

2013 年上海市普陀区中考数学一模试卷

一.选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)

1. (4 分) 如果 $x:y=2:3$ ，则下列各式不成立的是 ()

A. $\frac{x+y}{y}=\frac{5}{3}$ B. $\frac{y-x}{y}=\frac{1}{3}$ C. $\frac{x}{2y}=\frac{1}{3}$ D. $\frac{x+1}{y+1}=\frac{3}{4}$

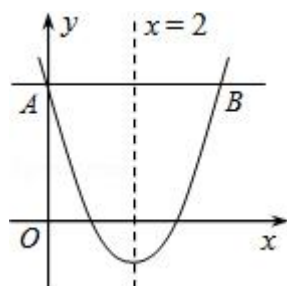
2. (4 分) 某一时刻，身高 $1.6m$ 的小明在阳光下的影长是 $0.4m$ ，同一时刻同一地点测得某旗杆的影长是 $5m$ ，则该旗杆的高度是 ()

A. $1.25m$ B. $10m$ C. $20m$ D. $8m$

3. (4 分) 若二次函数 $y=x^2+bx+5$ 配方后为 $y=(x-2)^2+k$ ，则 b 、 k 的值分别为 ()

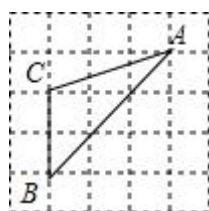
A. $0, 5$ B. $0, 1$ C. $-4, 5$ D. $-4, 1$

4. (4 分) 如图，已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=2$ ，点 A, B 均在抛物线上，且 AB 与 x 轴平行，其中点 A 的坐标为 $(0, 3)$ ，则点 B 的坐标为 ()



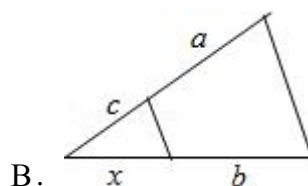
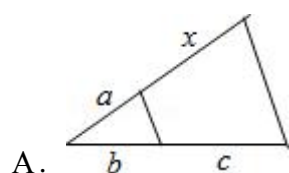
A. $(2, 3)$ B. $(3, 2)$ C. $(3, 3)$ D. $(4, 3)$

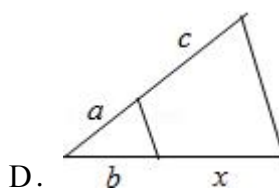
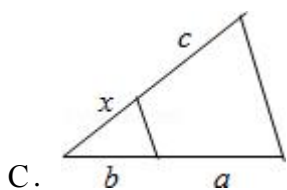
5. (4 分) 如图， $\triangle ABC$ 的顶点是正方形网格的格点，则 $\sin A$ 的值为 ()



A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. (4 分) 已知线段 a, b, c ，求作第四比例线段 x ，下列作图正确的是 ()





二.填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 如果在比例尺为 1: 1 000 000 的地图上, A 、 B 两地的图上距离是 3.4 厘米, 那么 A 、 B 两地的实际距离是_____千米.

8. (4 分) 把长为 10cm 的线段进行黄金分割, 那么较长线段长为_____cm.

9. (4 分) 如果两个相似三角形的对应角平分线之比为 1: 4, 那么它们的周长之比是_____.

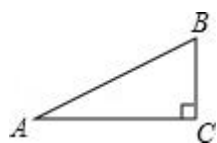
10. (4 分) 如果抛物线 $y = (k - 1)x^2 + 4x$ 的开口向下, 那么 k 的取值范围是_____.

11. (4 分) 把抛物线 $y = x^2$ 的图象向右平移 3 个单位, 再向下平移 2 个单位, 所得图象的解析式为_____.

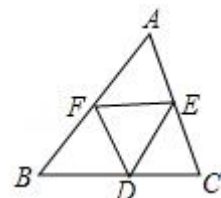
12. (4 分) 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 中, 函数 y 与自变量 x 的部分对应值如下表, 则 m 的值为_____.

x	- 2	- 1	0	1	2	3	4
y	7	2	- 1	- 2	m	2	7

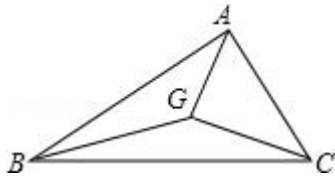
13. (4 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AB = 4$, 则 BC = _____.



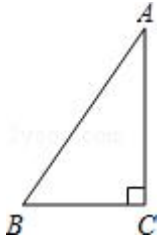
14. (4 分) 如图, 点 D 、 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 三边的中点, 那么与 $\overrightarrow{DF}$ 相等的向量是_____.



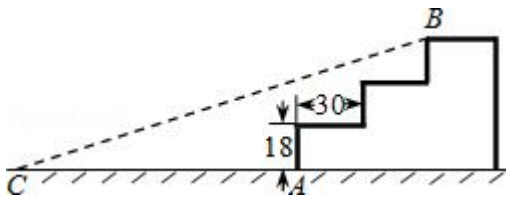
15. (4 分) 如图, G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $AG \perp GC$, $AC = 4$, 则 BG 的长为_____.



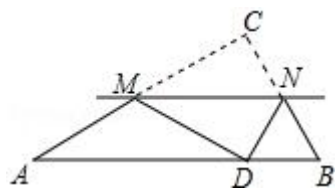
16. (4分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 4\text{cm}$, $\tan B = \frac{3}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是_____ cm^2 .



17. (4分) 如图, 某公园入口处原有三级台阶, 每级台阶高为 18cm , 深为 30cm , 为方便残疾人士, 拟将台阶改为斜坡, 设台阶的起点为 A , 斜坡的起始点为 C , 现设计斜坡 BC 的坡度 $i = 1:5$, 则 AC 的长度是_____ cm .



18. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 沿直线 MN 翻折后, 顶点 C 恰好落在 AB 边上的点 D 处, 已知 $MN \parallel AB$, $MC = 6$, $NC = 2\sqrt{3}$, 那么四边形 $MABN$ 的面积是_____.



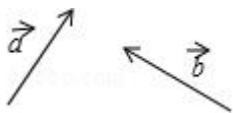
三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $\cos 30^\circ \cdot (\sin 60^\circ)^2 - \frac{\cot 30^\circ}{\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ}$.

