore b^2 = ac,$$

$$\text{即 } 2^2 = 1 \times c,$$

$$\therefore c = 4.$$

故答案是 4.

【点评】 本题考查了比例线段, 解题的关键是理解比例中项的定义.

8. (4 分) 计算: $(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}) - \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b}) = \underline{-\vec{b}}$.

【考点】 LM: *平面向量.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 去掉括号, 然后根据向量的加减运算进行计算即可得解.

$$\text{【解答】 解: } (\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}) - \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$= -\vec{b}.$$

故答案为： $-\vec{b}$.

【点评】 本题考查了向量的加减运算，比较简单.

9. (4分) 如果抛物线 $y = (2 - a)x^2$ 的开口方向向下，那么 a 的取值范围是 $a > 2$.

【考点】 H3: 二次函数的性质.

【分析】 根据二次函数的性质可知，当抛物线开口向下时，二次项系数 $2 - a < 0$.

【解答】 解：因为抛物线 $y = (2 - a)x^2$ 的开口向下，

所以 $2 - a < 0$ ，即 $a > 2$ ，

故答案为 $a > 2$.

【点评】 本题主要考查了二次函数的性质. 用到的知识点：对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 来说，当 $a > 0$ 时，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 开口向上；当 $a < 0$ 时，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 开口向下.

10. (4分) 二次函数 $y = x^2 - 3$ 的图象的最低点坐标是 $(0, -3)$.

【考点】 H7: 二次函数的最值.

【分析】 根据二次函数的性质，利用顶点式直接得出顶点坐标即可.

【解答】 解：二次函数 $y = x^2 - 3$ 图象的顶点坐标是： $(0, -3)$.

故答案为： $(0, -3)$.

【点评】 此题主要考查了利用二次函数顶点式求顶点坐标，此题型是中考中考查重点，同学们应熟练掌握.

11. (4分) 在边长为 6 的正方形中间挖去一个边长为 x ($0 < x < 6$) 的小正方形，如果设剩余部分的面积为 y ，那么 y 关于 x 的函数解析式为 $y = -x^2 + 36$ ($0 < x < 6$).

【考点】 HD: 根据实际问题列二次函数关系式.

【分析】 根据剩下部分的面积 = 大正方形的面积 - 小正方形的面积得出 y 与 x 的函数关系式即可.

【解答】 解：设剩下部分的面积为 y ，则：

$$y = 6^2 - x^2 = -x^2 + 36 \quad (0 < x < 6).$$

故答案为： $y = -x^2 + 36$ ($0 < x < 6$).

【点评】 此题主要考查了根据实际问题列二次函数关系式，利用剩下部分的面积

= 大正方形的面积 - 小正方形的面积得出是解题关键.

12. (4分) 已知 α 是锐角, $\tan\alpha = 2\cos 30^\circ$, 那么 $\alpha =$ 60 度.

【考点】T5: 特殊角的三角函数值.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据 30° 角的余弦值等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 正切值是 $\sqrt{3}$ 的锐角为 60° 解答即可.

【解答】解: $\because \tan\alpha = 2\cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

$\therefore \alpha = 60^\circ$.

故答案为: 60.

【点评】本题考查了特殊角的三角函数值, 熟记 30° 、 45° 、 60° 角的正弦值、余弦值、正切值是解此类题目的关键.

13. (4分) 已知从地面进入地下车库的斜坡的坡度为 1: 2.4, 地下车库的地坪与地面的垂直距离等于 5 米, 那么此斜坡的长度等于 13 米.

【考点】T9: 解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

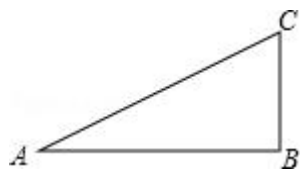
【分析】根据坡度 = 铅直高度: 水平距离 = 1: 2.4, 进而得出水平距离, 再由勾股定理求出即可.

