

2013 年上海市宝山区中考数学一模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 下列各式中，正确的是 ()

- A. $\sin 20^\circ + \sin 30^\circ = \sin 50^\circ$ B. $\sin 60^\circ = 2\sin 30^\circ$
C. $\tan 20^\circ \cdot \tan 70^\circ = 1$ D. $\cos 30^\circ < \cos 60^\circ$

2. (4 分) 下列分式方程去分母后所得结果正确的是 ()

- A. $\frac{1}{x-1} = \frac{x+2}{x+1} - 1$ 去分母得, $x+1 = (x-1)(x+2) - 1$
B. $\frac{x}{2x-5} + \frac{5}{5-2x} = 1$ 去分母得, $x+5 = 2x-5$
C. $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x}{x-2}$ 去分母得, $(x-2)^2 - x+2 = x(x+2)$
D. $\frac{2}{x+3} = \frac{1}{x-1}$ 去分母得, $2(x-1) = x+3$

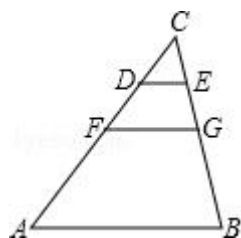
3. (4 分) 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 没有实数根, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $k > 1$ B. $k \leq 1$ C. $k < 1$ D. $k \geq 1$

4. (4 分) 下列命题正确是 ()

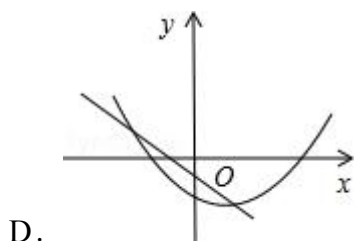
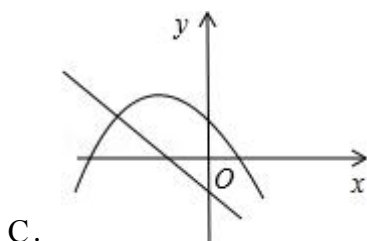
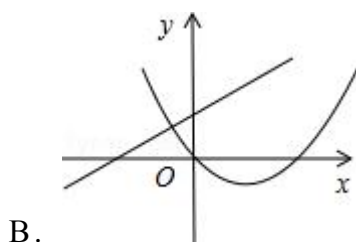
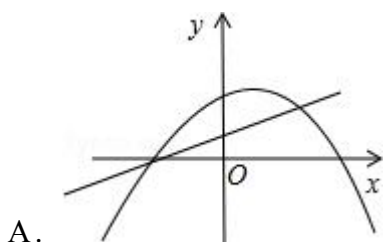
- A. 长度相等的两个非零向量相等
B. 平行向量一定在同一直线上
C. 与零向量相等的向量必定是零向量
D. 任意两个相等的非零向量的始点与终点是一平行四边形的四顶点

5. (4 分) 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel AB \parallel FG$, 且 FG 到 DE 、 AB 的距离之比为 1: 2. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 32, $\triangle CDE$ 的面积为 2, 则 $\triangle CFG$ 的面积 S 等于 ()



- A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

6. (4 分) 一次函数 $y = ax + b$ 与二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 在同一坐标系中的图象大致是 ()



二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 使 $\sqrt{x-5}$ 有意义的 x 的取值范围是_____.

8. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} 3x-2 < 1 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

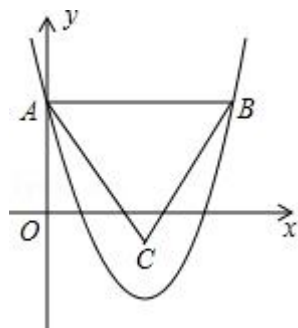
9. (4 分) 分解因式 $a^2 - ab - 3a + 3b =$ _____.

10. (4 分) 若关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2 + x + m^2 - 4 = 0$ 的一个根为 0, 则 m 值是_____.

11. (4 分) 在平面直角坐标系中, 把抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 的图象向左平移 2 个单位, 所得抛物线的解析式为_____.

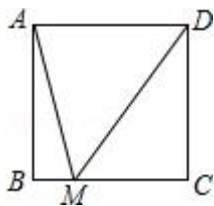
12. (4 分) 已知点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在二次函数 $y = (x-1)^2 + 1$ 的图象上, 若 $x_1 > x_2 > 1$, 则 y_1 _____ y_2 (填 “>”、“<” 或 “=”).

13. (4 分) 在平面直角坐标系中, 点 A 是抛物线 $y = a(x-3)^2 + k$ 与 y 轴的交点, 点 B 是这条抛物线上的另一点, 且 $AB \parallel x$ 轴, 则以 AB 为边的等边三角形 ABC 的周长为_____.



14. (4 分) 如图, 正方形 $ABCD$ 中, M 是边 BC 上一点, 且 $BM = \frac{1}{4}BC$, 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$,

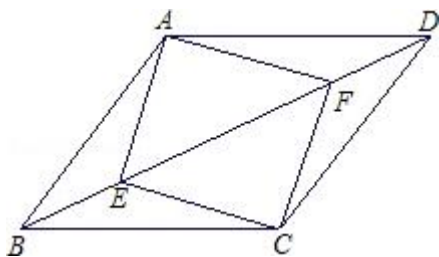
$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{DM} =$ _____ (用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示)



15. (4分) 某坡面的坡度为 $1: \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则坡角是_____度.

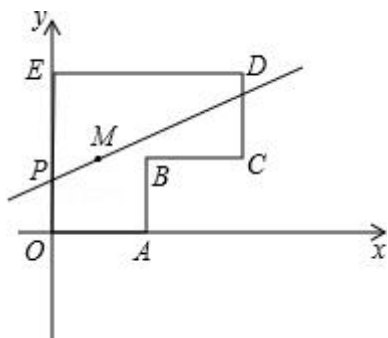
16. (4分) 如图, 菱形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 在对角线 BD 上, $BE = DF = \frac{1}{6}BD$,

若四边形 $AECF$ 为正方形, 则 $\tan \angle ABE =$ _____.



17. (4分) 在实验中我们常常采用利用计算机在平面直角坐标系中画出抛物线 $y = x^2$ 和直线 $y = -x+3$, 利用两图象交点的横坐标来求一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 的解, 也可以在平面直角坐标系中画出抛物线 $y = x^2 - 3$ 和直线 $y = -x$, 用它们交点的横坐标来求该方程的解. 所以求方程 $\frac{6}{x} - x^2 + 3 = 0$ 的近似解也可以利用熟悉的函数_____和_____的图象交点的横坐标来求得.

18. (4分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 多边形 $OABCDE$ 的顶点坐标为 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(2, 2)$, $C(4, 2)$, $D(4, 4)$, $E(0, 4)$, 若如图过点 $M(1, 2)$ 的直线 MP (与 y 轴交于点 P) 将多边形 $OABCDE$ 分割成面积相等的两部分, 则直线 MP 的函数表达式是_____.



三、(本大题共 8 题, 第 19-22 题每题 8 分, 第 23、24 题每题 10 分, 第 25 题 12 分, 第 26 题 14 分, 满分 78 分)

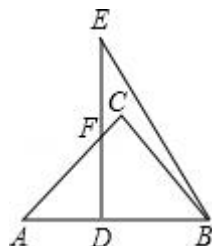
19. (8分) 计算: $(\pi-3)^0 + \sqrt{18} - 2\sin 45^\circ - (\frac{1}{8})^{-1} + \frac{\tan 45^\circ}{\sin 60^\circ - \cos 45^\circ}$.

20. (8分) 二次函数 $y = -x^2 + 2x + m$ 的图象与 x 轴的一个交点为 $A(3, 0)$, 另一个交点为 B , 且与 y 轴交于点 C

(1) 求 m 的值和点 B 的坐标

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

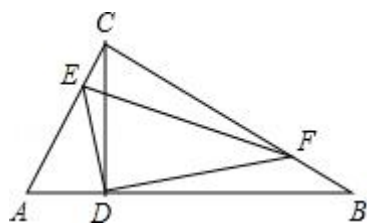
21. (8分) 将两块三角板如图放置, 其中 $\angle C = \angle EDB = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle E = 30^\circ$, $AB = DE = 6$, 求重叠部分四边形 $DBCF$ 的面积.