20. (10分) 如图, 已知两个不平行的向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$. 先化简, 再求作:

$$(4\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}) - (2\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b})$$

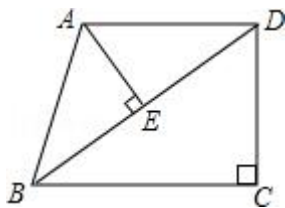
(不要求写作法, 但要指出图中表示结论的向量)



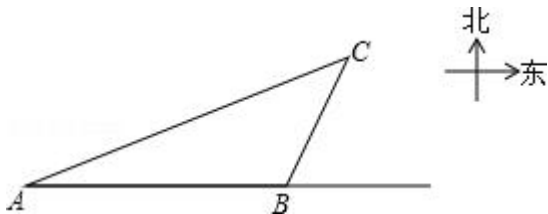
21. (10 分) 已知: 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle C = 90^\circ$, $AB = AD = 25$, $BC = 32$. 连接 BD , $AE \perp BD$ 垂足为 E .

(1) 求证: $\triangle ABE \sim \triangle DBC$;

(2) 求线段 AE 的长.



22. (10 分) 一艘轮船自西向东航行, 在 A 处测得东偏北 21.3° 方向有一座小岛 C , 继续向东航行 60 海里到达 B 处, 测得小岛 C 此时在轮船的东偏北 63.5° 方向上. 之后, 轮船继续向东航行多少海里, 距离小岛 C 最近? (参考数据: $\sin 21.3^\circ \approx \frac{9}{25}$, $\tan 21.3^\circ \approx \frac{2}{5}$, $\sin 63.5^\circ \approx \frac{9}{10}$, $\tan 63.5^\circ \approx 2$)

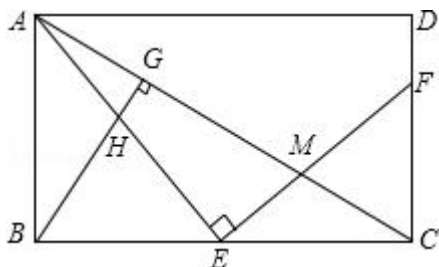


23. (12 分) 如图, E 是矩形 $ABCD$ 的边 BC 上一点, $EF \perp AE$, EF 分别交 AC , CD 于点 M , F , $BG \perp AC$, 垂足为 G , BG 交 AE 于点 H .

(1) 求证: $\triangle ABE \sim \triangle ECF$;

(2) 找出与 $\triangle ABH$ 相似的三角形, 并证明;

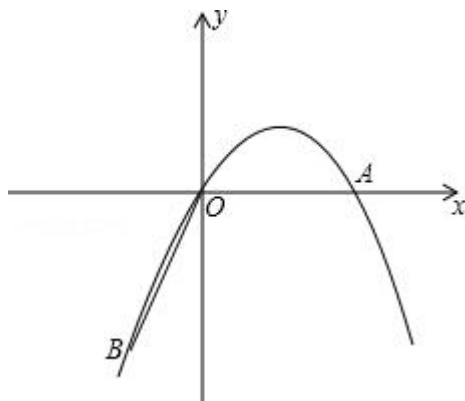
(3) 若 E 是 BC 中点, $BC = 2AB$, $AB = 2$, 求 EM 的长.



24. (12 分) 如图, 点 A 在 x 轴上, $OA = 4$, 将线段 OA 绕点 O 顺时针旋转 120° 至 OB 的位置.

(1) 求点 B 的坐标;

- (2) 求经过点 A 、 O 、 B 的抛物线的解析式；
- (3) 在此抛物线的对称轴上，是否存在点 P ，使得以点 P 、 O 、 B 为顶点的三角形是等腰三角形？若存在，求点 P 的坐标；若不存在，说明理由．

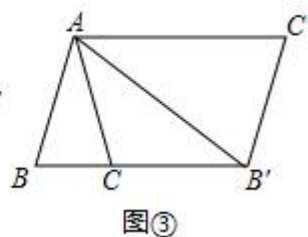
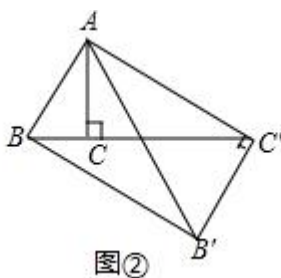
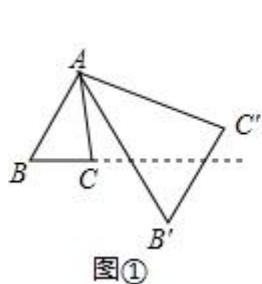


25. (14 分) 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转 θ 度，并使各边长变为原来的 n 倍，得 $\triangle AB'C'$ ，即如图①，我们将这种变换记为 $[\theta, n]$ ．

(1) 如图①，对 $\triangle ABC$ 作变换 $[60^\circ, \sqrt{3}]$ 得 $\triangle AB'C'$ ，则 $S_{\triangle AB'C'} : S_{\triangle ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；直线 BC 与直线 $B'C'$ 所夹的锐角为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 度；

(2) 如图②， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，对 $\triangle ABC$ 作变换 $[\theta, n]$ 得 $\triangle AB'C'$ ，使点 B 、 C 、 C' 在同一直线上，且四边形 $ABB'C'$ 为矩形，求 θ 和 n 的值；

(3) 如图③， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 36^\circ$ ， $BC = 1$ ，对 $\triangle ABC$ 作变换 $[\theta, n]$ 得 $\triangle AB'C'$ ，使点 B 、 C 、 B' 在同一直线上，且四边形 $ABB'C'$ 为平行四边形，求 θ 和 n 的值．



2013 年上海市普陀区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一.选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. (4 分) 如果 $x: y = 2: 3$, 则下列各式不成立的是 ()

A. $\frac{x+y}{y} = \frac{5}{3}$

B. $\frac{y-x}{y} = \frac{1}{3}$

C. $\frac{x}{2y} = \frac{1}{3}$

D. $\frac{x+1}{y+1} = \frac{3}{4}$

【考点】S1: 比例的性质.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据比例的基本性质, 可分别设出 x 和 y , 分别代入各选项进行计算即可得出结果.

【解答】解: 可设 $x = 2k$, $y = 3k$. 通过代入计算, 进行约分, A, B, C 都正确;
 D 不能实现约分, 故错误.

故选: D .

【点评】已知几个量的比值时, 常用的解法是: 设一个未知数, 把题目中的几个量用所设的未知数表示出来, 实现约分.

2. (4 分) 某一时刻, 身高 $1.6m$ 的小明在阳光下的影长是 $0.4m$, 同一时刻同一地点测得某旗杆的影长是 $5m$, 则该旗杆的高度是 ()

A. $1.25m$

B. $10m$

C. $20m$

D. $8m$

【考点】SA: 相似三角形的应用.

【专题】11: 计算题.

【分析】设该旗杆的高度为 xm , 根据三角形相似的性质得到同一时刻同一地点物体的高度与其影长的比相等, 即有 $1.6: 0.4 = x: 5$, 然后解方程即可.

【解答】解: 设该旗杆的高度为 xm , 根据题意得, $1.6: 0.4 = x: 5$,
解得 $x = 20 (m)$.