【解答】解: $\because$ 地下车库的地坪与地面的垂直距离 $BC = 5$ 米,

$\therefore$ 水平距离应该为: $AB = 5 \times 2.4 = 12$ (米),

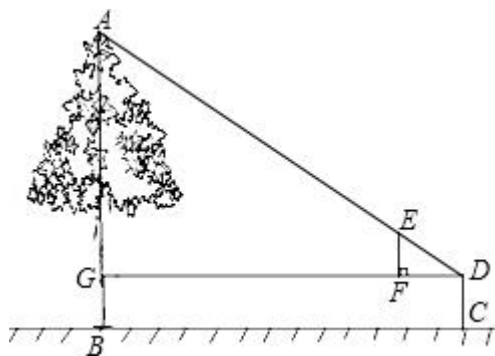
$\therefore$ 此斜坡的长度等于: $AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ (m).

故答案为: 13.



【点评】此题主要考查了坡度的定义, 根据已知画出图象利用数形结合得出是解题关键.

14. (4分) 小明用自制的直角三角形纸板 DEF 测量树 AB 的高度. 测量时, 使直角边 DF 保持水平状态, 其延长线交 AB 于点 G ; 使斜边 DE 与点 A 在同一条直线上. 测得边 DF 离地面的高度为 $1.4m$, 点 D 到 AB 的距离等于 $6m$ (如图所示). 已知 $DF = 30cm$, $EF = 20cm$, 那么树 AB 的高度等于 5.4 m.



【考点】SA：相似三角形的应用．

【分析】从实际问题中抽象出相似三角形后求解即可．

【解答】解：根据题意得： $DG = 6m$ ，

$$\because EF \parallel AG$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle DAG$$

$$\therefore \frac{AG}{DG} = \frac{EF}{FD}$$

$$\text{即：} \frac{AG}{6} = \frac{20}{30}$$

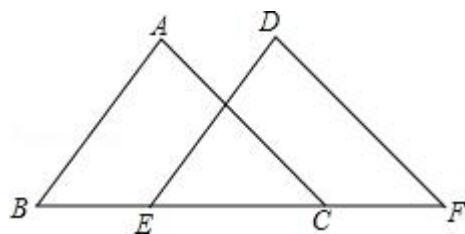
$$\text{解得：} AG = 4$$

$$\therefore AB = AG + GB = AG + DC = 4 + 1.4 = 5.4 \text{ 米，}$$

故答案为：5.4．

【点评】本题考查了相似三角形的应用，解题的关键是从实际问题中抽象出纯数学问题，然后利用相似三角形求解．

15. (4分) 如图，将 $\triangle ABC$ 沿射线 BC 方向平移得到 $\triangle DEF$ ，边 DE 与 AC 相交于点 G ，如果 $BC = 3cm$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $9cm^2$ ， $\triangle EGC$ 的面积等于 $4cm^2$ ，那么 $BE = \underline{1} cm$ ．



【考点】Q2：平移的性质；S9：相似三角形的判定与性质．

【分析】易证 $\triangle ABC \sim \triangle GEC$ ，根据相似三角形的面积的比等于相似比的平方，即可求得 EC 的长，则 BE 即可求解．

【解答】解： $\because AB \parallel DE$ ，

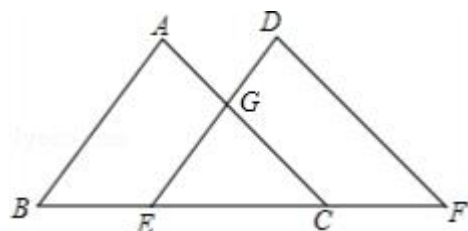
$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle GEC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle GEC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{EC}{BC} \right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\therefore EC = 2cm,$$

$$\therefore BE = BC - EC = 3 - 2 = 1cm.$$

故答案是：1



【点评】 本题考查了平移的性质，以及相似三角形的性质，正确理解性质求得 EC 的长是关键．

16. (4 分) 相邻两边长的比值是黄金分割数的矩形，叫做黄金矩形，从外形看，它最具美感．现在想要制作一张“黄金矩形”的贺年卡，如果较长的一条边长等于 20 厘米，那么相邻一条边的边长等于 $(10\sqrt{5} - 10)$ 厘米．

