

2013 年上海市嘉定区中考数学一模试卷（A 卷）

一、选择题（下列各题的备选答案中，只有一个是正确的，将正确答案的序号填入题后的括号内.每小题 2 分，本题共 20 分）

1. (2 分) 下列根式不是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{a^2+1}$ B. $\sqrt{2x+1}$ C. $\frac{\sqrt{2b}}{4}$ D. $\sqrt{0.1y}$

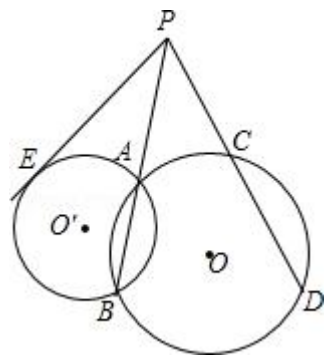
2. (2 分) 设方程 $x^2+x-2=0$ 的两个根为 α , β , 那么 $(\alpha-1)(\beta-1)$ 的值等于 ()

- A. -4 B. -2 C. 0 D. 2

3. (2 分) 边长相等的下列两种正多边形的组合, 不能作平面镶嵌的是 ()

- A. 正方形与正三角形 B. 正五边形与正三角形
C. 正六边形与正三角形 D. 正八边形与正方形

4. (2 分) 如图, $\odot O$ 和 $\odot O'$ 都经过点 A 和点 B , 点 P 在 BA 的延长线上, 过 P 作 $\odot O$ 的割线 PCD 交 $\odot O$ 于 C 、 D , 作 $\odot O'$ 的切线 PE 切 $\odot O'$ 于 E , 若 $PC=4$, $CD=5$, 则 PE 等于 ()



- A. 6 B. $2\sqrt{5}$ C. 20 D. 36

5. (2 分) 若反比例函数 $y = \frac{k-3}{x}$ 的图象在每一象限内, y 随 x 的增大而增大, 则有 ()

- A. $k \neq 0$ B. $k \neq 3$ C. $k < 3$ D. $k > 3$

6. (2 分) 已知二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$ 的顶点坐标和对称轴分别是 ()

- A. $(1, 2)$ $x = 1$ B. $(-1, 2)$ $x = -1$
C. $(-4, -5)$ $x = -4$ D. $(4, -5)$ $x = 4$

7. (2 分) 已知在直角坐标系中, 以点 $A(0, 3)$ 为圆心, 以 3 为半径作 $\odot A$,

则直线 $y = kx + 2$ ($k \neq 0$) 与 $\odot A$ 的位置关系是 ()

- A. 相切 B. 相交 C. 相离 D. 与 k 值有关

8. (2分) 如图, 一个圆柱形笔筒, 量得笔筒的高是 20cm , 底面圆的半径为 5cm , 那么笔筒的侧面积为 ()



- A. 200cm^2 B. $100\pi\text{cm}^2$ C. $200\pi\text{cm}^2$ D. $500\pi\text{cm}^2$

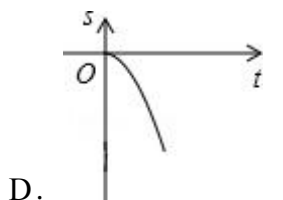
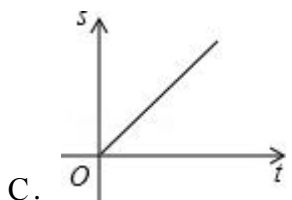
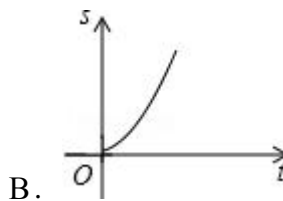
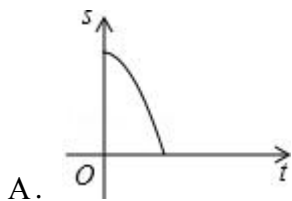
9. (2分) 用换元法解方程 $\frac{6(x+1)}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x+1} = 7$, 若设 $\frac{x^2+1}{x+1} = y$, 则原方程可化为

()

- A. $y^2 - 7y + 6 = 0$ B. $y^2 + 6y - 7 = 0$ C. $6y^2 - 7y + 1 = 0$ D. $6y^2 + 7y + 1 = 0$

10. (2分) 苹果熟了, 从树上落下所经过的路程 s 与下落的时间 t 满足 $s = \frac{1}{2}gt^2$

(g 是不为 0 的常数), 则 s 与 t 的函数图象大致是 ()



二、填空题 (每小题 2 分, 本题共 20 分)

11. (2分) 函数 $y = \frac{\sqrt{2x+1}}{x-1}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.

12. (2分) 若关于 x 的方程 $x^2 + 5x + k = 0$ 有实数根, 则 k 的取值范围是_____.

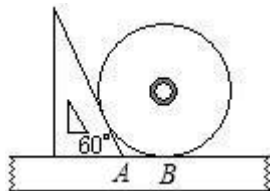
13. (2分) 圆和圆有多种位置关系, 与图中不同的圆和圆的位置关系是_____.