即该旗杆的高度是 $20m$.

故选: C .

【点评】本题考查了三角形相似的性质: 相似三角形对应边的比相等.

3. (4 分) 若二次函数 $y = x^2 + bx + 5$ 配方后为 $y = (x - 2)^2 + k$, 则 b, k 的值分别为 ()

- A. 0, 5 B. 0, 1 C. -4, 5 D. -4, 1

【考点】H9: 二次函数的三种形式.

【分析】可将 $y = (x - 2)^2 + k$ 的右边运用完全平方公式展开, 再与 $y = x^2 + bx + 5$ 比较, 即可得出 b 、 k 的值.

【解答】解: $\because y = (x - 2)^2 + k = x^2 - 4x + 4 + k = x^2 - 4x + (4 + k)$,

又 $\because y = x^2 + bx + 5$,

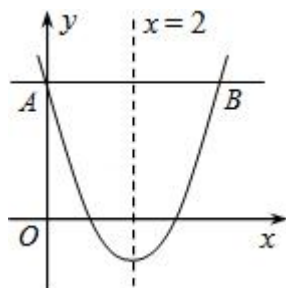
$$\therefore x^2 - 4x + (4 + k) = x^2 + bx + 5,$$

$$\therefore b = -4, k = 1.$$

故选: D.

【点评】本题实际上考查了两个多项式相等的条件: 它们同类项的系数对应相等.

4. (4 分) 如图, 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = 2$, 点 A , B 均在抛物线上, 且 AB 与 x 轴平行, 其中点 A 的坐标为 $(0, 3)$, 则点 B 的坐标为 ()



- A. $(2, 3)$ B. $(3, 2)$ C. $(3, 3)$ D. $(4, 3)$

【考点】H3: 二次函数的性质.

【专题】15: 综合题.

【分析】已知抛物线的对称轴为 $x = 2$, 知道 A 的坐标为 $(0, 3)$, 由函数的对称性知 B 点坐标.

【解答】解: 由题意可知抛物线的 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = 2$,

$\because$ 点 A 的坐标为 $(0, 3)$, 且 AB 与 x 轴平行,

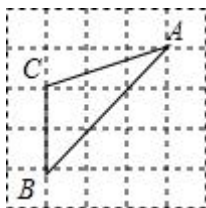
可知 A 、 B 两点为对称点,

$\therefore B$ 点坐标为 $(4, 3)$

故选: D.

【点评】本题主要考查二次函数的对称性.

5. (4 分) 如图, $\triangle ABC$ 的顶点是正方形网格的格点, 则 $\sin A$ 的值为 ()



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【考点】 KQ: 勾股定理; T1: 锐角三角函数的定义.

【分析】 直接根据题意构造直角三角形, 进而利用勾股定理得出 DC , AC 的长, 再利用锐角三角函数关系求出答案.

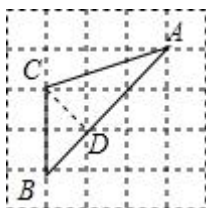
【解答】 解: 如图所示: 连接 DC ,

由网格可得出 $\angle CDA = 90^\circ$,

则 $DC = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{10}$,

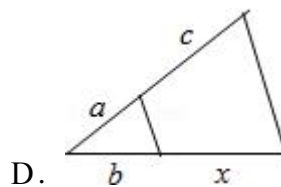
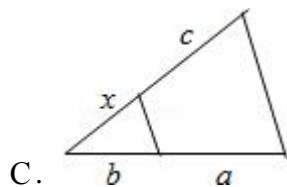
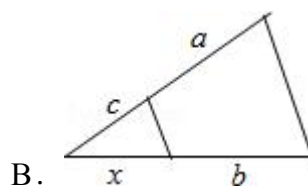
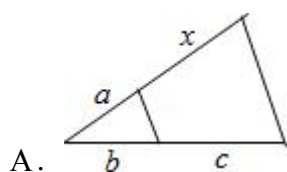
故 $\sin A = \frac{DC}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

故选: B.



【点评】 此题主要考查了勾股定理以及锐角三角函数关系, 正确构造直角三角形是解题关键.

6. (4分) 已知线段 a 、 b 、 c , 求作第四比例线段 x , 下列作图正确的是 ()



【考点】 S4: 平行线分线段成比例.

【分析】 根据第四比例线段的定义列出比例式, 再根据平行线分线段成比例定理对各选项图形列出比例式即可得解.

【解答】解：∵线段 x 为线段 a 、 b 、 c 的第四比例线段，

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{x},$$

A、作出的为 $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$ ，故本选项错误；

B、C、线段 x 无法先作出，故本选项错误；

D、作出的为 $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ ，故本选项正确．

故选：D．

【点评】本题考查了平行线分线段成比例定理，主要考查了第四比例线段的作法，要熟练掌握并灵活运用．

二.填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）如果在比例尺为 1：1 000 000 的地图上， A 、 B 两地的图上距离是 3.4 厘米，那么 A 、 B 两地的实际距离是 34 千米．

【考点】S2：比例线段．

【专题】11：计算题．

【分析】实际距离 = 图上距离：比例尺，根据题意代入数据可直接得出实际距离．

【解答】解：根据题意， $3.4 \div \frac{1}{1000000} = 3400000$ 厘米 = 34 千米．

即实际距离是 34 千米．

故答案为：34．

【点评】本题考查了比例线段的知识，注意掌握比例线段的定义及比例尺，并能够灵活运用，同时要注意单位的转换．

8.（4 分）把长为 10cm 的线段进行黄金分割，那么较长线段长为 $5\sqrt{5} - 5$ cm．

【考点】S3：黄金分割．

【专题】11：计算题．

【分析】把一条线段分成两部分，使其中较长的线段为全线段与较短线段的比例中项，这样的线段分割叫做黄金分割，他们的比值（ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ）叫做黄金比．

【解答】解：∵将长度为 10cm 的线段进行黄金分割，

$$\therefore \text{较长的线段} = 10 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = (5\sqrt{5} - 5) \text{ cm}.$$

【点评】应该识记黄金分割的公式：较短的线段 = 原线段的 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ，较长的线段

$$= \text{原线段的} \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

9. (4分) 如果两个相似三角形的对应角平分线之比为 1:4, 那么它们的周长之比是 1:4.

【考点】S7: 相似三角形的性质.

【专题】2B: 探究型.

【分析】直接根据相似三角形的性质进行解答.

【解答】解: $\because$ 两个相似三角形的对应角平分线之比为 1:4,

$\therefore$ 那么它们的周长之比是 1:4.

故答案为: 1:4.

【点评】本题考查的是相似三角形的性质, 即相似三角形对应边的比、对应角平分线的比、周长的比等于相似比.