【考点】 S3：黄金分割．

【分析】 由黄金矩形的定义，可知黄金矩形的宽与长之比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，设所求边长为 x ，代入已知数据即可得出答案．

【解答】 解：设所求边长为 x ，由题意，

$$\text{得 } \frac{x}{20} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\text{解得 } x = (10\sqrt{5} - 10) \text{ cm}.$$

故答案为 $(10\sqrt{5} - 10)$ ．

【点评】 本题主要考查了黄金分割点的概念，需要熟记黄金比的值，难度适中．

17. (4 分) 九年级数学课本上，用“描点法”画二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象时，列出了如下的表格：

x	...	0	1	2	3	4	...
$y = ax^2 + bx + c$	...	3	0	-1	0	3	...

那么该二次函数在 $x = 5$ 时， $y =$ 8．

【考点】H3：二次函数的性质.

【分析】根据表格数据，利用待定系数法求出函数解析式，然后把 $x=5$ 代入进行计算即可得解.

【解答】解：根据表格， $x=0$ 时， $y=3$ ； $x=1$ 时， $y=0$ ； $x=2$ 时， $y=-1$ ，

$$\text{所以, } \begin{cases} c=3 \\ a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=-1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=3 \end{cases},$$

$$\text{所以, } y=x^2-4x+3,$$

$$\text{当 } x=5 \text{ 时, } y=5^2-4 \times 5+3=8.$$

故答案为：8.

【点评】本题考查了二次函数的性质，根据表格数据，利用待定系数法求出二次函数的解析式是解题的关键.

18. (4分) 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A=90^\circ$ ， $\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $BC=a$ ，点 D 在边 BC 上，将这个三角形沿直线 AD 折叠，点 C 恰好落在边 AB 上，那么 $BD=\frac{2a}{3}$. (用 a 的代数式表示)

【考点】PB：翻折变换（折叠问题）；T7：解直角三角形.

【分析】首先根据题意作出图形，然后过 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H ，作 $DG \perp AC$ 于点 G ，由在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A=90^\circ$ ， $\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $BC=a$ ，可求得 AC 与 AB 的长，由折叠的性质可得： AD 平分 $\angle CAB$ ，然后由三角形的面积相等，可求得 DH 的长，继而求得答案 BH 的长，然后由勾股定理求得 BD 的长.

【解答】解：过 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H ，作 $DG \perp AC$ 于点 G .

$$\because \text{在 } \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \angle BAC=90^\circ, \sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}, BC=a,$$

$$\therefore AC=\frac{\sqrt{5}}{5}a, AB=\frac{2\sqrt{5}}{5}a,$$

$$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB \cdot AC=\frac{a^2}{5},$$

由折叠的性质可得： AD 平分 $\angle CAB$ ，

$$\therefore DH=DG,$$

设 $DH = x$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DAC} + S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot DH + \frac{1}{2}AC \cdot DG = \frac{1}{2}DH (AB + AC) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}a + \frac{2\sqrt{5}}{5}a \right) = \frac{3\sqrt{5}}{10}ax,$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{5}}{10}ax = \frac{a^2}{5},$$

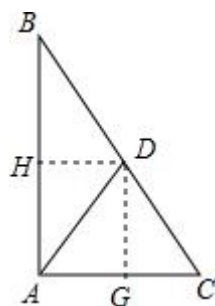
$$\text{解得: } x = \frac{2\sqrt{5}}{15}a,$$

$$\therefore DH = AH = \frac{2\sqrt{5}}{15}a,$$

$$\therefore BH = AB - AH = \frac{4\sqrt{5}}{15}a,$$

$$\therefore BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = \frac{2}{3}a.$$

故答案为: $\frac{2}{3}a$.



【点评】此题考查了折叠的性质、角平分线的性质、三角形的面积问题以及勾股定理. 此题难度适中, 注意掌握折叠前后图形的对应关系, 注意数形结合思想与方程思想的应用.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 已知: 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 两点, 顶点为 A .