22. (8分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, 垂足为 D , E 、 F 分别是 AC , BC 边上一点, 且 $CE = \frac{1}{4}AC$, $BF = \frac{1}{4}BC$,

(1) 求证: $\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD}$;

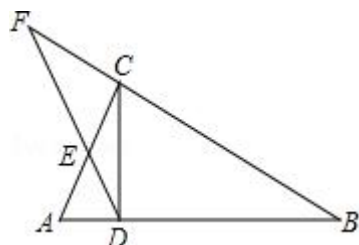
(2) 求 $\angle EDF$ 的度数.



23. (10分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于点 D , E 是 AC 的中点, DE 的延长线交 BC 的延长线于点 F , $EF = 5$, $\angle B$ 的正切值为 $\frac{1}{2}$

(1) 求证: $\triangle BDF \sim \triangle DCF$;

(2) 求 BC 的长.



24. (10分) 在对口扶贫活动中, 企业甲将经营状况良好的某消费品专卖店, 以 188 万元的优惠价转让给了尚有 120 万无息贷款还没有偿还的小型福利企业

乙，并约定从该店经营的利润中，首先保证企业乙的全体职工每月最低生活费的开支 5.6 万元后，逐步偿还转让费（不计利息），维持乙企业的正常运转每月除职工最低生活费外，还需其他开支 2.4 万元，从企业甲提供的相关资料中可知这种热门消费品的进价是每件 12 元：月销售量 Q （万件）与销售单价 P （元）的关系如下表所示：

销售单价 P （元）	...	13	14	15	16	17	18	...
月销量 Q （万件）	...	7	6	5	4	3	2	...

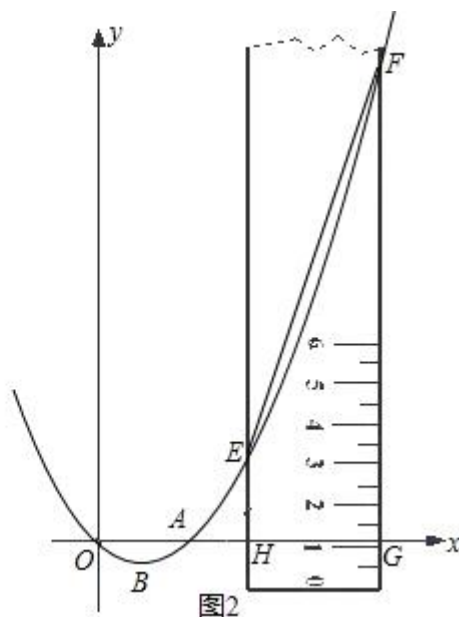
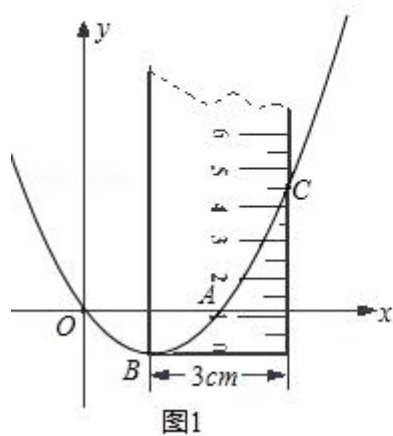
- （1）试确定月销售量 Q （万件）与与销售单价 P （元）之间的函数关系式
- （2）当商品的销售单价为多少元时，扣除各类费用后的月利润余额最大？
- （3）企业乙依靠该店，能否在 3 年内脱贫（偿还所有债务）？

25.（12 分）在平面直角坐标系中，抛物线过原点 O ，且与 x 轴交于另一点 A （ A 在 O 右侧），顶点为 B . 艾思轲同学用一把宽 3cm 的矩形直尺对抛物线进行如下测量：（1）量得 $OA = 3\text{cm}$ ，（2）当把直尺的左边与抛物线的对称轴重合，使得直尺左下端点与抛物线的顶点重合时（如图 1），测得抛物线与直尺右边的交点 C 的刻度读数为 4.5cm .

艾思轲同学将 A 的坐标记作 $(3, 0)$ ，然后利用上述结论尝试完成下列各题：

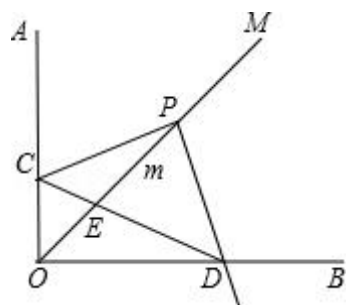
- （1）写出抛物线的对称轴；
- （2）求出该抛物线的解析式；
- （3）探究抛物线的对称轴上是否存在使 $\triangle ACD$ 周长最小的点 D ；
- （4）然后将图中的直尺（足够长）沿水平方向向右平移到点 A 的右边（如图 2），直尺的两边交 x 轴于点 H, G ，交抛物线于 E, F ，探究梯形 $EFGH$ 的面积 S 与线段 EF 的长度是否存在函数关系.

同学：如上述（3）（4）结论存在，请你帮艾思轲同学一起完成，如上述（3）（4）结论不存在，请你告诉艾思轲同学结论不存在的理由.



26. (14 分) 已知 $\angle AOB = 90^\circ$ ， OM 是 $\angle AOB$ 的平分线，将一个直角三角板的直角顶点 P 放在射线 OM 上， $OP = m$ (m 为常数且 $m \neq 0$)，移动直角三角板，两边分别交射线 OA ， OB 与点 C ， D

- (1) 如图，当点 C 、 D 都不与点 O 重合时，求证： $PC = PD$ ；
- (2) 联结 CD ，交 OM 于 E ，设 $CD = x$ ， $PE = y$ ，求 y 与 x 之间的函数关系式；
- (3) 如图，若三角板的一条直角边与射线 OB 交于点 D ，另一直角边与直线 OA ，直线 OB 分别交于点 C ， F ，且 $\triangle PDF$ 与 $\triangle OCD$ 相似，求 OD 的长。



2013 年上海市宝山区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列各式中，正确的是（ ）

A. $\sin 20^\circ + \sin 30^\circ = \sin 50^\circ$

B. $\sin 60^\circ = 2\sin 30^\circ$

C. $\tan 20^\circ \cdot \tan 70^\circ = 1$

D. $\cos 30^\circ < \cos 60^\circ$

【考点】T1：锐角三角函数的定义．

【分析】分别根据锐角三角函数的定义及特殊角的三角函数值进行解答即可．

【解答】解：A、错误，无法计算；

B、错误， $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $2\sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ ；

C、正确，符合互余两角的三角函数关系；

D、错误， $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} > \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ．

故选：C．

【点评】本题考查的是锐角三角函数的定义及特殊角的三角函数值，比较简单．

2.（4 分）下列分式方程去分母后所得结果正确的是（ ）

A. $\frac{1}{x-1} = \frac{x+2}{x+1} - 1$ 去分母得， $x+1 = (x-1)(x+2) - 1$

B. $\frac{x}{2x-5} + \frac{5}{5-2x} = 1$ 去分母得， $x+5 = 2x-5$

C. $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x}{x-2}$ 去分母得， $(x-2)^2 - x+2 = x(x+2)$

D. $\frac{2}{x+3} = \frac{1}{x-1}$ 去分母得， $2(x-1) = x+3$

【考点】B3：解分式方程．

【专题】11：计算题．

【分析】分式方程都乘以最简公分母去分母得到结果，即可做出判断．

【解答】解：A、去分母得： $x+1 = (x-1)(x+2) - (x+1)(x-1)$ ，本选项错误；

B、去分母得： $x-5 = 2x-5$ ，本选项错误；

C、去分母得： $(x-2)^2 - (x+2) = x(x+2)$ ，本选项错误；

D、去分母得： $2(x-1) = x+3$ ，本选项正确．

故选：D.

【点评】此题考查了解分式方程，解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解．解分式方程一定要注意要验根．

3. (4分) 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 没有实数根，则 k 的取值范围是()

- A. $k > 1$ B. $k \leq 1$ C. $k < 1$ D. $k \geq 1$

【考点】AA：根的判别式．

【专题】11：计算题．

【分析】根据根的判别式得到 $\Delta = 4 - 4k < 0$ ，然后解不等式即可．

【解答】解：根据题意得 $\Delta = 4 - 4k < 0$ ，

解得 $k > 1$ ．

故选：A.