10. (4分) 如果抛物线 $y = (k-1)x^2 + 4x$ 的开口向下, 那么 k 的取值范围是 $k < 1$.

【考点】H3: 二次函数的性质.

【专题】11: 计算题.

【分析】据二次函数的性质可知, 当抛物线开口向上时, 二次项系数 $k-1 > 0$.

【解答】解: 因为抛物线 $y = (k-1)x^2 + 4x$ 的开口向下,

所以 $k-1 < 0$, 即 $k < 1$,

故答案为 $k < 1$.

【点评】主要考查了函数的单调性. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$), 当 $a > 0$ 时, 在对称轴左侧 y 随 x 的增大而减小, 在对称轴右侧 y 随 x 的增大而增大; 当 $a < 0$ 时, 在对称轴左侧 y 随 x 的增大而增大, 在对称轴右侧 y 随 x 的增大而减小. 正比例函数中当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大, $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小.

11. (4分) 把抛物线 $y = x^2$ 的图象向右平移 3 个单位, 再向下平移 2 个单位, 所得图象的解析式为 $y = (x-3)^2 - 2$.

【考点】H6: 二次函数图象与几何变换.

【分析】先确定出原抛物线的顶点坐标, 然后根据向右平移横坐标加, 向下平移纵坐标减求出新图象的顶点坐标, 然后写出即可.

【解答】解：抛物线 $y = x^2$ 的顶点坐标为 $(0, 0)$ ，
向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位后的图象的顶点坐标为 $(3, -2)$ ，
所以，所得图象的解析式为 $y = (x - 3)^2 - 2$ 。

故答案为： $y = (x - 3)^2 - 2$ 。

【点评】本题主要考查的是函数图象的平移，根据平移规律“左加右减，上加下减”利用顶点的变化确定图形的变化是解题的关键。

12. (4 分) 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 中，函数 y 与自变量 x 的部分对应值如下表，
则 m 的值为 -1。

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	7	2	-1	-2	m	2	7

【考点】H8：待定系数法求二次函数解析式。

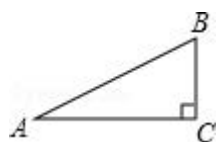
【专题】16：压轴题；27：图表型。

【分析】二次函数的图象具有对称性，从函数值来看，函数值相等的点就是抛物线的对称点，由此可推出抛物线的对称轴，根据对称性求 m 的值。

【解答】解：根据图表可以得到，
点 $(-2, 7)$ 与 $(4, 7)$ 是对称点，
点 $(-1, 2)$ 与 $(3, 2)$ 是对称点，
 $\therefore$ 函数的对称轴是： $x = 1$ ，
 $\therefore$ 横坐标是 2 的点与 $(0, -1)$ 是对称点，
 $\therefore m = -1$ 。

【点评】正确观察图象，能够得到函数的对称轴，联想到对称关系是解题的关键。

13. (4 分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $AB = 4$ ，则 $BC =$ 2。



【考点】KO：含 30 度角的直角三角形。

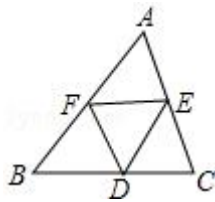
【分析】根据含 30 度角的直角三角形的性质直接求解即可。

【解答】解：根据含 30 度角的直角三角形的性质可知： $BC = \frac{1}{2}AB = 2$ 。

故答案为：2.

【点评】 本题考查了含 30° 角的直角三角形的性质，比较容易解答，要求熟记 30° 角所对的直角边是斜边的一半.

14. (4 分) 如图，点 D 、 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 三边的中点，那么与 $\overrightarrow{DF}$ 相等的向量是 $\overrightarrow{EA}$ 和 $\overrightarrow{CE}$.



【考点】 KX: 三角形中位线定理; LM: *平面向量.

【分析】 由点 D 、 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 三边的中点，根据三角形中位线的性质，即可得 $DF \parallel AC$ ， $DF = CE = EA = \frac{1}{2}CA$ ，从而可得与 $\overrightarrow{DF}$ 相等的向量.

【解答】 解： $\because D$ 、 F 分别是 BC 、 BA 的中点，

$\therefore DF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

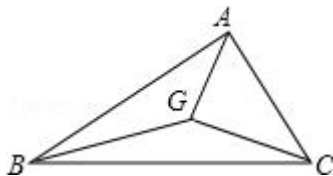
$\therefore DF \parallel AC$ ， $DF = CE = EA = \frac{1}{2}CA$ ，

故与 $\overrightarrow{DF}$ 相等的向量是 $\overrightarrow{EA}$ 和 $\overrightarrow{CE}$.

故答案为： $\overrightarrow{EA}$ 和 $\overrightarrow{CE}$.

【点评】 本题考查了向量及三角形的中位线定理，属于基础题，解答本题的关键是熟练掌握三角形中位线的性质及向量相等的含义.

15. (4 分) 如图， G 是 $\triangle ABC$ 的重心， $AG \perp GC$ ， $AC = 4$ ，则 BG 的长为 4.



【考点】 K5: 三角形的重心.

【专题】 16: 压轴题.

【分析】 延长 BG 交 AC 于 D 点， G 是 $\triangle ABC$ 的重心，故 BD 为 $\triangle ABC$ 的中线；

又 $AG \perp GC$ ，故 GD 为 $\text{Rt}\triangle AGC$ 斜边上的中线，根据直角三角形斜边上中线

的性质可知 $GD = \frac{1}{2}AC$ ，根据重心的性质， $BG = 2GD = AC$ 。

【解答】解：延长 BG 交 AC 于 D 点，

$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore BD$ 为 $\triangle ABC$ 的中线；

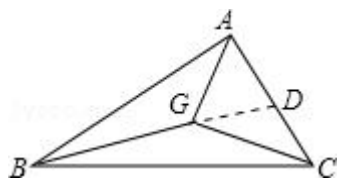
又 $\because AG \perp GC$ ，

$\therefore GD$ 为 $\text{Rt}\triangle AGC$ 斜边上的中线，

$\therefore GD = \frac{1}{2}AC$ ，

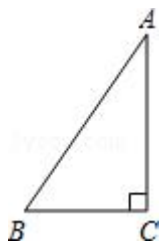
$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore BG = 2GD = AC = 4$ 。



【点评】本题考查了重心与三角形中线的关系，直角三角形斜边上的中线的性质。

16. (4分) 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 4\text{cm}$ ， $\tan B = \frac{3}{2}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积是 12 cm^2 。



【考点】T7：解直角三角形。

【专题】16：压轴题。

【分析】根据锐角三角函数关系 $\tan B = \frac{3}{2} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{4}$ ，求出 AC 的长，再利用直角三角形面积求法求出即可。

【解答】解： $\because \triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 4\text{cm}$ ， $\tan B = \frac{3}{2}$ ，

$$\therefore \tan B = \frac{3}{2} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{4},$$

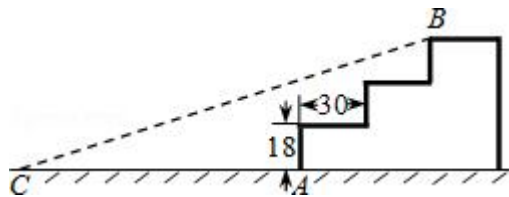
$$\therefore AC = 6,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积是: } \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12.$$

故答案为：12.