求: (1) 抛物线的表达式;

(2) 顶点 A 的坐标.

【考点】H3: 二次函数的性质; H8: 待定系数法求二次函数解析式.

【分析】(1) 直接把 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$ 得到关于 b 、 c 的方程组, 解方程组求出 b 、 c , 可确定抛物线的解析式;

(2) 把 (1) 的解析式进行配方可得到顶点式, 然后写出顶点坐标即可.

【解答】解：（1）把 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$ $\begin{cases} -9 + 3b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$ ，
解得 $\begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$ 。

故抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$ ；

$$\begin{aligned} (2) \quad y &= -x^2 + 2x + 3 \\ &= -(x^2 - 2x + 1) + 3 + 1 \\ &= -(x - 1)^2 + 4, \end{aligned}$$

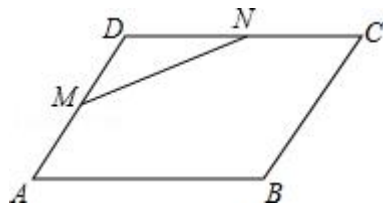
所以顶点 A 的坐标为 $(1, 4)$ 。

【点评】 本题考查了待定系数法求二次函数的解析式：先设抛物线的解析式（一般式、顶点式或交点式），再把抛物线上的点的坐标代入得到方程组，然后解方程可确定抛物线的解析式。也考查了二次函数的性质。

20. (10 分) 如图，已知在平行四边形 $ABCD$ 中， M 、 N 分别是边 AD 、 DC 的中点，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ 。

(1) 求向量 $\overrightarrow{MD}$ 、 $\overrightarrow{MN}$ （用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示）；

(2) 求作向量 $\overrightarrow{MN}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 方向上的分向量。（不要求写作法，但要指出所作图中表示结论的向量）



【考点】 LM：*平面向量。

【分析】（1）根据线段的中点定义可得 $MD = \frac{1}{2}AD$ ， $DN = \frac{1}{2}AB$ ，然后表示出 $\overrightarrow{MD}$ ， $\overrightarrow{DN}$ ，再根据三角形法则求出 $\overrightarrow{MN}$ 即可；

（2）以点 M 为圆心，以 DN 长为半径画弧，以点 N 为圆心，以 MD 长为半径画弧，交点为 E ，再根据平行四边形法则解答即可。

【解答】解：（1） $\because M$ 、 N 分别是边 AD 、 DC 的中点，

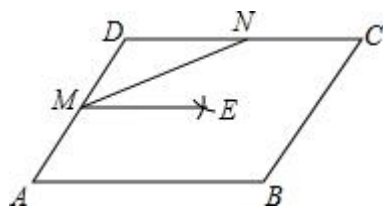
$$\therefore MD = \frac{1}{2}AD, \quad DN = \frac{1}{2}AB,$$

$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\vec{a},$$

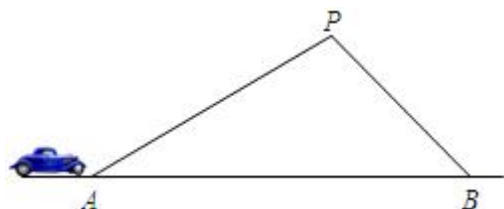
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b};$$

(2) 如图所示, $\overrightarrow{ME}$ 为 $\overrightarrow{MN}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的向量, $\overrightarrow{MD}$ 为 $\overrightarrow{MN}$ 在 $\overrightarrow{AD}$ 方向上的向量.



【点评】 本题考查了平面向量的知识, 平行四边形对边互相平行, 线段中点的定义, 向量的问题, 熟练掌握三角形法则与平行四边形法则是解题的关键.