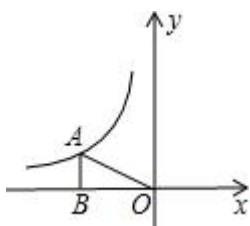
14. (2分) 若点 $A(2, m)$ 在函数 $y = x^2 - 1$ 的图象上, 则点 A 关于 x 轴的对称点的坐标是_____.

15. (2分) 方程组 $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$ 的解是_____.

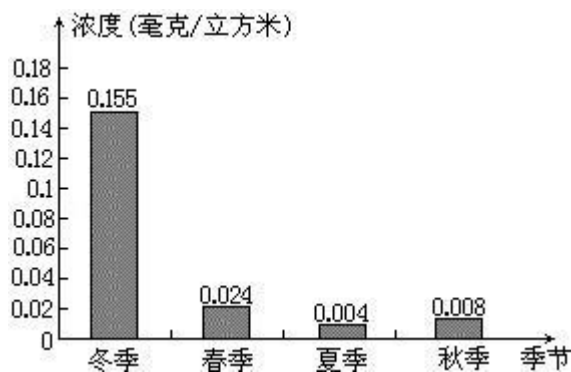
16. (2分) 如图, 小明同学测量一个光盘的直径, 他只有一把直尺和一块三角板, 他将直尺、光盘和三角板如图放置于桌面上, 并量出 $AB = 3.5\text{cm}$, 则此光盘的直径是_____ cm .



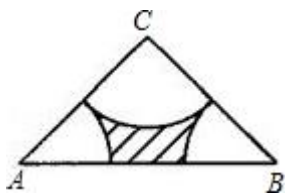
17. (2分) 如图, 点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上, AB 垂直于 x 轴, 若 $S_{\triangle AOB} = 4$, 那么这个反比例函数的解析式为_____.



18. (2分) 如图, 这是某市环境监测中心监测统计的 2003 年该市市区空气中二氧化硫各季节日均值的统计图, 空气中二氧化硫含量最高的季节与最低的季节的浓度之差等于_____毫克/立方米.



19. (2分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $CA = CB = 2$. 分别以 A 、 B 、 C 为圆心, 以 $\frac{1}{2}AC$ 为半径画弧, 三条弧与边 AB 所围成的阴影部分的面积是_____. (保留 π)



20. (2分) 已知 $\odot O$ 的直径为 6, 弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$, 由这条弦及弦所对的弧组

成的弓形的高是_____.

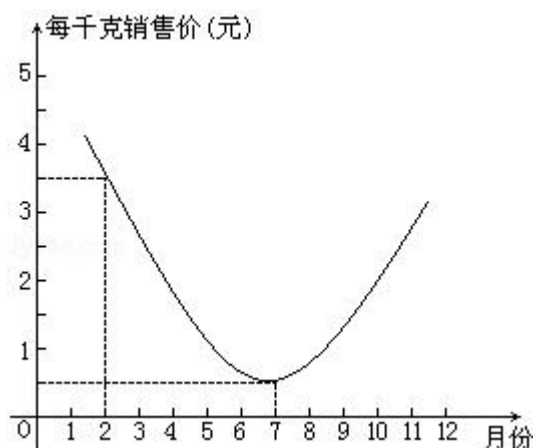
三、解答题(21题6分,22题8分,23题10分,本题共24分)

21.(6分)计算: $\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\sqrt{12}-(\sqrt{3}+1)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}$.

22.(8分)某农场种植一种蔬菜,销售员张平根据往年的销售情况,对今年这种蔬菜的销售价格进行了预测,预测情况如图,图中的抛物线(部分)表示这种蔬菜销售价与月份之间的关系.观察图象,你能得到关于这种蔬菜销售情况的哪些信息?

答题要求:(1)请提供四条信息;

(2)不必求函数的解析式.



23.(10分)某校八年级学生开展踢毽子比赛活动,每班派5名学生参加,按团体总分多少排列名次,在规定时间内每人踢100个以上(含100)为优秀,下表是成绩最好的甲班和乙班5名学生的比赛数据:

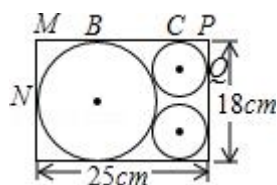
	1号	2号	3号	4号	5号	总分
甲班	100	98	100	89	103	500
乙班	89	100	95	119	97	500

经统计发现两班总分相等,此时有学生建议,可以通过考查数据中的其他信息为参考,回答下列问题:

- (1)计算两班的优秀率为:甲班_____% , 乙班_____%.
- (2)计算两班比赛数据的中位数为:甲班____个, 乙班____个.
- (3)估计____班比赛数据的方差小.
- (4)根据以上三条信息,你认为应该把冠军奖状发给____班.