【点评】此题主要考查了解直角三角形，利用已知锐角三角函数关系求出 AC 的长是解决问题的关键.

17. (4分) 如图，某公园入口处原有三级台阶，每级台阶高为 18cm ，深为 30cm ，为方便残疾人士，拟将台阶改为斜坡，设台阶的起点为 A ，斜坡的起始点为 C ，现设计斜坡 BC 的坡度 $i = 1:5$ ，则 AC 的长度是 210 cm .



【考点】T9：解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

【分析】首先过点 B 作 $BD \perp AC$ 于 D ，根据题意即可求得 AD 与 BD 的长，然后由斜坡 BC 的坡度 $i = 1:5$ ，求得 CD 的长，继而求得答案.

【解答】解：过点 B 作 $BD \perp AC$ 于 D ，

根据题意得： $AD = 2 \times 30 = 60$ (cm)， $BD = 18 \times 3 = 54$ (cm)，

$\because$ 斜坡 BC 的坡度 $i = 1:5$ ，

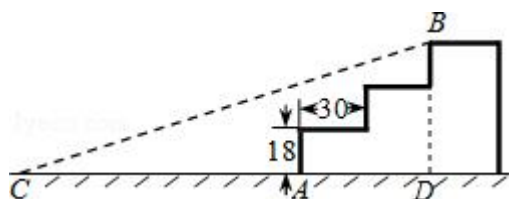
$\therefore BD:CD = 1:5$ ，

$\therefore CD = 5BD = 5 \times 54 = 270$ (cm)，

$\therefore AC = CD - AD = 270 - 60 = 210$ (cm).

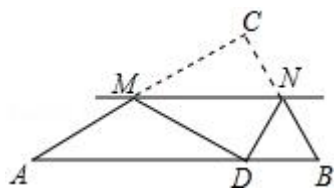
$\therefore AC$ 的长度是 210cm .

故答案为：210.



【点评】此题考查了解直角三角形的应用：坡度问题. 此题难度适中，注意掌握坡度的定义，注意数形结合思想的应用与辅助线的作法.

18. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 沿直线 MN 翻折后，顶点 C 恰好落在 AB 边上的点 D 处，已知 $MN \parallel AB$ ， $MC = 6$ ， $NC = 2\sqrt{3}$ ，那么四边形 $MABN$ 的面积是 $18\sqrt{3}$.



【考点】PB：翻折变换（折叠问题）.

【分析】首先连接 CD ，交 MN 于 E ，由将 $\triangle ABC$ 沿直线 MN 翻折后，顶点 C 恰好落在 AB 边上的点 D 处，即可得 $MN \perp CD$ ，且 $CE = DE$ ，又由 $MN \parallel AB$ ，易得 $\triangle CMN \sim \triangle CAB$ ，根据相似三角形的面积比等于相似比的平方，相似三角形对应高的比等于相似比，即可得 $\frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle CAB}} = \left(\frac{CE}{CD}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ，又由 $MC = 6$ ， $NC = 2\sqrt{3}$ ，即可求得四边形 $MABN$ 的面积.

【解答】解：连接 CD ，交 MN 于 E ，

$\because$ 将 $\triangle ABC$ 沿直线 MN 翻折后，顶点 C 恰好落在 AB 边上的点 D 处，

$\therefore MN \perp CD$ ，且 $CE = DE$ ，

$\therefore CD = 2CE$ ，

$\because MN \parallel AB$ ，

$\therefore CD \perp AB$ ，

$\therefore \triangle CMN \sim \triangle CAB$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle CAB}} = \left(\frac{CE}{CD}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$\because$ 在 $\triangle CMN$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $MC = 6$ ， $NC = 2\sqrt{3}$ ，

$$\therefore S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2}CM \cdot CN = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle CAB} = 4S_{\triangle CMN} = 4 \times 6\sqrt{3} = 24\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{四边形 } MABN} = S_{\triangle CAB} - S_{\triangle CMN} = 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}.$$

故答案为： $18\sqrt{3}$.

【点评】此题考查了折叠的性质、相似三角形的判定与性质以及直角三角形的性质，此题难度适中，解此题的关键是注意折叠中的对应关系，注意数形结合思想的应用.

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10分) 计算: $\cos 30^\circ \cdot (\sin 60^\circ)^2 - \frac{\cot 30^\circ}{\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ}$.

【考点】T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】将 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 分别代入,

然后化简、合并即可得出答案.

【解答】解: 原式 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \sqrt{3}$$

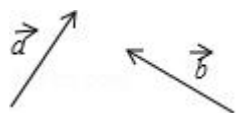
$$= -\frac{5\sqrt{3}}{8}.$$

【点评】本题考查了特殊角的三角函数值, 属于基础题, 解答本题的关键是熟练记忆一些特殊角的三角函数值.

20. (10分) 如图, 已知两个不平行的向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$. 先化简, 再求作:

$$(4\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}) - (2\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b})$$

(不要求写作法, 但要指出图中表示结论的向量)



【考点】LM: *平面向量.

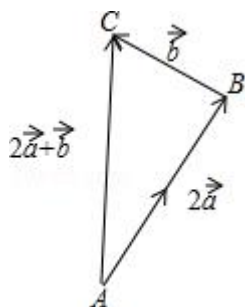
【专题】13: 作图题.

【分析】首先将原式化简, 再根据向量的意义画图即可.