21. (10 分) 某条道路上通行车辆限速为 60 千米/时, 在离道路 50 米的点处建一个监测点 P , 道路 AB 段为检测区 (如图). 在 $\triangle ABP$ 中, 已知 $\angle PAB = 32^\circ$, $\angle PBA = 45^\circ$, 那么车辆通过 AB 段的时间在多少秒以内时, 可认定为超速 (精确到 0.1 秒)? (参考数据: $\sin 32^\circ \approx 0.53$, $\cos 32^\circ \approx 0.85$, $\tan 32^\circ \approx 0.62$, $\cot 32^\circ \approx 1.60$)



【考点】 T8: 解直角三角形的应用.

【分析】 作 $PC \perp AB$ 于点 C , 根据三角函数即可求得 AC 与 BC 的长, 则 AB 即可求得, 用 AB 的长除以速度即可求解.

【解答】 解: 作 $PC \perp AB$ 于点 C .

$$\text{在直角 } \triangle APC \text{ 中, } \tan \angle PAC = \frac{PC}{AC},$$

$$\text{则 } AC = \frac{PC}{\tan \angle PAC} = \frac{50}{0.62} \approx 80.65 \text{ (米)},$$

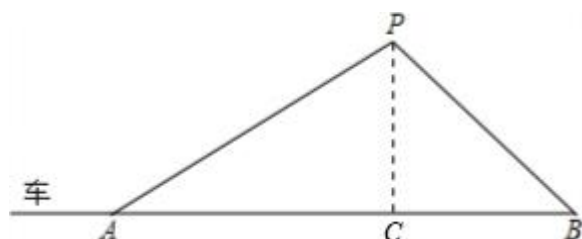
$$\text{同理, } BC = \frac{PC}{\tan \angle PBA} = PC = 50 \text{ (米)},$$

$$\text{则 } AB = AC + BC \approx 130.65 \text{ (米)},$$

$$60 \text{ 千米/时} = \frac{50}{3} \text{ 米/秒},$$

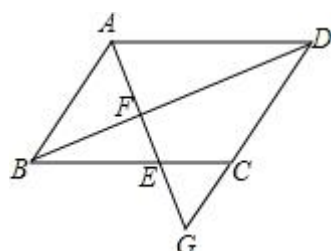
$$\text{则 } 130.65 \div \frac{50}{3} \approx 7.8 \text{ (秒)}.$$

故车辆通过 AB 段的时间在 7.8 秒内时，可认定为超速.



【点评】 本题考查解直角三角形的应用，属于实际应用类题目，从复杂的实际问题中整理出直角三角形是解决此类问题的关键.

22. (10 分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在边 BC 上，连接 AE 并延长，交对角线 BD 于点 F 、 DC 的延长线于点 G ，如果 $\frac{BE}{EC} = \frac{3}{2}$ ，求 $\frac{EF}{EG}$ 的值.



【考点】 L5：平行四边形的性质；S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】 由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可得 $AD = BC$ ， $AD \parallel BC$ ，即可证得 $\triangle ADF \sim \triangle EBF$ ， $\triangle GEC \sim \triangle GAD$ ，然后由相似三角形的对应边成比例，求得答案.

【解答】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD = BC, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle EBF, \triangle GEC \sim \triangle GAD,$$

$$\therefore \frac{EF}{AF} = \frac{BE}{AD}, \frac{EG}{AG} = \frac{EC}{AD},$$

$$\therefore \frac{BE}{EC} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{3}{5}, \frac{CE}{AD} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \frac{EF}{AF} = \frac{3}{5}, \frac{EG}{AG} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \frac{EF}{AE} = \frac{3}{8}, \frac{EG}{AE} = \frac{2}{3},$$

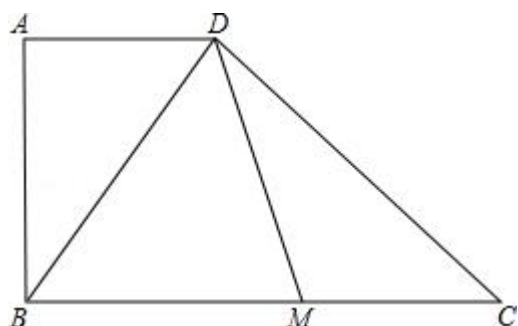
$$\therefore \frac{EF}{EG} = \frac{9}{16}.$$

【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质以及平行四边形的性质. 此题难度适中, 注意掌握数形结合思想的应用.