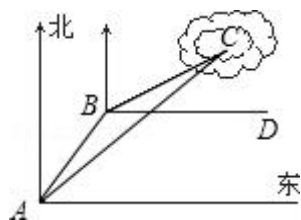
四、解答题（本题共 10 分）

- 24.（10 分）某乡薄铁社厂的王师傅要在长 25cm ，宽 18cm 的薄铁板上截出一个最大的圆和两个尽可能大的小圆，他先画了草图，但他在求小圆的半径时遇到了困难，请你帮助王师傅计算出这两个小圆的半径．



五、解答题（本题共 10 分）

- 25.（10 分）一艘渔船在 A 处观测到东北方向有一小岛 C ，已知小岛 C 周围 4.8 海里范围内是水产养殖场．渔船沿北偏东 30° 方向航行 10 海里到达 B 处，在 B 处测得小岛 C 在北偏东 60° 方向，这时渔船改变航线向正东（即 BD ）方向航行，这艘渔船是否有进入养殖场的危险？



六、解答题（本题共 10 分）

- 26.（10 分）某食品批发部准备用 10000 元从厂家购进一批出厂价分别为 16 元和 20 元的甲、乙两种酸奶，然后将甲、乙两种酸奶分别加价 20% 和 25% 向外销售．如果设购进甲种酸奶为 x （箱），全部售出这批酸奶所获销售利润为 y （元）．

- （1）求所获销售利润 y （元）与 x （箱）之间的函数关系式；
- （2）根据市场调查，甲、乙两种酸奶在保质期内销售量都不超过 300 箱，那么食品批发部怎样进货获利最大，最大销售利润是多少？

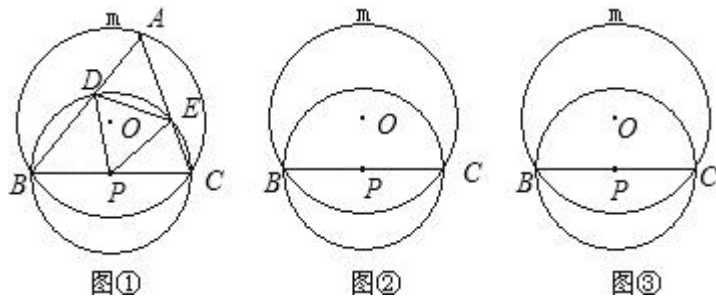
七、解答题（本题共 12 分）

- 27.（12 分）如图， $\odot O$ 与 $\odot P$ 相交于 B 、 C 两点， BC 是 $\odot P$ 的直径，且把 $\odot O$ 分成度数的比为 $1:2$ 的两条弧， A 是 $\widehat{BmC}$ 上的动点（不与 B 、 C 重合），连接 AB 、 AC 分别交 $\odot P$ 于 D 、 E 两点．

- （1）当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形（图①）时，判断 $\triangle PDE$ 的形状，并证明你的结论；

(2) 当 $\triangle ABC$ 是直角三角形、钝角三角形时, 请你分别在图②、图③中画出相应的图形(不要求尺规作图), 并按图①标记字母;

(3) 在你所画的图形中, (1)的结论是否成立? 请就钝角的情况加以证明.



八、解答题(本题共 14 分)

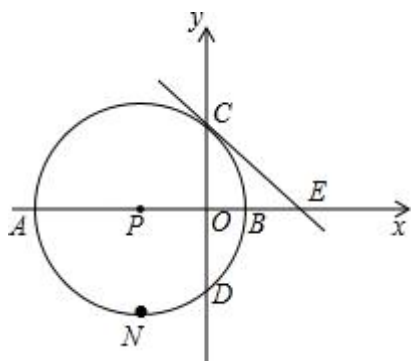
28. (14 分) 如图, 点 P 是 x 轴上一点, 以 P 为圆心的圆分别与 x 轴、 y 轴交于 A 、 B 、 C 、 D 四点, 已知 $A(-3, 0)$ 、 $B(1, 0)$, 过点 C 作 $\odot P$ 的切线交 x 轴于点 E .

(1) 求直线 CE 的解析式;

(2) 若点 F 是线段 CE 上一动点, 点 F 的横坐标为 m , 问 m 在什么范围时, 直线 FB 与 $\odot P$ 相交?

(3) 若直线 FB 与 $\odot P$ 的另一个交点为 N , 当点 N 是 $\widehat{ADB}$ 的中点时, 求点 F 的坐标;

(4) 在 (3) 的条件下, CN 交 x 轴于点 M , 求 $CM \cdot CN$ 的值.



2013 年上海市嘉定区中考数学一模试卷（A 卷）

参考答案与试题解析

一、选择题（下列各题的备选答案中，只有一个是正确的，将正确答案的序号填入题后的括号内.每小题 2 分，本题共 20 分）

1.（2 分）下列根式不是最简二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{a^2+1}$ B. $\sqrt{2x+1}$ C. $\frac{\sqrt{2b}}{4}$ D. $\sqrt{0.1y}$

【考点】74：最简二次根式.

【专题】11：计算题.

【分析】根据最简二次根式的判断标准即可得到正确的选项.

【解答】解： $\sqrt{0.1y} = \frac{\sqrt{10y}}{10}$.

故选：D.

【点评】此题考查了最简二次根式，熟练掌握最简二次根式的定义是解本题的关键.

2.（2 分）设方程 $x^2+x-2=0$ 的两个根为 α ， β ，那么 $(\alpha-1)(\beta-1)$ 的值等于（ ）

A. -4 B. -2 C. 0 D. 2

【考点】AB：根与系数的关系.

【分析】由根与系数的关系可得： $\alpha+\beta=-1$ ， $\alpha\cdot\beta=-2$ ，然后所求的代数式化成 $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\cdot\beta-(\alpha+\beta)+1$ ，再把前面的式子代入即可求出其值.