【点评】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ：当 $\Delta > 0$ ，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ ，方程没有实数根．

4. (4分) 下列命题正确是()

- A. 长度相等的两个非零向量相等
B. 平行向量一定在同一直线上
C. 与零向量相等的向量必定是零向量
D. 任意两个相等的非零向量的始点与终点是一平行四边形的四顶点

【考点】LM：*平面向量．

【分析】向量即有长度，也有方向，方向不同的向量即使长度相同，两向量也不相等，结合各选项进行判断即可．

【解答】解：A、长度相等的两个非零向量不一定相等，还需要方向相同，故本选项错误；

B、平行向量，可以不在同一条直线上，但需要满足可以平移到同一条直线上，故本选项错误；

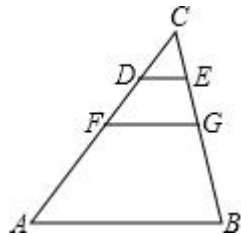
C、与零向量相等的向量必定是零向量，故本选项正确；

D、任意两个相等的非零向量的始点与终点是不一定是一平行四边形的四顶点，故本选项错误；

故选：C.

【点评】 本题考查了平面向量的知识，注意结合各选项的内容进行判断，难度一般.

5. (4分) 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel AB \parallel FG$ ，且 FG 到 DE 、 AB 的距离之比为1:2. 若 $\triangle ABC$ 的面积为32， $\triangle CDE$ 的面积为2，则 $\triangle CFG$ 的面积 S 等于()



- A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

【考点】 S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 先由 $AB \parallel FG$ ，且 FG 到 DE 、 AB 的距离之比为1:2，根据平行线分线段成比例定理得到 $DF:FA=1:2$ ，再根据平行于三角形一边的直线截三角形所得的三角形与原三角形相似得到 $\triangle CDE \sim \triangle CAB$ ，根据三角形相似的性质得 $S_{\triangle CDE}:S_{\triangle CAB}=CD^2:CA^2=2:32$ ，则 $CD:CA=1:4$ ，通过代换得到 $CD:CF=1:2$ ，再次根据三角形相似的性质得到 $S_{\triangle CDE}:S_{\triangle CFG}=CD^2:CF^2=1:4$ ，即可计算出 $\triangle CFG$ 的面积.

【解答】 解： $\because AB \parallel FG$ ，且 FG 到 DE 、 AB 的距离之比为1:2，

$$\therefore DF:FA=1:2,$$

$$\because DE \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore S_{\triangle CDE}:S_{\triangle CAB}=CD^2:CA^2=2:32,$$

$$\therefore CD:CA=1:4,$$

$$\text{设 } CD=a, \text{ 则 } CA=4a,$$

$$\therefore DA=3a,$$

$$\therefore DF=a,$$

$$\therefore CF=2a,$$

$$\therefore CD: CF = 1: 2,$$

而 $DE \parallel FG$,

$$\therefore S_{\triangle CDE}: S_{\triangle CFG} = CD^2: CF^2 = 1: 4,$$

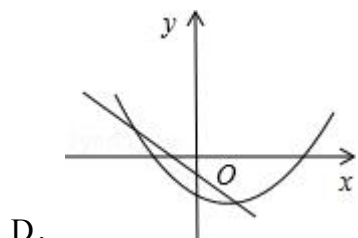
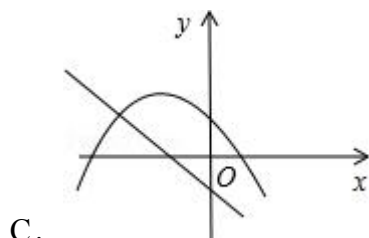
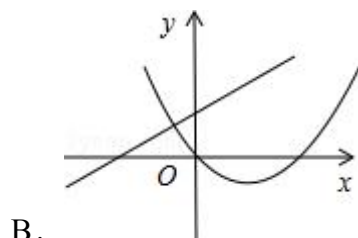
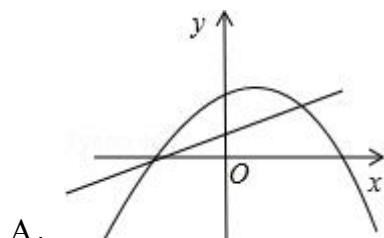
而 $\triangle CDE$ 的面积为 2,

$$\therefore \triangle CFG \text{ 的面积 } S = 4 \times 2 = 8.$$

故选: B.

【点评】 本题考查了三角形相似的判定与性质: 平行于三角形一边的直线截三角形所得的三角形与原三角形相似; 相似三角形对应边的比等于相似比, 相似三角形面积的比等于相似比的平方.

6. (4 分) 一次函数 $y = ax + b$ 与二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 在同一坐标系中的图象大致是 ()



【考点】 F3: 一次函数的图象; H2: 二次函数的图象.

【分析】 可先根据一次函数的图象判断 a 、 b 的符号, 再判断二次函数图象与实际是否相符, 判断正误.

【解答】 解: A、由一次函数 $y = ax + b$ 的图象可得: $a > 0$, 此时二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象应该开口向上, 错误;

B、由一次函数 $y = ax + b$ 的图象可得: $a > 0$, $b > 0$, 此时二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象应该开口向上, 对称轴 $x = -\frac{b}{2a} < 0$, 错误;

C、由一次函数 $y = ax + b$ 的图象可得: $a < 0$, $b < 0$, 此时二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象应该开口向下, 对称轴 $x = -\frac{b}{2a} < 0$, 正确.

D、由一次函数 $y = ax + b$ 的图象可得: $a < 0$, $b < 0$, 此时二次函数 $y = ax^2 + bx + c$

的图象应该开口向下，错误；

故选：C.

【点评】应该熟记一次函数 $y = kx + b$ 在不同情况下所在的象限，以及熟练掌握二次函数的有关性质：开口方向、对称轴、顶点坐标等.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）使 $\sqrt{x-5}$ 有意义的 x 的取值范围是 $x \geq 5$.

【考点】72：二次根式有意义的条件.

【分析】根据二次根式有意义的条件，可推出 $x - 5 \geq 0$ ，然后通过解不等式，即可推出 $x \geq 5$.

【解答】解：若 $x - 5 \geq 0$ ，原根式有意义，

$\therefore x \geq 5$,

故答案为 $x \geq 5$.

【点评】本题主要考查二次根式有意义的条件，关键在于根据题意推出 $x - 5 \geq 0$ ，然后正确的解不等式即可.

8.（4 分）不等式组 $\begin{cases} 3x-2 < 1 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ 的解集是 $-1 \leq x < 1$.

【考点】CB：解一元一次不等式组.

【专题】11：计算题.

【分析】分别求出各不等式的解集，再求出其公共解集即可.

【解答】解： $\begin{cases} 3x-2 < 1 \text{ ①} \\ x+1 \geq 0 \text{ ②} \end{cases}$ ，由①得， $x < 1$ ，由②得， $x \geq -1$ ，

故此不等式组的解集为： $-1 \leq x < 1$.

故答案为： $-1 \leq x < 1$.

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组，解答此题时要遵循“同大取较大；同小取较小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则.

9.（4 分）分解因式 $a^2 - ab - 3a + 3b = (a - 3)(a - b)$.

【考点】56：因式分解 - 分组分解法.

【专题】11：计算题.

【分析】原式第一、三项结合，二、四项结合，分别提取公因式，再提取即可得到结果.

【解答】解：原式 $= (a^2 - 3a) - (ab - 3b)$

$$= a(a-3) - b(a-3)$$

$$= (a-3)(a-b).$$

故答案为: $(a-3)(a-b)$.

【点评】 此题考查了因式分解 - 分组分解法, 进行适当的分组是解本题的关键.

10. (4分) 若关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2 + x + m^2 - 4 = 0$ 的一个根为 0, 则 m 值是 -2.

【考点】 A3: 一元二次方程的解.

【专题】 34: 方程思想.

【分析】 根据一元二次方程解的定义, 将 $x=0$ 代入关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2 + x + m^2 - 4 = 0$, 然后解关于 m 的一元二次方程即可.

【解答】 解: 根据题意, 得

$$x=0 \text{ 满足关于 } x \text{ 的一元二次方程 } (m-2)x^2 + x + m^2 - 4 = 0,$$

$$\therefore m^2 - 4 = 0,$$

解得, $m = \pm 2$;

又 $\because$ 二次项系数 $m-2 \neq 0$, 即 $m \neq 2$,

$$\therefore m = -2;$$

故答案为: -2.