【解答】解: 原式 $= 4\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - 2\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

$$= 2\vec{a} + \vec{b},$$

$$\therefore \vec{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}.$$

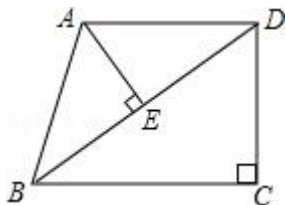


【点评】此题考查向量的知识．注意平行四边形法则的应用．

21. (10分) 已知：在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = AD = 25$ ， $BC = 32$ ．连接 BD ， $AE \perp BD$ 垂足为 E ．

(1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ ；

(2) 求线段 AE 的长．



【考点】KQ：勾股定理；LI：直角梯形；S9：相似三角形的判定与性质．

【专题】16：压轴题．

【分析】(1) 由等腰三角形的性质可知 $\angle ABD = \angle ADB$ ，由 $AD \parallel BC$ 可知， $\angle ADB = \angle DBC$ ，由此可得 $\angle ABD = \angle DBC$ ，又 $\because \angle AEB = \angle C = 90^\circ$ ，利用“AA”可证 $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ ；

(2) 由等腰三角形的性质可知， $BD = 2BE$ ，根据 $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ ，利用相似比求 BE ，在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，利用勾股定理求 AE ．

【解答】(1) 证明： $\because AB = AD = 25$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC,$$

$$\because AE \perp BD,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DBC;$$

(2) 解： $\because AB = AD$ ，又 $AE \perp BD$ ，

$$\therefore BE = DE,$$

$$\therefore BD = 2BE,$$

由 $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ ，

$$\text{得 } \frac{AB}{BD} = \frac{BE}{BC},$$

$$\because AB = AD = 25, BC = 32,$$

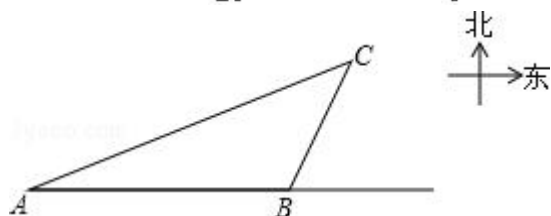
$$\therefore \frac{25}{2BE} = \frac{BE}{32},$$

$$\therefore BE = 20,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15.$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质. 关键是要懂得找相似三角形, 利用相似三角形的性质及勾股定理解题.

22. (10 分) 一艘轮船自西向东航行, 在 A 处测得东偏北 21.3° 方向有一座小岛 C , 继续向东航行 60 海里到达 B 处, 测得小岛 C 此时在轮船的东偏北 63.5° 方向上. 之后, 轮船继续向东航行多少海里, 距离小岛 C 最近? (参考数据: $\sin 21.3^\circ \approx \frac{9}{25}$, $\tan 21.3^\circ \approx \frac{2}{5}$, $\sin 63.5^\circ \approx \frac{9}{10}$, $\tan 63.5^\circ \approx 2$)



【考点】 TB: 解直角三角形的应用 - 方向角问题.

【专题】 11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】 过 C 作 AB 的垂线, 交直线 AB 于点 D , 分别在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 与 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中用式子表示 CD , 从而求得 BD 的值, 即离小岛 C 最近的距离.

【解答】 解: 过 C 作 AB 的垂线, 交直线 AB 于点 D ,

得到 $\text{Rt}\triangle ACD$ 与 $\text{Rt}\triangle BCD$.

设 $CD = x$ 海里, 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\tan \angle CBD = \frac{CD}{BD}$,

$$\therefore BD = \frac{x}{\tan 63.5^\circ},$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\tan A = \frac{CD}{AD}$,

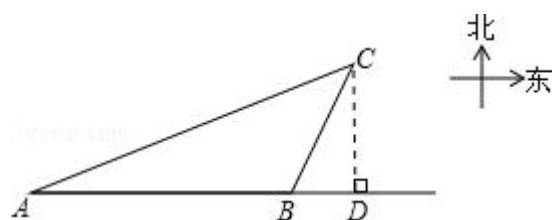
$$\therefore AD = \frac{x}{\tan 21.3^\circ},$$

$$\therefore AD - BD = AB, \text{ 即 } \frac{x}{\tan 21.3^\circ} - \frac{x}{\tan 63.5^\circ} = 60,$$

解得, $x = 30$.

$$BD = \frac{30}{\tan 63.5^\circ} = 15$$

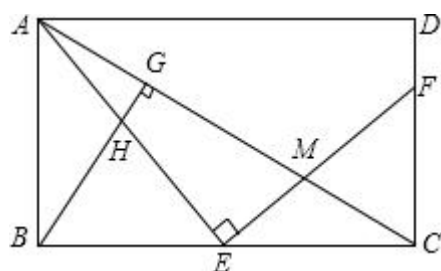
答：轮船继续向东航行 15 海里，距离小岛 C 最近．



【点评】解一般三角形，求三角形的边或高的问题一般可以转化为解直角三角形的问题，解决的方法就是作高线．

23. (12 分) 如图， E 是矩形 $ABCD$ 的边 BC 上一点， $EF \perp AE$ ， EF 分别交 AC ， CD 于点 M ， F ， $BG \perp AC$ ，垂足为 G ， BG 交 AE 于点 H ．

- (1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle ECF$ ；
- (2) 找出与 $\triangle ABH$ 相似的三角形，并证明；
- (3) 若 E 是 BC 中点， $BC = 2AB$ ， $AB = 2$ ，求 EM 的长．



【考点】LB：矩形的性质；S9：相似三角形的判定与性质；T7：解直角三角形．

【专题】16：压轴题．

【分析】(1) 由四边形 $ABCD$ 是矩形，可得 $\angle ABE = \angle ECF = 90^\circ$ ，又由 $EF \perp AE$ ，利用同角的余角相等，可得 $\angle BAE = \angle CEF$ ，然后利用有两组角对应相等的两个三角形相似，即可证得： $\triangle ABE \sim \triangle ECF$ ；

(2) 由 $BG \perp AC$ ，易证得 $\angle ABH = \angle ECM$ ，又由 (1) 中 $\angle BAH = \angle CEM$ ，即可证得 $\triangle ABH \sim \triangle ECM$ ；

(3) 首先作 $MR \perp BC$ ，垂足为 R ，由 $AB : BC = MR : RC = 1 : 2$ ， $\angle AEB = 45^\circ$ ，即可求得 MR 的长，又由 $EM = \frac{MR}{\sin 45^\circ}$ ，即可求得答案．

【解答】(1) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle ABE = \angle ECF = 90^\circ .$$

$$\because AE \perp EF, \angle AEB + \angle FEC = 90^\circ .$$

$$\therefore \angle AEB + \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CEF,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ECF;$$

$$(2) \triangle ABH \sim \triangle ECM.$$

证明: $\because BG \perp AC$,

$$\therefore \angle ABG + \angle BAG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABH = \angle ECM,$$

由(1)知, $\angle BAH = \angle CEM$,

$$\therefore \triangle ABH \sim \triangle ECM;$$

(3) 解: 作 $MR \perp BC$, 垂足为 R ,

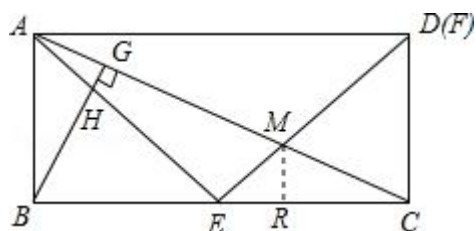
$$\because AB = BE = EC = 2,$$

$$\therefore AB : BC = MR : RC = \frac{1}{2}, \angle AEB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle MER = 45^\circ, CR = 2MR,$$

$$\therefore MR = ER = \frac{1}{3}EC = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle EMR \text{ 中, } EM = \frac{MR}{\sin 45^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