23. (12分) 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB \perp BC$, 点 M 在边 BC 上, 且 $\angle MDB = \angle ADB$, $BD^2 = AD \cdot BC$.

(1) 求证: $BM = CM$;

(2) 作 $BE \perp DM$, 垂足为点 E , 并交 CD 于点 F . 求证: $2AD \cdot DM = DF \cdot DC$.



【考点】LH: 梯形; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】14: 证明题.

【分析】(1) 首先证明 $BM = DM$, 再根据已知条件证明 $\triangle ADB \sim \triangle DBC$, 由相似的性质可得 $\angle BDC = \angle A = 90^\circ$, 进而证明 $DM = CM$, 所以 $BM = CM$;

(2) 由 (1) 可知 M 是 BC 的中点, 所以 DM 是三角形 BDC 斜边上的中线, 由直角三角形的性质可知 $BC = 2DM$, 证明 $\text{Rt}\triangle DFB \sim \text{Rt}\triangle DBC$ 可得 $\frac{BD}{DF} = \frac{DC}{BD}$, 所以 $BD^2 = DF \cdot DC$, 又因为 $BD^2 = AD \cdot BC$, 所以 $BD^2 = AD \cdot BC = AD \cdot (2DM) = 2AD \cdot DM$.

【解答】证明: (1) $\because AD \parallel BC$, $AB \perp BC$, $\angle MDB = \angle ADB$,

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC = \angle MDB, \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore BM = DM,$$

$$\text{又} \because BD^2 = AD \cdot BC, \text{即} \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC},$$

$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle DBC,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle MDC = 90^\circ - \angle DBC,$$

$$\therefore DM = CM,$$

$$\therefore BM = CM,$$

$$(2) \because \angle MDC + \angle DFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFB = \angle DBC,$$

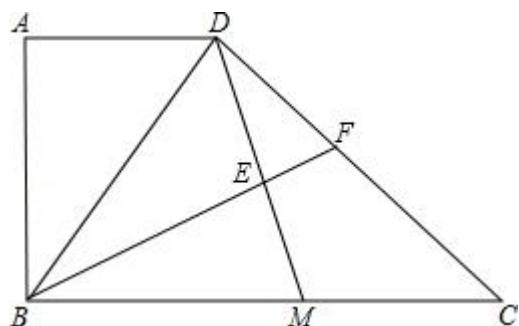
$$\therefore \text{Rt}\triangle DFB \sim \text{Rt}\triangle DBC,$$

$$\therefore \frac{BD}{DF} = \frac{DC}{BD},$$

$$\therefore DF \cdot DC = BD^2$$

$$\because BD^2 = AD \cdot BC = AD \cdot (2DM) = 2AD \cdot DM,$$

$$\therefore 2AD \cdot DM = DF \cdot DC.$$



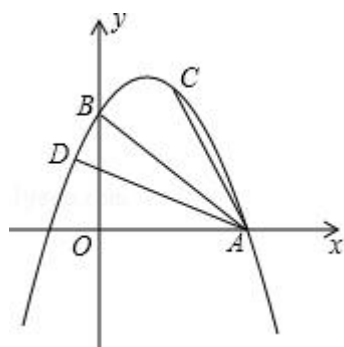
【点评】 本题考查了梯形的性质、直角三角形的性质、相似三角形的判定和性质以及比例式的证明，题目的综合性很强，难度不小.

24. (12分) 如图，在直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y = -\frac{2}{3}x^2 + bx + 5$ 的图象与 x 轴、 y 轴的公共点分别为 $A(5, 0)$ 、 B ，点 C 在这个二次函数的图象上，且横坐标为 3.

(1) 求这个二次函数的解析式；

(2) 求 $\angle BAC$ 的正切值；

(3) 如果点 D 在这个二次函数的图象上，且 $\angle DAC = 45^\circ$ ，求点 D 的坐标.