【点评】 本题考查了一元二次方程的解的定义. 解答该题时, 注意一元二次方程的定义中的“一元二次方程的二次项系数不为 0”这一条件.

11. (4分) 在平面直角坐标系中. 把抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 的图象向左平移 2 个单位, 所得抛物线的解析式为 $y = 2(x+2)^2 - 1$.

【考点】 H6: 二次函数图象与几何变换.

【分析】 根据二次函数“左加右减”的原则进行解答即可.

【解答】 解: 由“左加右减”的原则可知, 将抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 向左平移一个单位后,

以所得抛物线为图象的二次函数解析式是: $y = 2(x+2)^2 - 1$.

故答案为: $y = 2(x+2)^2 - 1$.

【点评】 本题考查的是二次函数图象与几何变换, 熟知函数图象平移的法则是解答此题的关键.

12. (4分) 已知点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在二次函数 $y = (x - 1)^2 + 1$ 的图象上, 若 $x_1 > x_2 > 1$, 则 y_1 > y_2 (填“>”、“<”或“=”).

【考点】H5: 二次函数图象上点的坐标特征.

【分析】先根据二次函数的解析式得出函数图象的对称轴, 再判断出两点的位置及函数的增减性, 进而可得出结论.

【解答】解: $\because a = 1 > 0$,

$\therefore$ 二次函数的图象开口向上,

由二次函数 $y = (x - 1)^2 + 1$ 可知, 其对称轴为 $x = 1$,

$\because x_1 > x_2 > 1$,

$\therefore$ 两点均在对称轴的右侧,

$\because$ 此函数图象开口向上,

$\therefore$ 在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而增大,

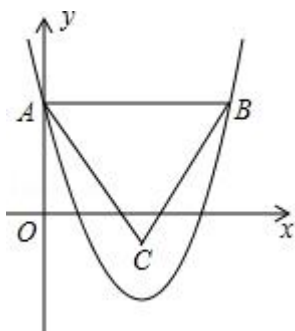
$\because x_1 > x_2 > 1$,

$\therefore y_1 > y_2$.

故答案为: >.

【点评】本题考查的是二次函数图象上点的坐标特点, 根据题意判断出 A 、 B 两点的位置是解答此题的关键.

13. (4分) 在平面直角坐标系中, 点 A 是抛物线 $y = a(x - 3)^2 + k$ 与 y 轴的交点, 点 B 是这条抛物线上的另一点, 且 $AB \parallel x$ 轴, 则以 AB 为边的等边三角形 ABC 的周长为 18.



【考点】H3: 二次函数的性质; KK: 等边三角形的性质.

【专题】16: 压轴题.

【分析】根据抛物线解析式求出对称轴为 $x = 3$, 再根据抛物线的对称性求出 AB 的长度, 然后根据等边三角形三条边都相等列式求解即可.

【解答】解：∵抛物线 $y = a(x - 3)^2 + k$ 的对称轴为 $x = 3$ ，且 $AB \parallel x$ 轴，

$$\therefore AB = 2 \times 3 = 6,$$

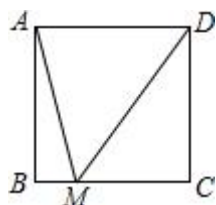
$$\therefore \text{等边} \triangle ABC \text{ 的周长} = 3 \times 6 = 18.$$

故答案为：18.

【点评】本题考查了二次函数的性质，等边三角形的周长计算，熟练掌握抛物线的对称轴与两个对称点之间的关系是解题的关键.

14. (4分) 如图，正方形 $ABCD$ 中， M 是边 BC 上一点，且 $BM = \frac{1}{4}BC$ ，若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ，

$$\overrightarrow{AD} = \vec{b}，\text{ 则 } \overrightarrow{DM} = \underline{\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}} \text{ (用 } \vec{a} \text{ 和 } \vec{b} \text{ 表示)}$$



【考点】LM：*平面向量.

【分析】先表示出 $\overrightarrow{BM}$ 、 $\overrightarrow{MC}$ ，然后即可得出 $\overrightarrow{DM}$ 的表达式.

【解答】解： $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，

$$\therefore BM = \frac{1}{4}BC,$$

$$\therefore \overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{MC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{MC} = \vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}.$$

$$\text{故答案为: } \vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}.$$

【点评】本题考查了平面向量的知识，根据线段比表示出 $\overrightarrow{MC}$ 是解答本题的关键，另外要熟练掌握向量的加减运算.

15. (4分) 某坡面的坡度为 $1: \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则坡角是 60 度.

【考点】T9：解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

【分析】坡面的坡度就是坡角的正切值，已知角的正切值，即可求得角度.

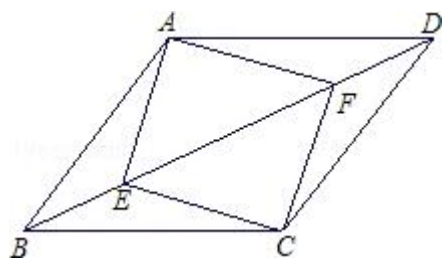
【解答】解：设坡角是 α ，则 $\tan \alpha = 1: \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$$\text{则 } \alpha = 60^\circ.$$

故答案为：60.

【点评】 本题主要考查了坡度的定义，属于基础题，解答本题的关键是理解坡度与坡角之间的关系.

16. (4分) 如图，菱形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 在对角线 BD 上， $BE = DF = \frac{1}{6}BD$ ，若四边形 $AECF$ 为正方形，则 $\tan \angle ABE = \frac{2}{3}$.



【考点】 L8：菱形的性质；LE：正方形的性质；T1：锐角三角函数的定义.

【专题】 16：压轴题.

【分析】 连接 AC 交 BD 于点 O . 根据正方形的性质知： $AC \perp BD$. 设正方形的边长为 $2a$ ，可求出 AO ， EF 的长，再根据 $BE = DF = \frac{1}{6}BD$ ，可将 AO 的长求出，代入 $\tan \angle ABE = \frac{AO}{BO}$ 计算即可.

【解答】 解：连接 AC 交 BD 于点 O .

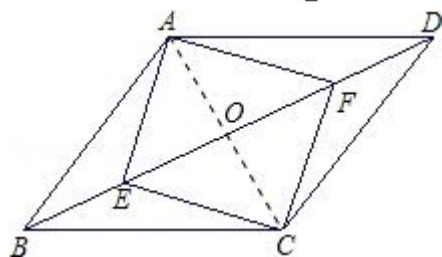
设正方形 $AECF$ 的边长为 $2a$ ，则 $EF = 2\sqrt{2}a$ ， $AO = \frac{1}{2}EF = \sqrt{2}a$.

$$\because BE = DF = \frac{1}{6}BD,$$

$$\therefore EF = \frac{2}{3}BD.$$

$$\because BD = 3\sqrt{2}a, BO = \frac{1}{2}BD = \frac{3\sqrt{2}}{2}a,$$

$$\therefore \tan \angle ABE = \frac{AO}{BO} = \frac{\sqrt{2}a}{\frac{3\sqrt{2}}{2}a} = \frac{2}{3}.$$



【点评】 本题综合考查菱形和正方形性质的应用和运算.

17. (4分) 在实验中我们常常采用利用计算机在平面直角坐标系中画出抛物线 y

$=x^2$ 和直线 $y = -x+3$ ，利用两图象交点的横坐标来求一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 的解，也可以在平面直角坐标系中画出抛物线 $y = x^2 - 3$ 和直线 $y = -x$ ，用它们交点的横坐标来求该方程的解. 所以求方程 $\frac{6}{x} - x^2 + 3 = 0$ 的近似解也可以利用熟悉的函数 $y = \frac{6}{x}$ 和 $y = x^2 - 3$ 的图象交点的横坐标来求得.

【考点】 HB: 图象法求一元二次方程的近似根.

【分析】 根据在平面直角坐标系中画出抛物线 $y = x^2$ 和直线 $y = -x+3$ ，利用两图象交点的横坐标来求一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 的解, 进而得出方程 $\frac{6}{x} - x^2 + 3 = 0$ 的近似解也可以利用熟悉的函数的交点得出.