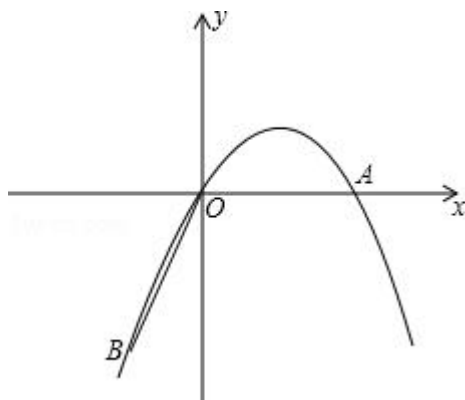
【点评】 此题考查了矩形的性质, 直角三角形的性质、相似三角形的判定与性质以及三角函数等知识. 此题难度适中, 注意数形结合思想的应用, 注意掌握有两组角对应相等的两个三角形相似定理的应用.

24. (12分) 如图, 点 A 在 x 轴上, $OA = 4$, 将线段 OA 绕点 O 顺时针旋转 120° 至 OB 的位置.

(1) 求点 B 的坐标;

(2) 求经过点 A 、 O 、 B 的抛物线的解析式;

(3) 在此抛物线的对称轴上, 是否存在点 P , 使得以点 P 、 O 、 B 为顶点的三角形是等腰三角形? 若存在, 求点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【专题】 16: 压轴题; 32: 分类讨论.

【分析】 方法一:

(1) 首先根据 OA 的旋转条件确定 B 点位置, 然后过 B 做 x 轴的垂线, 通过构建直角三角形和 OB 的长 (即 OA 长) 确定 B 点的坐标.

(2) 已知 O 、 A 、 B 三点坐标, 利用待定系数法求出抛物线的解析式.

(3) 根据 (2) 的抛物线解析式, 可得到抛物线的对称轴, 然后先设出 P 点的坐标, 而 O 、 B 坐标已知, 可先表示出 $\triangle OPB$ 三边的边长表达式, 然后分① $OP = OB$ 、② $OP = BP$ 、③ $OB = BP$ 三种情况分类讨论, 然后分辨是否存在符合条件的 P 点.

方法二:

(3) 用参数表示点 M 坐标, 分类讨论三种情况, 利用两点间距离公式便可求解.

(4) 列出点 M 的参数坐标, 利用 $MO = MB$ 求解. 此问也可通过求出 OB 的垂直平分线与 y 轴的交点得出 M 点.

【解答】 解: (1) 如图, 过 B 点作 $BC \perp x$ 轴, 垂足为 C , 则 $\angle BCO = 90^\circ$,

$$\because \angle AOB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 60^\circ,$$

$$\text{又} \because OA = OB = 4,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2} \times 4 = 2, \quad BC = OB \cdot \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (-2, -2\sqrt{3});$$

(2) $\because$ 抛物线过原点 O 和点 A 、 B ,

$\therefore$ 可设抛物线解析式为 $y = ax^2 + bx$,

将 $A(4, 0)$, $B(-2, -2\sqrt{3})$ 代入, 得:

$$\begin{cases} 16a + 4b = 0 \\ 4a - 2b = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a = -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ b = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$\therefore$ 此抛物线的解析式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x$;

(3) 存在;

如图, 抛物线的对称轴是直线 $x = 2$, 直线 $x = 2$ 与 x 轴的交点为 D , 设点 P 的坐标为 $(2, y)$,

①若 $OB = OP$,

则 $2^2 + |y|^2 = 4^2$,

解得 $y = \pm 2\sqrt{3}$,

当 $y = 2\sqrt{3}$ 时, 在 $\text{Rt}\triangle P'OD$ 中, $\angle P'DO = 90^\circ$, $\sin \angle P'OD = \frac{PD}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \angle P'OD = 60^\circ$,

$\therefore \angle P'OB = \angle P'OD + \angle AOB = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$,

即 P' 、 O 、 B 三点在同一直线上,

$\therefore y = 2\sqrt{3}$ 不符合题意, 舍去,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(2, -2\sqrt{3})$

②若 $OB = PB$, 则 $4^2 + |y + 2\sqrt{3}|^2 = 4^2$,

解得 $y = -2\sqrt{3}$,

故点 P 的坐标为 $(2, -2\sqrt{3})$,

③若 $OP = BP$, 则 $2^2 + |y|^2 = 4^2 + |y + 2\sqrt{3}|^2$,

解得 $y = -2\sqrt{3}$,

故点 P 的坐标为 $(2, -2\sqrt{3})$,

综上所述, 符合条件的点 P 只有一个, 其坐标为 $(2, -2\sqrt{3})$.

方法二：

(3) 设 $P(2, t)$, $O(0, 0)$, $B(-2, -2\sqrt{3})$,

$\because \triangle POB$ 为等腰三角形,

$\therefore PO = PB$, $PO = OB$, $PB = OB$,

$$(2-0)^2 + (t-0)^2 = (2+2)^2 + (t+2\sqrt{3})^2, \therefore t = -2\sqrt{3},$$

$$(2-0)^2 + (t-0)^2 = (0+2)^2 + (0+2\sqrt{3})^2, \therefore t = 2\sqrt{3} \text{ 或 } -2\sqrt{3},$$

当 $t = 2\sqrt{3}$ 时, $P(2, 2\sqrt{3})$, $O(0, 0)$, $B(-2, -2\sqrt{3})$ 三点共线故舍去,

$$(2+2)^2 + (t+2\sqrt{3})^2 = (0+2)^2 + (0+2\sqrt{3})^2, \therefore t = -2\sqrt{3},$$

$\therefore$ 符合条件的点 P 只有一个, $\therefore P(2, -2\sqrt{3})$.

方法二追加第(4)问：在(3)的条件下, $\odot M$ 为 $\triangle OBP$ 的外接圆, 求出圆心 M 的坐标.