【解答】解：依题意得 $\alpha+\beta=-1$ ， $\alpha\cdot\beta=-2$ ，

$$\therefore (\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\cdot\beta - (\alpha+\beta) + 1 = -2+1+1 = 0.$$

故选：C.

【点评】本题主要考查一元二次方程根与系数的关系及其应用.

3.（2 分）边长相等的下列两种正多边形的组合，不能作平面镶嵌的是（ ）

A. 正方形与正三角形 B. 正五边形与正三角形
C. 正六边形与正三角形 D. 正八边形与正方形

【考点】L4：平面镶嵌（密铺）.

【分析】分别求出各个正多边形每个内角的度数，再结合镶嵌的条件即可作出判

断.

【解答】解: 正三角形的每个内角是 60° , 正方形的每个内角是 90° , $\therefore 3 \times 60^\circ + 2 \times 90^\circ = 360^\circ$, 能密铺.

正三角形的每个内角是 60° , 正五边形每个内角是 $180^\circ - 360^\circ \div 5 = 108^\circ$,

$$60m + 108n = 360^\circ, \quad m = 6 - \frac{9}{5}n,$$

显然 n 取任何正整数时, m 不能得正整数, 故不能铺满.

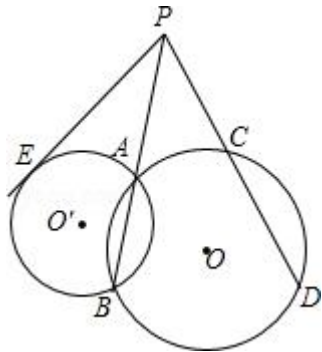
正三角形的每个内角是 60° , 正六边形的每个内角是 120° , $\therefore 2 \times 60^\circ + 2 \times 120^\circ = 360^\circ$, 能密铺.

正八边形的每个内角是 135° , 正方形的每个内角是 90° , $\therefore 2 \times 135^\circ + 90^\circ = 360^\circ$, 能密铺.

故选: B.

【点评】几何图形镶嵌成平面的关键是: 围绕一点拼在一起的多边形的内角加在一起恰好组成一个周角.

4. (2分) 如图, $\odot O$ 和 $\odot O'$ 都经过点 A 和点 B , 点 P 在 BA 的延长线上, 过 P 作 $\odot O$ 的割线 PCD 交 $\odot O$ 于 C 、 D , 作 $\odot O'$ 的切线 PE 切 $\odot O'$ 于 E , 若 $PC = 4$, $CD = 5$, 则 PE 等于 ()



A. 6

B. $2\sqrt{5}$

C. 20

D. 36

【考点】 MH: 切割线定理.

【分析】 根据割线定理得 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, 根据切割线定理得 $PE^2 = PA \cdot PB$, 所以 $PE^2 = PC \cdot PD$, 从而可求得 PE 的长.

【解答】 解: $\because PA \cdot PB = PC \cdot PD$, $PE^2 = PA \cdot PB$, $PC = 4$, $CD = 5$,

$$\therefore PE^2 = PC \cdot PD = 36,$$

$$\therefore PE = 6.$$

故选：A.

【点评】注意：割线定理和切割线定理的运用必须在同一个圆中．这里借助割线 PAB ，把要求的线段和已知线段建立了关系．

5. (2分) 若反比例函数 $y = \frac{k-3}{x}$ 的图象在每一象限内， y 随 x 的增大而增大，则有 ()

- A. $k \neq 0$ B. $k \neq 3$ C. $k < 3$ D. $k > 3$

【考点】G4：反比例函数的性质．

【分析】由题意及反比例函数图象的性质即可得出结果．

【解答】解： $\because$ 反比例函数的图象， y 随 x 的增大而增大，

$\therefore k - 3 < 0$ ，则 $k < 3$ ．

故选：C.

【点评】此题主要考查反比例函数图象的性质：①、 $k > 0$ 时，图象是位于一、三象限，在每个象限双曲线内， y 随 x 的增大而减小．②、 $k < 0$ 时，图象是位于二、四象限，在每个象限的双曲线内， y 随 x 的增大而增大．

6. (2分) 已知二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$ 的顶点坐标和对称轴分别是 ()

- A. $(1, 2)$ $x = 1$ B. $(-1, 2)$ $x = -1$
C. $(-4, -5)$ $x = -4$ D. $(4, -5)$ $x = 4$

【考点】H3：二次函数的性质．

【分析】直接根据顶点坐标和对称轴公式可求得．

【解答】解： $\because x = -\frac{b}{2a} = 4$ ， $\frac{4ac-b^2}{4a} = -5$ ，

$\therefore$ 顶点坐标是 $(4, -5)$ ，对称轴是 $x = 4$ ．

故选：D.

【点评】主要考查了求抛物线的顶点坐标、对称轴的方法．

7. (2分) 已知在直角坐标系中，以点 $A(0, 3)$ 为圆心，以 3 为半径作 $\odot A$ ，则直线 $y = kx + 2$ ($k \neq 0$) 与 $\odot A$ 的位置关系是 ()

- A. 相切 B. 相交 C. 相离 D. 与 k 值有关

【考点】D5：坐标与图形性质；MB：直线与圆的位置关系．

【分析】要判断直线 $y = kx + 2$ ($k \neq 0$) 与 $\odot A$ 的位置关系，只需求得直线和 y 轴

的交点与圆心的距离，再根据点到直线的所有线段中，垂线段最短，进行分析.