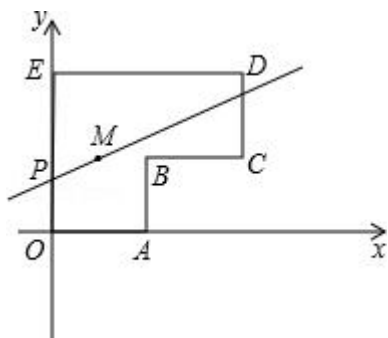
【解答】 解: $\because$ 利用计算机在平面直角坐标系中画出抛物线 $y = x^2$ 和直线 $y = -x+3$ ，利用两图象交点的横坐标来求一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 的解，也可在平面直角坐标系中画出抛物线 $y = x^2 - 3$ 和直线 $y = -x$ ，用它们交点的横坐标来求该方程的解.

$\therefore$ 求方程 $\frac{6}{x} - x^2 + 3 = 0$ 的近似解也可以利用熟悉的函数: $y = \frac{6}{x}$ 和 $y = x^2 - 3$ 的图象交点的横坐标来求得.

故答案为: $y = \frac{6}{x}$, $y = x^2 - 3$.

【点评】 此题主要考查了图象法求一元二次方程的近似根，利用方程的解得出与函数的关系是解题关键.

18. (4分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，多边形 $OABCDE$ 的顶点坐标为 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(2, 2)$, $C(4, 2)$, $D(4, 4)$, $E(0, 4)$ ，若如图过点 $M(1, 2)$ 的直线 MP (与 y 轴交于点 P) 将多边形 $OABCDE$ 分割成面积相等的两部分，则直线 MP 的函数表达式是 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.



【考点】 FI: 一次函数综合题.

【分析】 延长 CB 交 y 轴于点 F , 根据 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(2, 2)$, $C(4, 2)$, $D(4, 4)$, $E(0, 4)$ 求出多边形 $OABCDE$ 的面积, 设直线 PG 的解析式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), 把点 M 代入即可得到 $k + b = 2$, 再用 k 、 b 表示出 P 、 G 两点坐标, 再由 $S_{\text{梯形} PGDE} = \frac{1}{2} S_{\text{多边形} OABCDE}$ 即可得出 kb 的值, 故可得出结论.

【解答】 解: 长 CB 交 y 轴于点 F ,

$$\because A(2, 0), B(2, 2), C(4, 2), D(4, 4), E(0, 4),$$

$$\therefore S_{\text{正方形} OABF} = OA \cdot AB = 2 \times 2 = 4,$$

$$S_{\text{矩形} CDEF} = CF \cdot CD = 4 \times 2 = 8,$$

$$\therefore S_{\text{多边形} OABCDE} = 4 + 8 = 12,$$

设直线 PG 的解析式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$),

$$\because M(1, 2),$$

$$\therefore k + b = 2 \text{ ①},$$

$\because$ 点 P 在 y 轴上,

$$\therefore P(0, b),$$

$$\because C(4, 2), D(4, 4),$$

$$\therefore G(4, 4k + b),$$

$$\therefore S_{\text{梯形} PGDE} = \frac{1}{2} (DG + PE) \cdot DE = \frac{1}{2} S_{\text{多边形} OABCDE} = \frac{1}{2} \times (4 - 4k - b + 4 - b) \times 4 = 6,$$

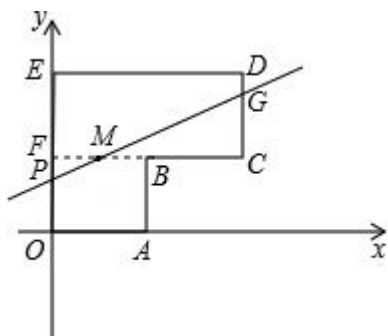
$$\text{即 } 8k + 4b = 10 \text{ ②},$$

$$\text{①②联立得, } \begin{cases} k + b = 2 \\ 8k + 4b = 10 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases},$$

故此一次函数的解析式为: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

故答案为: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.



【点评】 本题考查的是一次函数综合题，涉及到用待定系数法求一次函数的解析式、梯形及矩形的面积等相关知识，难度适中．

三、（本大题共 8 题，第 19-22 题每题 8 分，第 23、24 题每题 10 分，第 25 题 12 分，第 26 题 14 分，满分 78 分）

19.（8 分）计算： $(\pi-3)^0 + \sqrt{18} - 2\sin 45^\circ - (\frac{1}{8})^{-1} + \frac{\tan 45^\circ}{\sin 60^\circ - \cos 45^\circ}$ ．

【考点】 6E：零指数幂；6F：负整数指数幂；79：二次根式的混合运算；T5：特殊角的三角函数值．

【专题】 11：计算题．

【分析】 根据零指数幂、负整数指数幂和特殊角的三角函数值得到原式 $= 1 + 3\sqrt{2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 8 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}$ ，然后分母有理化后合并即可．

【解答】 解：原式 $= 1 + 3\sqrt{2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 8 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$= 1 + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} - 8 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

$$= 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 7.$$

【点评】 本题考查了二次根式的混合运算：先把各二次根式化为最简二次根式，在进行二次根式的乘除运算，然后合并同类二次根式．也考查了零指数幂、负整数指数幂和特殊角的三角函数值．

20.（8 分）二次函数 $y = -x^2 + 2x + m$ 的图象与 x 轴的一个交点为 $A(3, 0)$ ，另一个交点为 B ，且与 y 轴交于点 C

（1）求 m 的值和点 B 的坐标

（2）求 $\triangle ABC$ 的面积．

【考点】 HA：抛物线与 x 轴的交点．

【分析】（1）先将已知交点坐标代入二次函数的解析式求出 m 值，再当 $y = 0$ 时，

求出关于新的一元二次方程的解，就可以求出另一个交点坐标；

(2) 由(1)中的函数解析式求得点 C 的坐标是 $(0, 3)$ ，则 $OC = 3$ 。然后根据点 A 、 B 的坐标求得线段 AB 的长度；最后根据三角形的面积公式来求 $\triangle ABC$ 的面积。

【解答】 解：(1) $\because$ 二次函数 $y = -x^2 + 2x + m$ 的图象与 x 轴的一个交点为 $A(3, 0)$,

$$\therefore 0 = -9 + 6 + m,$$

$$\therefore m = 3,$$

$\therefore$ 该二次函数的解析式是 $y = -x^2 + 2x + 3$,

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } -x^2 + 2x + 3 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 3, x_2 = -1.$$

$$B(-1, 0);$$

$$(2) \because \text{由 (1) 知, } y = -x^2 + 2x + 3,$$

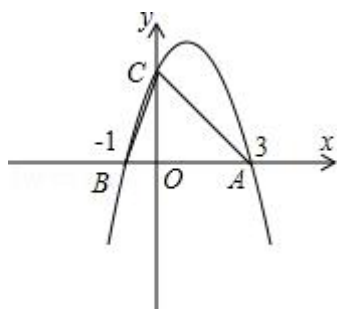
$$\therefore \text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = 3,$$

$$\therefore OC = 3.$$

$$\text{又} \because A(3, 0), B(-1, 0).$$

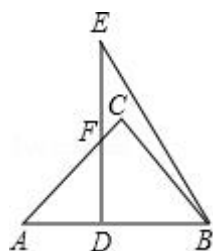
$$\therefore AB = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6, \text{ 即 } \triangle ABC \text{ 的面积是 } 6.$$



【点评】 本题是一道关于二次函数的运用的试题，考查了待定系数法的运用和抛物线与 x 轴的交点坐标。解题时注意，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数， $a \neq 0$) 与 x 轴的交点与一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根之间的关系。

21. (8分) 将两块三角板如图放置，其中 $\angle C = \angle EDB = 90^\circ$ ， $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle E = 30^\circ$ ， $AB = DE = 6$ ，求重叠部分四边形 $DBCF$ 的面积。



【考点】T7：解直角三角形．

【专题】11：计算题．

【分析】观察可看出，所求四边形的面积等于等腰直角三角形的面积减去 $S_{\triangle ADF}$ ，从而我们只要求出这两个三角形的面积即可，这要求我们综合利用解直角三角形，直角三角形的性质和三角函数的灵活运用来解答．

【解答】解：在 $\triangle EDB$ 中， $\angle EDB = 90^\circ$ ， $\angle E = 30^\circ$ ， $DE = 6$ ，

$$\therefore DB = DE \cdot \tan 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AD = AB - DB = 6 - 2\sqrt{3},$$