【考点】HF：二次函数综合题.

【专题】2B：探究型.

【分析】（1）将点 A 的坐标代入可得出 b 的值，继而得出二次函数解析式；

（2）连接 BC ，利用勾股定理逆定理可得出 $\triangle ABC$ 是直角三角形，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中可求出 $\tan\angle BAC$ 的值.

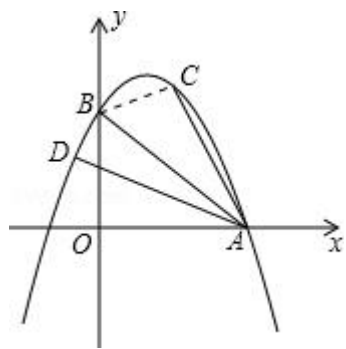
（3）根据 $OA = OB$ ，可得 $\angle BAO = 45^\circ$ ，结合 $\angle DAC = 45^\circ$ ，可得 $\angle DAO = \angle BAC$ ，设出点 D 的坐标，根据 $\tan\angle DAO$ 的值可得出答案.

【解答】解：（1）将点 $A(5, 0)$ 代入，可得： $0 = -\frac{2}{3} \times 5^2 + 5b + 5$,

解得： $b = \frac{7}{3}$,

故二次函数解析式为 $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 5$.

（2）连接 BC ,



$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 5$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0, 5)$,

$\therefore$ 点 C 的横坐标为 3,

$\therefore$ 点 C 的纵坐标为 6，即可得点 C 的坐标为 $(3, 6)$,

则 $BC = \sqrt{(3-0)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{10}$, $AB = 5\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{(5-3)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{40}$,

$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,

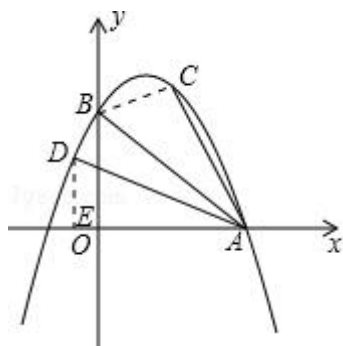
$\therefore \tan\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{40}} = \frac{1}{2}$;

(3) $\because OA = OB = 5, \angle BOA = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAO = 45^\circ$,

又 $\because \angle DAC = 45^\circ$,

$\therefore \angle DAO = \angle BAC$,



设点 D 的坐标为 $(x, -\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 5)$,

则 $\tan \angle DAO = \tan \angle BAC = \frac{-\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 5}{5-x} = \frac{1}{2}$,

解得: $x_1 = -\frac{3}{4}, x_2 = 5$ (舍去),

故点 D 的坐标为 $(-\frac{3}{4}, \frac{23}{8})$.

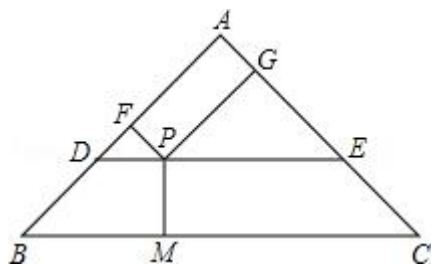
【点评】 本题考查了二次函数综合题, 涉及了待定系数法求函数解析式、勾股定理的逆定理及三角函数的知识, 解答本题的关键之处在于判断 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 对于此类综合型题目, 不要慌, 一问一问的思考, 将所学知识综合起来.

25. (14 分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC = 3\sqrt{2}$, 经过这个三角形重心的直线 $DE \parallel BC$, 分别交边 AB 、 AC 于点 D 和点 E , P 是线段 DE 上的一个动点, 过点 P 分别做 $PM \perp BC$, $PF \perp AB$, $PG \perp AC$, 垂足分别为点 M 、 F 、 G . 设 $BM = x$, 四边形 $AFPG$ 的面积为 y .