【解答】解：因为直线 $y=kx+2$ 与 y 轴的交点是 $B(0, 2)$ ，所以 $AB=1$.

则圆心到直线的距离一定小于 1，所以直线和 $\odot A$ 一定相交.

故选：B.

【点评】考查了直线和圆的位置关系与数量之间的联系.

8. (2 分) 如图，一个圆柱形笔筒，量得笔筒的高是 20cm ，底面圆的半径为 5cm ，那么笔筒的侧面积为 ()



- A. 200cm^2 B. $100\pi\text{cm}^2$ C. $200\pi\text{cm}^2$ D. $500\pi\text{cm}^2$

【考点】MQ：圆柱的计算.

【分析】圆柱侧面积 = 底面周长 $\times$ 高.

【解答】解：根据侧面积计算公式可得 $\pi \times 5 \times 2 \times 20 = 200\pi\text{cm}^2$.

故选：C.

【点评】本题主要考查了圆柱体的侧面积的计算，熟知圆柱侧面积 = 底面周长 $\times$ 高是解决本题的关键.

9. (2 分) 用换元法解方程 $\frac{6(x+1)}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x+1} = 7$ ，若设 $\frac{x^2+1}{x+1} = y$ ，则原方程可化为 ()

- A. $y^2 - 7y + 6 = 0$ B. $y^2 + 6y - 7 = 0$ C. $6y^2 - 7y + 1 = 0$ D. $6y^2 + 7y + 1 = 0$

【考点】B4：换元法解分式方程.

【专题】16：压轴题；43：换元法.

【分析】观察方程的两个分式具备的关系，若设 $\frac{x^2+1}{x+1} = y$ ，则原方程另一个分式为 $6 \times \frac{1}{y}$. 可用换元法转化为关于 y 的方程. 去分母、整理即可.

【解答】解：把 $\frac{x^2+1}{x+1} = y$ 代入原方程得： $y + 6 \times \frac{1}{y} = 7$,

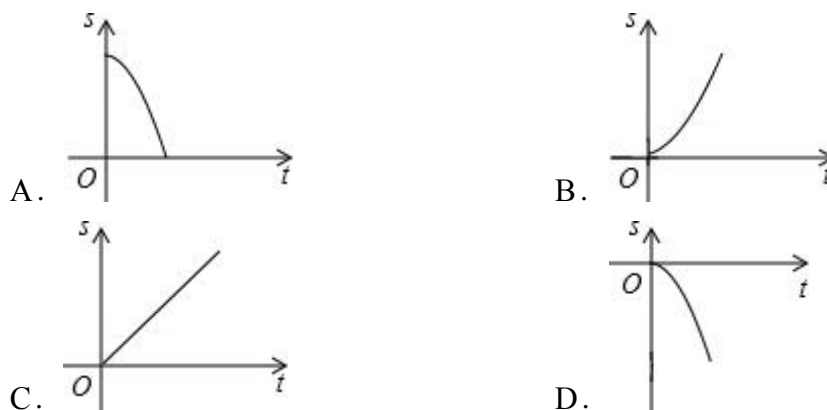
方程两边同乘以 y 整理得： $y^2 - 7y + 6 = 0$.

故选：A.

【点评】换元法解分式方程时常用方法之一，它能够把一些分式方程化繁为简，化难为易，对此应注意总结能用换元法解的分式方程的特点，寻找解题技巧.

10. (2分) 苹果熟了，从树上落下所经过的路程 s 与下落的时间 t 满足 $s = \frac{1}{2}gt^2$

(g 是不为 0 的常数)，则 s 与 t 的函数图象大致是 ()



【考点】H2：二次函数的图象；HE：二次函数的应用.

【专题】16：压轴题.

【分析】根据 s 与 t 的函数关系，可判断二次函数，图象是抛物线；再根据 s 、 t 的实际意义，判断图象在第一象限.

【解答】解：∵ $s = \frac{1}{2}gt^2$ 是二次函数的表达式，

∴ 二次函数的图象是一条抛物线.

又 ∵ $\frac{1}{2}g > 0$,

∴ 应该开口向上，

∴ 自变量 t 为非负数，

∴ s 为非负数.

图象是抛物线在第一象限的部分.

故选：B.

【点评】应熟练掌握二次函数的图象有关性质：二次函数的图象是一条抛物线；

当 $a > 0$ 时，开口向上；当 $a < 0$ 时，开口向下.

二、填空题（每小题 2 分，本题共 20 分）

11. (2分) 函数 $y = \frac{\sqrt{2x+1}}{x-1}$ 中自变量 x 的取值范围是 $x \geq -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 1$.

【考点】E4：函数自变量的取值范围.