又 $\because \angle A = 45^\circ$ ， $\angle AFD = 45^\circ$ ，得 $FD = AD$ ，

$$\therefore S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2}AD^2 = \frac{1}{2} \times (6 - 2\sqrt{3})^2 = 24 - 12\sqrt{3},$$

在等腰直角三角形 ABC 中，斜边 $AB = 6$ ，

$$\therefore AC = BC = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC^2 = 9,$$

$$\therefore S_{\text{四边形 } DBCF} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADF} = 9 - (24 - 12\sqrt{3}) = 12\sqrt{3} - 15.$$

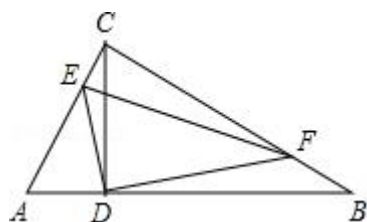
【点评】此题考查了解直角三角形，涉及的知识有：勾股定理，等腰直角三角形的性质，锐角三角函数定义，熟练掌握直角三角形的性质是解本题的关键．

22. (8分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，垂足为 D ， E 、 F 分别是

AC ， BC 边上一点，且 $CE = \frac{1}{4}AC$ ， $BF = \frac{1}{4}BC$ ，

(1) 求证： $\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD}$ ；

(2) 求 $\angle EDF$ 的度数．



【考点】S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】(1) 证相关线段所在的三角形相似即可，即证 $\text{Rt}\triangle ADC \sim \text{Rt}\triangle CDB$ ；

(2) 易证得 $CE:BF = AC:BC$ ，联立(1)的结论，即可得出 $CE:BF = CD:BD$ ，由此易证得 $\triangle CED \sim \triangle BFD$ ，即可得出 $\angle CDE = \angle BDF$ ，由于 $\angle BDF$ 和 $\angle CDF$ 互余，则 $\angle EDC$ 和 $\angle CDF$ 也互余，由此可求得 $\angle EDF$ 的度数.

【解答】(1) 证明： $\because CD \perp AB$,

$$\therefore \angle CDB = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle BCD,$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle CDB,$$

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{CD}{DB};$$

$$(2) \text{解: } \because CE = \frac{1}{4}AC, BF = \frac{1}{4}BC,$$

$$\therefore \frac{CE}{BF} = \frac{\frac{1}{4}AC}{\frac{1}{4}BC} = \frac{AC}{CB} = \frac{CD}{DB},$$

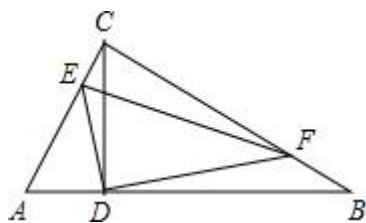
$$\text{又} \because \angle A = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle B,$$

$$\therefore \triangle CED \sim \triangle BFD,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle BDF,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle EDC + \angle CDF = \angle BDF + \angle CDF = \angle CDB = 90^\circ.$$



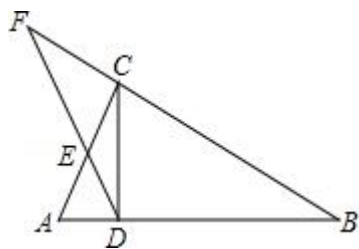
【点评】此题考查的是相似三角形的判定和性质；识别两三角形相似，除了要掌握定义外，还要注意正确找出两三角形的对应边、对应角，可利用数形结合

思想根据图形提供的数据计算对应角的度数、对应边的比.

23. (10分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于点 D , E 是 AC 的中点, DE 的延长线交 BC 的延长线于点 F , $EF = 5$, $\angle B$ 的正切值为 $\frac{1}{2}$

(1) 求证: $\triangle BDF \sim \triangle DCF$;

(2) 求 BC 的长.



【考点】 S9: 相似三角形的判定与性质; T7: 解直角三角形.

【分析】 (1) 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半得出 $DE = EC$, 推出 $\angle EDC = \angle ECD$, 求出 $\angle FDC = \angle B$, 根据 $\angle F = \angle F$ 证 $\triangle FBD \sim \triangle FDC$, 即可;

(2) 设 $DE = x$, 则 $AC = 2x$, $DF = x + 5$. 由 (1) 可知 $\triangle BDF \sim \triangle DCF$, 根据相似三角形对应边的比相等及正切函数的定义得到 $\frac{DF}{BF} = \frac{CF}{DF} = \frac{DC}{BD} = \tan \angle B = \frac{1}{2}$, 则 $BF = 2(x + 5)$, $CF = \frac{1}{2}(x + 5)$, $BC = BF - CF = \frac{3}{2}(x + 5)$, 然后在直角 $\triangle ABC$ 中, 根据 $\tan \angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$, 得到方程 $\frac{3}{2}(x + 5) = 2 \times 2x$, 解方程求得 $x = 3$, 进而得到 $BC = 12$.

【解答】 (1) 证明: $\because CD \perp AB$,

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$\because E$ 是 AC 的中点,

$$\therefore DE = EC,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle ECD,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle BDC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ECD + \angle DCB = 90^\circ, \angle DCB + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECD = \angle B,$$

$$\therefore \angle B = \angle FDC,$$

$$\text{又} \because \angle F = \angle F,$$

$$\therefore \triangle BDF \sim \triangle DCF;$$

(2) 解: 设 $DE = x$, 则 $AC = 2DE = 2x$, $DF = DE + EF = x + 5$.

$$\because \triangle BDF \sim \triangle DCF,$$

$$\therefore \frac{DF}{BF} = \frac{CF}{DF} = \frac{DC}{BD} = \tan \angle B = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BF = 2DF = 2(x + 5), \quad CF = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}(x + 5),$$

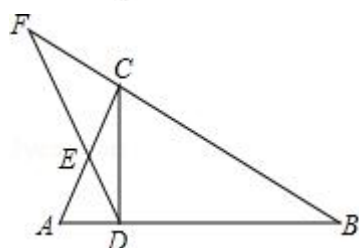
$$\therefore BC = BF - CF = \frac{3}{2}(x + 5),$$

$$\text{在直角} \triangle ABC \text{ 中, } \because \tan \angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BC = 2AC, \text{ 即 } \frac{3}{2}(x + 5) = 2 \times 2x,$$

解得 $x = 3$

$$\therefore BC = \frac{3}{2}(3 + 5) = 12.$$



【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 锐角三角函数的定义, 直角三角形的性质, 难度适中, 解题的关键是由相似三角形的性质得到比例式.

24. (10 分) 在对口扶贫活动中, 企业甲将经营状况良好的某消费品专卖店, 以 188 万元的优惠价转让给了尚有 120 万无息贷款还没有偿还的小型福利企业乙, 并约定从该店经营的利润中, 首先保证企业乙的全体职工每月最低生活费的开支 5.6 万元后, 逐步偿还转让费 (不计利息), 维持乙企业的正常运转每月除职工最低生活费外, 还需其他开支 2.4 万元, 从企业甲提供的相关资料中可知这种热门消费品的进价是每件 12 元: 月销售量 Q (万件) 与销售单价 P (元) 的关系如下表所示:

销售单价 P (元)	...	13	14	15	16	17	18	...
月销量 Q (万件)	...	7	6	5	4	3	2	...

(1) 试确定月销售量 Q (万件) 与与销售单价 P (元) 之间的函数关系式

(2) 当商品的销售单价为多少元时, 扣除各类费用后的月利润余额最大?

(3) 企业乙依靠该店, 能否在 3 年内脱贫 (偿还所有债务)?

【考点】 HE: 二次函数的应用.

【分析】 (1) 设函数关系式为 $Q = kP + b$, 将点 (13, 7), (14, 6) 代入函数关系式, 得出 P 和 b 的值即可得出函数关系式.

(2) 设月利润为 W , 则根据题意可得出设月利润 W 与售价 P 的函数关系式, 根据函数性质求出 W 取最大值时, 自变量 P 的值, 从而确定商品的价格;

(3) 企业乙脱贫即还清 188 万元的转让价格和 120 万元的无息贷款, 要求最早脱贫时间, 由上问 P 的值, 根据题意设可在 x 年后脱贫, 则此 x 年经营的利润 $\geq 188 + 120$, 求出 x 的最小值, 得出结果.