(1) 求 PM 的长;

(2) 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出它的定义域;

(3) 连接 MF 、 MG , 当 $\triangle PMF$ 与 $\triangle PMG$ 相似时, 求 BM 的长.



【考点】SO：相似形综合题.

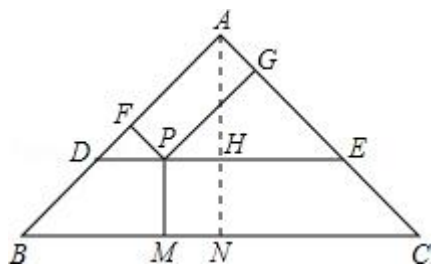
【专题】15：综合题.

【分析】（1）过点 A 作 $AN \perp BC$ 于点 N ，交 DE 于点 H ，则点 H 为 $\triangle ABC$ 的重心，由重心的性质即可求出 HE 的长度，也即得出 PM 的长度；

（2）过点 D 作 $DI \perp BC$ 于 I ，表示出 DP 、 PE ，继而表示出 FP 、 PG ，从而得出 y 关于 x 的函数解析式，也可得出 x 的取值范围；

（3）因为两三角形有公共边，分两种情况讨论，① $\triangle PMF \cong \triangle PMG$ ，② $\triangle PMF \sim \triangle PGM$ ，分别求出 x 的值即可.

【解答】解：（1）过点 A 作 $AN \perp BC$ 于点 N ，交 DE 于点 H ，则点 H 为 $\triangle ABC$ 的重心，



由题意得 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

$$\text{故 } AN = \frac{1}{2}BC = 3,$$

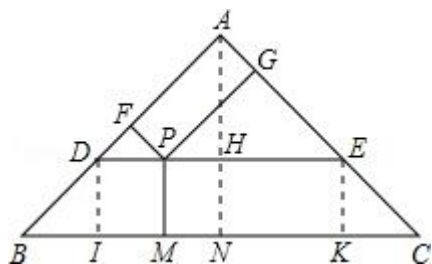
$$\text{由重心的性质可得：} \frac{AH}{HN} = 2,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AH}{AN} = \frac{2}{3},$$

$$\text{故 } HN = \frac{1}{3}AN = 1, \quad DE = 4,$$

即可得 PM 的长为 1.

（2）过点 D 作 $DI \perp BC$ 于 I ，过点 E 作 $EK \perp BC$ 于点 K ，



则 $BI = DI = PM = 1$,

设 $BM = x$, 则 $IM = DP = x - 1$, $PE = 4 - DP = 5 - x$,

易得 $\triangle FDP$ 、 $\triangle GPE$ 均为等腰直角三角形,

$$\therefore PF = \frac{x-1}{\sqrt{2}}, \quad PG = \frac{5-x}{\sqrt{2}},$$

$$\text{则 } y = PF \times PG = \frac{x-1}{\sqrt{2}} \times \frac{5-x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} (x-1)(5-x) = \frac{-x^2+6x-5}{2},$$

由图形可得点 M 处于 $I-K$ 之间, 故可得: $1 < x < 5$.

综上可得 $y = \frac{-x^2+6x-5}{2}$, ($1 < x < 5$).

(3) ①当 $\triangle PMF \cong \triangle PMG$ 时, 此时点 P 与点 H 重合, $BM = BN = 3$;

$$\text{②当 } \triangle PMF \sim \triangle PMG \text{ 时, } \frac{PF}{PM} = \frac{PM}{PG}, \text{ 即 } \frac{\frac{x-1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\frac{5-x}{\sqrt{2}}},$$

$$\text{整理得: } \frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5-x},$$

$$\text{解得 } x = 3 \pm \sqrt{2}.$$

综上可得当 $\triangle PMF$ 与 $\triangle PMG$ 相似时, 求 BM 的长为 $3, 3 \pm \sqrt{2}$.

【点评】 本题考查了相似形综合题, 涉及了等腰直角三角形的性质、矩形的面积及三角形重心的性质, 注意结合图形进行解答, 观察图形得出点 M 运动的范围, 难度较大.