【分析】根据被开方数大于等于 0，分母不等于 0 列式求解即可．

【解答】解：根据题意得， $2x+1 \geq 0$ 且 $x-1 \neq 0$ ，

解得 $x \geq -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 1$ ．

故答案为： $x \geq -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 1$ ．

【点评】本题考查了函数自变量的范围，一般从三个方面考虑：

- (1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；
- (2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；
- (3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数非负．

12. (2 分) 若关于 x 的方程 $x^2+5x+k=0$ 有实数根，则 k 的取值范围是 $k \leq \frac{25}{4}$ ．

【考点】AA：根的判别式．

【分析】判断上述方程的根的情况，只要看根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的值的符号就可以了．关于 x 的方程 $x^2+5x+k=0$ 有实数根， $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ．

【解答】解： $\because a=1, b=5, c=k$ ，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times k = 25 - 4k \geq 0,$$

$$\therefore k \leq \frac{25}{4}.$$

【点评】总结：一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：

- (1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；
- (2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；
- (3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根．

13. (2 分) 圆和圆有多种位置关系，与图中不同的圆和圆的位置关系是__相切__．



【考点】MJ：圆与圆的位置关系．

【分析】要求图形中圆与圆的位置关系，可以观察两圆之间的交点的个数，两个交点两圆相交，一个交点两圆相切，没有交点两圆相离．

【解答】解：依题意得：第一个图中两圆相离；第二个图中两圆内含；第三个图中两圆相离或相交，

因此与图中圆与圆的位置关系没有相切．

【点评】此题考查的是圆与圆的位置关系，根据图形两个交点两圆相交，一个交点两圆相切，没有交点两圆相离.

14. (2分) 若点 $A(2, m)$ 在函数 $y = x^2 - 1$ 的图象上，则点 A 关于 x 轴的对称点的坐标是 $(2, -3)$.

【考点】H5: 二次函数图象上点的坐标特征; P5: 关于 x 轴、 y 轴对称的点的坐标.

【分析】先求点 A 的坐标，再根据关于 x 轴对称点的坐标特点求对称点.

【解答】解：把点 $A(2, m)$ 代入 $y = x^2 - 1$ 中，得 $m = 4 - 1 = 3$ ，即 $A(2, 3)$ ，根据“关于 x 轴对称的点，横坐标相同，纵坐标互为相反数”可知：点 A 关于 x 轴的对称点的坐标是 $(2, -3)$.

【点评】解决本题的关键是掌握好对称点的坐标规律.

15. (2分) 方程组 $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=4 \end{cases}, \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=3 \end{cases}$.

【考点】AF: 高次方程.

【分析】把 (1) 变形代入 (2) 得 $x^2 - 7x + 12 = 0$ ，然后求解.

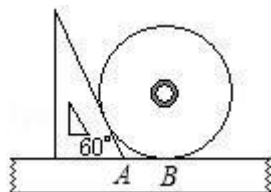
【解答】解：把 (1) 变形代入 (2) 得 $x^2 - 7x + 12 = 0$ ，解得： $x = 3$ 或 4 ，

$\therefore$ 原方程组的解是： $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=4 \end{cases}, \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=3 \end{cases}$.

故本题答案为： $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=4 \end{cases}, \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=3 \end{cases}$.

【点评】解二元二次方程组的关键是消元，降次.

16. (2分) 如图，小明同学测量一个光盘的直径，他只有一把直尺和一块三角板，他将直尺、光盘和三角板如图放置于桌面上，并量出 $AB = 3.5\text{cm}$ ，则此光盘的直径是 $7\sqrt{3}$ cm .



【考点】MH: 切割线定理; T7: 解直角三角形.

【分析】设圆的圆心是 O ，连接 OB ， OA ，根据已知可求得 OB 的长，即可得到圆的直径．

【解答】解：设圆的圆心是 O ，连接 OB ， OA ， OC ．

$\because AC, AB$ 与 $\odot O$ 相切，

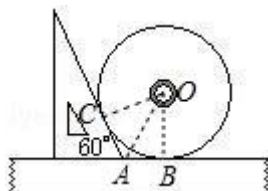
$$\therefore \angle OAB = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ, \quad \angle OBA = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中，

$$\because AB = 3.5,$$

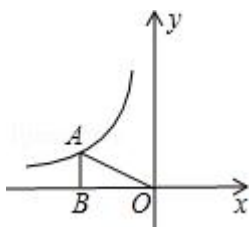
$$\therefore OB = AB \tan 60^\circ = 3.5\sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{圆的直径是 } 7\sqrt{3}\text{cm}.$$



【点评】此题综合运用了切线的性质定理、切线长定理以及锐角三角函数的知识．

17. (2分) 如图，点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上， AB 垂直于 x 轴，若 $S_{\triangle AOB} = 4$ ，那么这个反比例函数的解析式为 $y = -\frac{8}{x}$ ．



【考点】G5：反比例函数系数 k 的几何意义．

【专题】31：数形结合．

【分析】因为过双曲线上任意一点引 x 轴、 y 轴垂线，所得矩形面积 S 是个定值 $|k|$ ， $\triangle AOB$ 的面积为矩形面积的一半，即 $\frac{1}{2}|k|$ ．

【解答】解：由于点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上，

$$\text{则 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|k| = 4, \quad k = \pm 8;$$