【解答】 解: (1) 观察表格数据, 可设 $Q = kP + b$,

把点 (13, 7), (14, 6) 代入函数关系式得:

$$\begin{cases} 13k + b = 7 \\ 14k + b = 6 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -1 \\ b = 20 \end{cases},$$

则 Q 与 p 之间的函数关系式为: $Q = 20 - p$;

(2) 设月利润为 W , 则有

$$W = Q(P - 12) - (5.6 + 2.4)$$

$$= (20 - P)(P - 12) - 8$$

$$= -P^2 + 32P - 248$$

$$= -(P - 16)^2 + 8,$$

故当销售单价为 16 元时, 月利润最大为 8 万元.

(3) 设 x 年内可脱贫, 由 (2) 知最大月利润为 8 万元,

$$\text{则 } 8 \times 12x \geq 188 + 120,$$

$$\text{解得: } x \geq 3.2.$$

故企业乙依靠该店, 不能在 3 年内脱贫.

【点评】 此题考查了二次函数的应用、待定系数法求函数解析式的知识, 难度较大, 解答本题的关键是读懂题意列出函数关系式并熟练掌握配方法求最值的

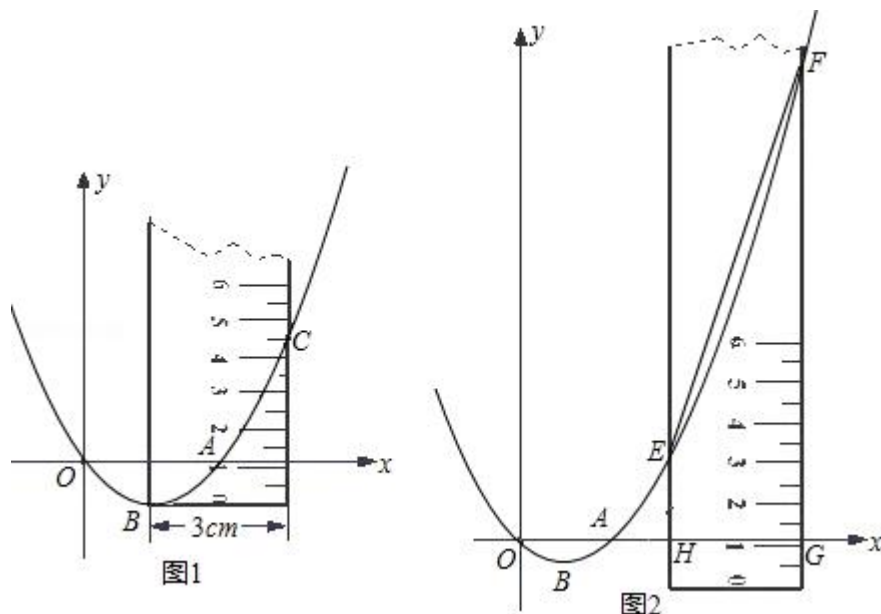
应用.

25. (12分) 在平面直角坐标系中, 抛物线过原点 O , 且与 x 轴交于另一点 A (A 在 O 右侧), 顶点为 B . 艾思轲同学用一把宽 3cm 的矩形直尺对抛物线进行如下测量: (1) 量得 $OA = 3\text{cm}$, (2) 当把直尺的左边与抛物线的对称轴重合, 使得直尺左下端点与抛物线的顶点重合时 (如图 1), 测得抛物线与直尺右边的交点 C 的刻度读数为 4.5cm .

艾思轲同学将 A 的坐标记作 $(3, 0)$, 然后利用上述结论尝试完成下列各题:

- (1) 写出抛物线的对称轴;
- (2) 求出该抛物线的解析式;
- (3) 探究抛物线的对称轴上是否存在使 $\triangle ACD$ 周长最小的点 D ;
- (4) 然后将图中的直尺 (足够长) 沿水平方向向右平移到点 A 的右边 (如图 2), 直尺的两边交 x 轴于点 H, G , 交抛物线于 E, F , 探究梯形 $EFGH$ 的面积 S 与线段 EF 的长度是否存在函数关系.

同学: 如上述 (3)(4) 结论存在, 请你帮艾思轲同学一起完成, 如上述 (3)(4) 结论不存在, 请你告诉艾思轲同学结论不存在的理由.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【分析】 (1) 由抛物线过原点 O 及 A 点 $(3, 0)$, 根据抛物线的对称性, 由中点坐标公式, 即可求出抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{0+3}{2}$, 即 $x = \frac{3}{2}$;

(2) 先由抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$, 设抛物线的解析式为顶点式 $y = a(x -$

$\frac{3}{2})^2+k$, 则顶点 B 的坐标为 $(\frac{3}{2}, k)$, 再将 $x = \frac{9}{2}$ 代入, 求出点 C 的纵坐标为 $9a+k$, 根据 $MC = 4.5$, 求出 $a = \frac{1}{2}$, 然后将 A 点坐标 $(3, 0)$ 代入 $y = \frac{1}{2}(x - \frac{3}{2})^2+k$, 求出 $k = -\frac{9}{8}$, 得到抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{8}$, 即 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$;

(3) 由于 O 、 A 两点关于抛物线的对称轴对称, 所以连接 OC , 交抛物线的对称轴于点 D , 则 $\triangle ACD$ 的周长最小. 先运用待定系数法求出直线 OC 的解析式, 再将 $x = \frac{3}{2}$ 代入, 求出 y 的值, 即可得到 D 点坐标;

(4) 先用含 a 的代数式分别表示 E , H , F , G 四点的坐标, 得到 EH 与 FG 的长度, 再根据梯形的面积公式求出 $S = \frac{3}{2}a^2$, 再运用两点之间的距离公式求出 $EF = 3\sqrt{1+a^2}$, 则 $\frac{2S}{3} = \frac{EF^2}{9} - 1$, 整理后得出 $S = \frac{1}{6}EF^2 - \frac{3}{2}$, 即 S 是 EF 长度的二次函数.

【解答】 解: (1) $\because$ 抛物线过原点 O , 且与 x 轴交于另一点 A (A 在 O 右侧),

$$OA = 3,$$

$\therefore A$ 点坐标为 $(3, 0)$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$;

(2) $\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 可设抛物线的解析式为 $y = a(x - \frac{3}{2})^2 + k$,

$\therefore$ 顶点 B 的坐标为 $(\frac{3}{2}, k)$.

如图 1, $\because$ 点 C 的横坐标为: $ON = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$, 点 C 在抛物线 $y = a(x - \frac{3}{2})^2 + k$ 上,

$\therefore$ 点 C 的纵坐标为 $a(\frac{9}{2} - \frac{3}{2})^2 + k = 9a + k$.

$\because MC = 4.5$,

$\therefore 9a + k - k = 4.5$,

$\therefore a = \frac{1}{2}$,

将 A 点坐标 $(3, 0)$ 代入 $y = \frac{1}{2} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + k$,

得 $\frac{1}{2} \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 + k = 0$, 解得 $k = -\frac{9}{8}$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{8}$, 即 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$;

(3) 抛物线的对称轴上存在使 $\triangle ACD$ 周长最小的点 D , 理由如下:

如图 1, 连接 OC , 交抛物线的对称轴于点 D , 则 $\triangle ACD$ 的周长 $= AC + AD + CD =$

$AC + OD + CD = AC + OC$ 最小.

设直线 OC 的解析式为 $y = mx$, 将点 C 的坐标 $\left(\frac{9}{2}, \frac{27}{8}\right)$ 代入,

得 $\frac{9}{2}m = \frac{27}{8}$, 解得 $m = \frac{3}{4}$,

即直线 OC 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x$,

当 $x = \frac{3}{2}$ 时, $y = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$.