(4) $\because$ 点 B , 点 P 关于 y 轴对称,

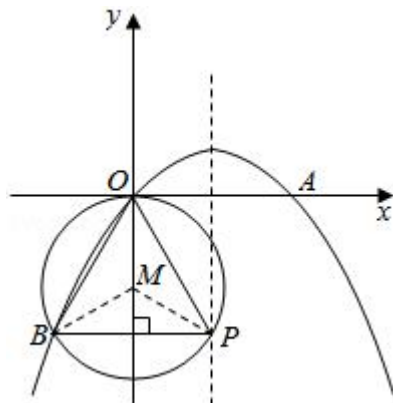
$\therefore$ 点 M 在 y 轴上, 设 $M(0, m)$,

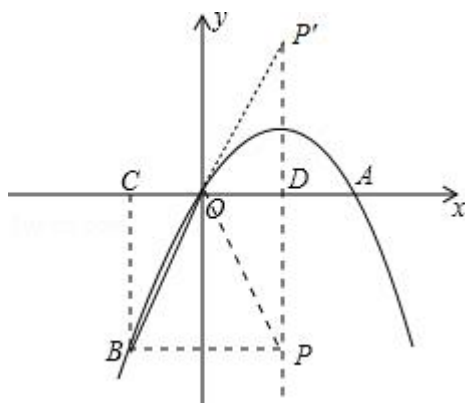
$\because \odot M$ 为 $\triangle OBP$ 的外接圆,

$\therefore MO = MB$,

$$\therefore (0-0)^2 + (m-0)^2 = (0+2)^2 + (m+2\sqrt{3})^2,$$

$$\therefore m = -\frac{4\sqrt{3}}{3}, M(0, -\frac{4\sqrt{3}}{3}).$$





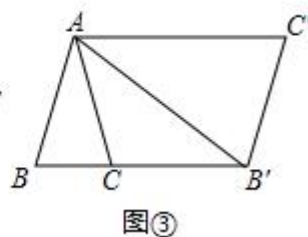
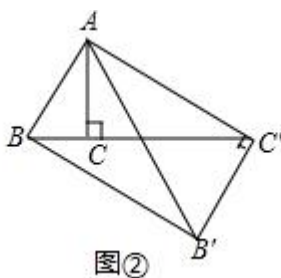
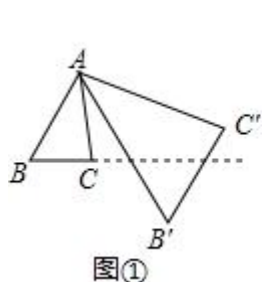
【点评】此题融合了函数解析式的确定、等腰三角形的判定等知识，综合程度较高，但属于二次函数综合题型中的常见考查形式，没有经过分类讨论而造成漏解是此类题目中易错的地方。

25. (14分) 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转 θ 度，并使各边长变为原来的 n 倍，得 $\triangle AB'C'$ ，即如图①，我们将这种变换记为 $[\theta, n]$ 。

(1) 如图①，对 $\triangle ABC$ 作变换 $[60^\circ, \sqrt{3}]$ 得 $\triangle AB'C'$ ，则 $S_{\triangle AB'C'} : S_{\triangle ABC} =$ 3:1；直线 BC 与直线 $B'C'$ 所夹的锐角为 60 度；

(2) 如图②， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，对 $\triangle ABC$ 作变换 $[\theta, n]$ 得 $\triangle AB'C'$ ，使点 B, C, C' 在同一直线上，且四边形 $ABB'C'$ 为矩形，求 θ 和 n 的值；

(3) 如图③， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 36^\circ$ ， $BC = 1$ ，对 $\triangle ABC$ 作变换 $[\theta, n]$ 得 $\triangle AB'C'$ ，使点 B, C, B' 在同一直线上，且四边形 $ABB'C'$ 为平行四边形，求 θ 和 n 的值。



【考点】A7：解一元二次方程 - 公式法；L5：平行四边形的性质；LB：矩形的性质；R2：旋转的性质；S9：相似三角形的判定与性质。

【专题】153：代数几何综合题；16：压轴题。

【分析】(1) 由旋转与相似的性质，即可得 $S_{\triangle AB'C'} : S_{\triangle ABC} = 3$ ，然后由 $\triangle ABN$ 与 $\triangle B' MN$ 中， $\angle B = \angle B'$ ， $\angle ANB = \angle B' NM$ ，可得 $\angle BMB' = \angle BAB'$ ，

即可求得直线 BC 与直线 $B'C'$ 所夹的锐角的度数;

(2) 由四边形 $ABB'C'$ 是矩形, 可得 $\angle BAC' = 90^\circ$, 然后由 $\theta = \angle CAC' = \angle BAC' - \angle BAC$, 即可求得 θ 的度数, 又由含 30° 角的直角三角形的性质, 即可求得 n 的值;

(3) 由四边形 $ABB'C'$ 是平行四边形, 易求得 $\theta = \angle CAC' = \angle ACB = 72^\circ$, 又由 $\triangle ABC \sim \triangle B'BA$, 根据相似三角形的对应边成比例, 易得 $AB^2 = CB \cdot BB' = CB(BC + CB')$, 继而求得答案.

【解答】 解: (1) 根据题意得: $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$,

$$\therefore S_{\triangle AB'C'} : S_{\triangle ABC} = \left(\frac{AB'}{AB} \right)^2 = (\sqrt{3})^2 = 3, \quad \angle B = \angle B',$$

$$\therefore \angle ANB = \angle B'NM,$$

$$\therefore \angle BMB' = \angle BAB' = 60^\circ;$$

故答案为: 3: 1, 60;

(2) $\because$ 四边形 $ABB'C'$ 是矩形,

$$\therefore \angle BAC' = 90^\circ.$$

$$\therefore \theta = \angle CAC' = \angle BAC' - \angle BAC = 90 - 30 = 60^\circ.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABB'$ 中, $\angle ABB' = 90^\circ$, $\angle BAB' = 60^\circ$,

$$\therefore \angle AB'B = 30^\circ,$$

$$\therefore n = \frac{AB'}{AB} = 2;$$

(3) $\because$ 四边形 $ABB'C'$ 是平行四边形,

$$\therefore AC' \parallel BB',$$

又 $\because \angle BAC = 36^\circ$,

$$\therefore \theta = \angle CAC' = \angle AC'B' = 72^\circ.$$

$$\therefore \angle BB'A = \angle BAC = 36^\circ, \text{ 而 } \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle B'BA,$$

$$\therefore AB : BB' = CB : AB,$$

$$\therefore AB^2 = CB \cdot BB' = CB(BC + CB'),$$

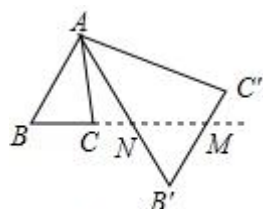
而 $CB' = AC = AB = B'C'$, $BC = 1$,

$$\therefore AB^2 = 1 (1 + AB),$$

$$\therefore AB = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\because AB > 0,$$

$$\therefore n = \frac{B'C'}{BC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$



图①

【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质、直角三角形的性质、旋转的性质、矩形的性质以及平行四边形的性质．此题综合性较强，难度较大，注意数形结合思想与方程思想的应用，注意辅助线的作法．