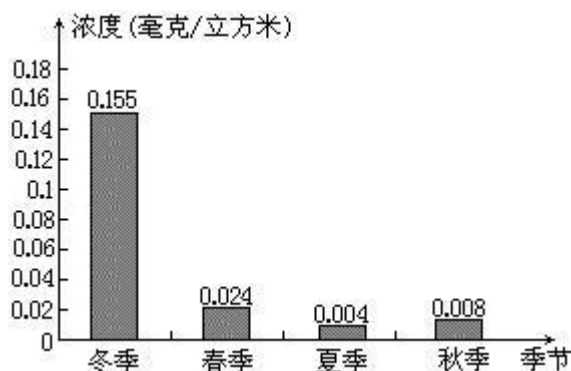
又由于函数的图象在第二象限， $k < 0$ ，

$$\text{则 } k = -8, \text{ 所以反比例函数的解析式为 } y = -\frac{8}{x}.$$

故答案为: $y = -\frac{8}{x}$.

【点评】此题主要考查了反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中 k 的几何意义, 即过双曲线上任意一点引 x 轴、 y 轴垂线, 所得矩形面积为 $|k|$, 是经常考查的一个知识点; 这里体现了数形结合的思想, 做此类题一定要正确理解 k 的几何意义.

18. (2 分) 如图, 这是某市环境监测中心监测统计的 2003 年该市市区空气中二氧化硫各季节日均值的统计图, 空气中二氧化硫含量最高的季节与最低的季节的浓度之差等于 0.151 毫克/立方米.



【考点】VC: 条形统计图.

【专题】27: 图表型.

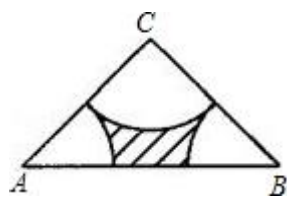
【分析】由条形统计图可知: 2003 年该市市区空气中二氧化硫含量最高的季节二氧化硫含量为 0.155 毫克/立方米, 2003 年该市市区空气中二氧化硫含量最低的季节二氧化硫含量为 0.004 毫克/立方米; 则 2003 年该市市区空气二氧化硫含量最高的季节与最低的季节的浓度之差为 $0.155 - 0.004 = 0.151$ 毫克/立方米.

【解答】解: 2003 年该市市区空气二氧化硫含量最高的季节与最低的季节的浓度之差为,

$$0.155 - 0.004 = 0.151 \text{ 毫克/立方米.}$$

【点评】本题考查的是条形统计图的综合运用, 读懂统计图, 从统计图中得到必要的信息是解决本题的关键.

19. (2 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $CA = CB = 2$. 分别以 A 、 B 、 C 为圆心, 以 $\frac{1}{2}AC$ 为半径画弧, 三条弧与边 AB 所围成的阴影部分的面积是 $2 - \frac{\pi}{2}$. (保留 π)



【考点】MO：扇形面积的计算．

【专题】16：压轴题．

【分析】三条弧与边 AB 所围成的阴影部分的面积 = 三角形的面积 - 三个小扇形的面积．

【解答】解： $2 \times 2 \div 2 - \frac{90\pi \times 1}{360} - \frac{45\pi \times 1 \times 2}{360} = 2 - \frac{\pi}{2}$ ．

【点评】本题的关键是理解阴影部分的面积 = 三角形的面积 - 三个小扇形的面积．

20. (2分) 已知 $\odot O$ 的直径为 6，弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$ ，由这条弦及弦所对的弧组成的弓形的高是 $3+\sqrt{6}$ 或 $3-\sqrt{6}$ ．

【考点】KQ：勾股定理；M2：垂径定理．

【专题】16：压轴题．

【分析】此题只需先求得弦的弦心距．因为弦所对的弧有两条，所以弦所对的弧组成的弓形高有两种情况．

【解答】解：根据垂径定理，得半弦是 $\sqrt{3}$ ，在由半径、半弦和弦心距组成的直角三角形中，根据勾股定理，得弦心距 = $\sqrt{9-3} = \sqrt{6}$ ，

因为弦所对的弧有两条，所以弦所对的弧组成的弓形高是 $3+\sqrt{6}$ 或 $3-\sqrt{6}$ ．

【点评】此题注意两种情况，熟练运用垂径定理和勾股定理求得弦的弦心距．

三、解答题 (21 题 6 分，22 题 8 分，23 题 10 分，本题共 24 分)

21. (6分) 计算： $\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \sqrt{12} - (\sqrt{3}+1)^2 + \sqrt{\frac{3}{4}}$ ．

【考点】79：二次根式的混合运算．

【分析】本题涉及二次根式化简运算．在计算时，需要针对每个部分分别进行计算，然后根据二次根式混合运算法则求得计算结果．

【解答】解法一：原式 = $\frac{\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} + 2\sqrt{3} - (4+2\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \frac{3\sqrt{3}-3}{6} + 2\sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \sqrt{3} - \frac{9}{2};$$