故所求 D 点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{8}\right)$;

(4) 梯形 $EFGH$ 的面积 S 与线段 EF 的长度存在函数关系, 理由如下:

如图 2, 设点 E 横坐标为 a , 则 E 点坐标为 $\left(a, \frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}a\right)$, H 点坐标为 $(a, 0)$,

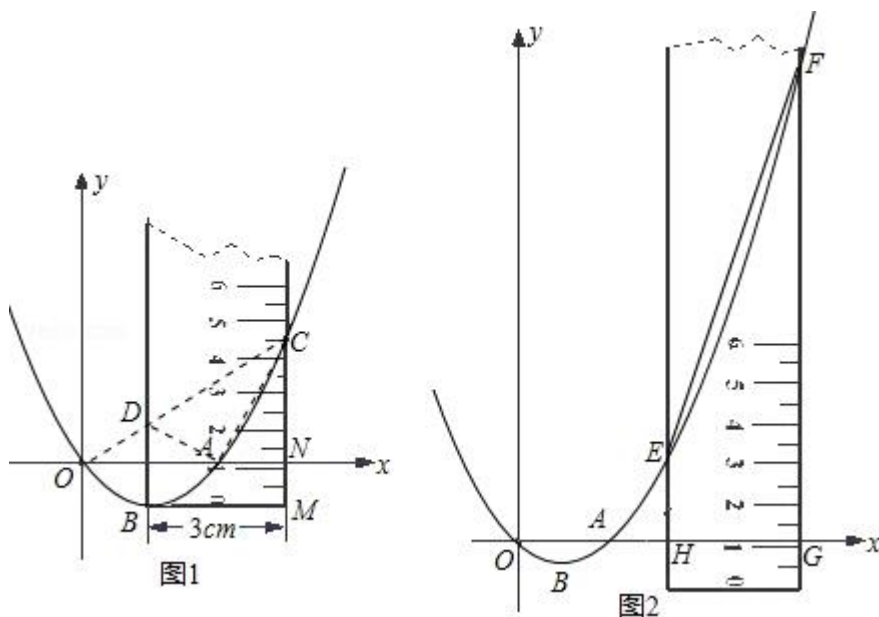
点 F 横坐标为 $a+3$, F 点坐标为 $\left(a+3, \frac{1}{2}(a+3)^2 - \frac{3}{2}(a+3)\right)$, G 点坐标为 $(a+3, 0)$,

$\therefore$ 梯形 $EFGH$ 的面积 $S = \frac{1}{2}(EH + FG) \cdot HG = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}a\right) + \frac{1}{2}(a+3)^2 - \frac{3}{2}(a+3) \right]$
 $\times 3 = \frac{3}{2}a^2$,

又 $\because \frac{1}{2}(a+3)^2 - \frac{3}{2}(a+3) - \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}a\right) = 3a$, $EF = \sqrt{3^2 + (3a)^2} = 3\sqrt{1+a^2}$,

$\therefore \frac{2S}{3} = \frac{EF^2}{9} - 1$,

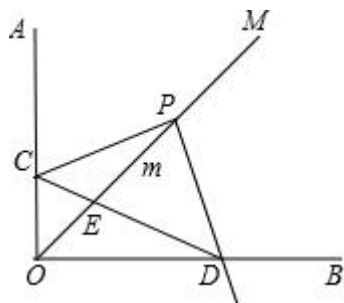
$\therefore S = \frac{1}{6}EF^2 - \frac{3}{2}$, 即 S 是 EF 长度的二次函数.



【点评】 本题是二次函数的综合题型，其中涉及到的知识点有运用待定系数法求正比例函数与二次函数的解析式，二次函数的性质，平移、轴对称的性质，梯形的面积、两点之间的距离公式，综合性较强，难度适中．根据抛物线的性质运用待定系数法求出二次函数的解析式是解题的关键．

26. (14分) 已知 $\angle AOB = 90^\circ$ ， OM 是 $\angle AOB$ 的平分线，将一个直角三角板的直角顶点 P 放在射线 OM 上， $OP = m$ (m 为常数且 $m \neq 0$)，移动直角三角板，两边分别交射线 OA ， OB 与点 C ， D

- (1) 如图，当点 C 、 D 都不与点 O 重合时，求证： $PC = PD$ ；
- (2) 联结 CD ，交 OM 于 E ，设 $CD = x$ ， $PE = y$ ，求 y 与 x 之间的函数关系式；
- (3) 如图，若三角板的一条直角边与射线 OB 交于点 D ，另一直角边与直线 OA ，直线 OB 分别交于点 C ， F ，且 $\triangle PDF$ 与 $\triangle OCD$ 相似，求 OD 的长．



【考点】 SO：相似形综合题．

【分析】 (1) 作 $PH \perp OA$ 于 H ， $PN \perp OB$ 于 N ，根据角平分线的性质可得 $PM = PG$ ，根据 ASA 可证 $\triangle PCM \cong \triangle PDN$ ，根据全等三角形的性质可得 $PC = PD$ ；

(2) 根据 AA 可证 $\triangle PDE \sim \triangle POD$, 根据相似三角形的性质, 等腰直角三角形的性质即可得到 y 与 x 之间的函数关系式;

(3) 分①点 C 在 AO 上, 根据相似三角形的性质和线段垂直平分线的性质即可求得 OD 的长; ②点 C 在 AO 的延长线上, $\triangle PDF$ 与 $\triangle OCD$ 相似只能是 $\angle 1 = \angle 2$, 根据等腰直角三角形的性质可得 $\angle BDC = 45^\circ$, 然后求出 $\angle 1 = 22.5^\circ$, 过点 P 作 $PG \perp OM$ 交 OD 于 G , 根据等腰直角三角形的性质求出 OG , 根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和求出 $\angle 3 = 22.5^\circ$, 从而得到 $\angle 1 = \angle 3$, 根据等角对等边的性质可得 $PG = DG = m$, 然后根据 $OD = OG + DG$ 计算即可得解.

【解答】(1) 证明: 作 $PH \perp OA$ 于 H , $PN \perp OB$ 于 N ,

则 $\angle PHC = \angle PND = 90^\circ$,

则 $\angle HPC + \angle CPN = 90^\circ$

$\because \angle CPN + \angle NPD = 90^\circ$

$\therefore \angle HPC = \angle NPD$,

$\because OM$ 是 $\angle AOB$ 的平分线

$\therefore PH = PN$, $\angle POB = 45^\circ$,

$\because$ 在 $\triangle PCH$ 与 $\triangle PDN$ 中,

$$\begin{cases} \angle PHC = \angle PND \\ PH = PN \\ \angle HPC = \angle NPD \end{cases},$$

$\therefore \triangle PCH \cong \triangle PDN (ASA)$

$\therefore PC = PD$;

(2) 解: $\because PC = PD$,

$\therefore \angle PDC = 45^\circ$,

$\therefore \angle POB = \angle PDC$,

$\because \angle DPE = \angle OPD$,

$\therefore \triangle PDE \sim \triangle POD$,

$\therefore PE : PD = PD : PO$,

又 $\because PD^2 = \frac{1}{2}CD^2$,

$$\therefore PE = \frac{1}{2m}x^2, \text{ 即 } y \text{ 与 } x \text{ 之间的函数关系式为 } y = \frac{1}{2m}x^2;$$

(3) ①如图 1, 点 C 在 AO 上时, $\because \angle PDF > \angle CDO$,

令 $\triangle PDF \sim \triangle OCD$,

$$\therefore \angle DFP = \angle CDO,$$

$$\therefore CF = CD,$$

$$\because CO \perp DF$$

$$\therefore OF = OD$$

$$\therefore OD = \frac{1}{2}DF = OP = m;$$

②如图 2, 点 C 在 AO 的延长线上时,

$\triangle PDF$ 与 $\triangle OCD$ 相似, 若 $\angle 2 = \angle PFD$, 则 $PC \parallel CD$, 与 PC 、 DC 相交于点 C 矛盾,

所以, 只能是 $\angle 1 = \angle 2$,

由 (1) 可知 $PC = PD$,

$\therefore \triangle PCD$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = 22.5^\circ,$$

过点 P 作 $PG \perp OM$ 交 OD 于 G ,

$\because \angle AOB = 90^\circ$, OM 是 $\angle AOB$ 的平分线,

$\therefore \triangle POG$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore OG = \sqrt{2}OP = \sqrt{2}m,$$

$$PG = OP = m,$$

$$\because \angle 1 + \angle 3 = \angle PGO = 45^\circ,$$

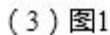
$$\therefore \angle 3 = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

$$\therefore PG = DG = m,$$

$$\therefore OD = OG + DG = \sqrt{2}m + m = (\sqrt{2} + 1)m,$$

综上所述, OD 的长为: m 或 $(\sqrt{2} + 1)m$.



第 31 页 (共 31 页)