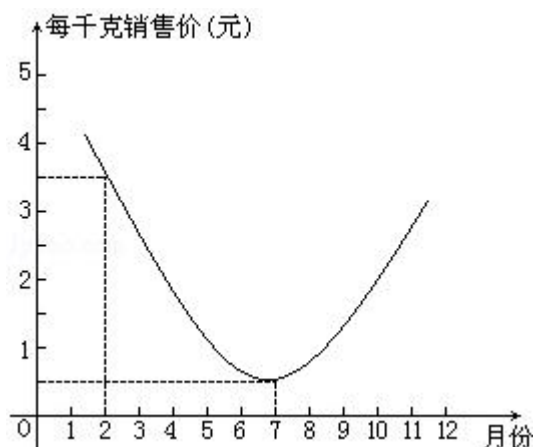
$$\begin{aligned} \text{解法二：原式} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} + 2\sqrt{3} - (4+2\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + 2\sqrt{3} - (4+2\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - 4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} - \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

【点评】 本题考查实数的综合运算能力，是各地中考题中常见的计算题型．解决此类题目的关键是掌握二次根式化简的方法，可以分母有理化，也可以约分．

22. (8分) 某农场种植一种蔬菜，销售员张平根据往年的销售情况，对今年这种蔬菜的销售价格进行了预测，预测情况如图，图中的抛物线（部分）表示这种蔬菜销售价与月份之间的关系．观察图象，你能得到关于这种蔬菜销售情况的哪些信息？

答题要求：(1) 请提供四条信息；

(2) 不必求函数的解析式．



【考点】 HE：二次函数的应用．

【分析】 可从最高点、最低点、特殊点、对称点等方面读取相关信息．如：最低点坐标为 (7, 0.5) 表示 7 月份每千克售价是 0.5 元；特殊点 (2, 3.5) 表示 2 月份售价是每千克 3.5 元；1 - - 7 月份售价逐月降低，7 - - 12 月份售价逐月升高．…

【解答】 解：由题意得：

(1) 2 月份每千克销售价是 3.5 元；

- (2) 7 月份每千克销售价是 0.5 元；
- (3) 1 月到 7 月的销售价逐月下降；
- (4) 7 月到 12 月的销售价逐月上升；
- (5) 2 月与 7 月的销售差价是每千克 3 元；
- (6) 7 月份销售价最低，1 月份销售价最高；
- (7) 6 月与 8 月、5 月与 9 月、4 月与 10 月、3 月与 11 月，2 月与 12 月的销售价相同；等等.

【点评】 观察图形从中获取相关信息是学习函数知识的基本功，应根据题意数形结合，从特殊性入手逐步深入.

23. (10 分) 某校八年级学生开展踢毽子比赛活动，每班派 5 名学生参加，按团体总分多少排列名次，在规定时间内每人踢 100 个以上 (含 100) 为优秀，下表是成绩最好的甲班和乙班 5 名学生的比赛数据：

	1 号	2 号	3 号	4 号	5 号	总分
甲班	100	98	100	89	103	500
乙班	89	100	95	119	97	500

经统计发现两班总分相等，此时有学生建议，可以通过考查数据中的其他信息为参考，回答下列问题：

- (1) 计算两班的优秀率为：甲班 60 %，乙班 40 %.
- (2) 计算两班比赛数据的中位数为：甲班 100 个，乙班 97 个.
- (3) 估计 甲 班比赛数据的方差小.
- (4) 根据以上三条信息，你认为应该把冠军奖状发给 甲 班.

【考点】 W4：中位数；W6：极差；W7：方差.

【专题】 27：图表型.

【分析】 (1) 优秀率就是优秀的人数与总人数的百分比；

- (2) 中位数就是一组数据中先把所有数据按从大到小或从小到大的顺序排列起来，如果是奇数个时，就是中间的那一个数，如果是偶数个时，就是中间两个数的平均数；

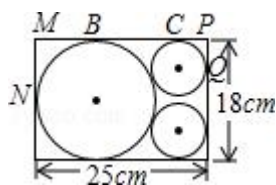
- (3) 方差就是就是反映一组数据波动大小的幅度，方差大，波动大，方差小则波动小.

【解答】解：(1) 甲班优秀率为 $\frac{3}{5} \times 100\% = 60\%$ ，乙班优秀率为 $\frac{2}{5} \times 100\% = 40\%$ 。

(3) 估计甲班 5 名学生比赛成绩的方差小.

【点评】本题考查了优秀率、中位数、方差的概念，并且运用它们的意义解决问题。

24. (10 分) 某乡薄铁社厂的王师傅要在长 25cm , 宽 18cm 的薄铁板上截出一个最大的圆和两个尽可能大的小圆, 他先画了草图, 但他在求小圆的半径时遇到了困难, 请你帮助王师傅计算出这两个小圆的半径.



【专题】 12: 应用题.

【解答】解：设 $\odot O$ ， $\odot O_1$ 与矩形的一边的切点分别为 B ， C （如图所示）.

由题中条件易知 $\odot O$ 的直径为 18cm ,

设 $\odot O_1$ 的半径为 r , 则 $O_1C = r$.

得四边形 AO_1CB 是矩形, $AB = O_1C = r$.

第 19 页 (共 28 页)

在 $\text{Rt}\triangle OAO_1$ 中, $OO_1^2 = AO^2 + AO_1^2$,

$$\text{即 } (9+r)^2 = (9-r)^2 + (25-9-r)^2,$$

解这个方程得 $r_1 = 4$, $r_2 = 64$.

$$\because 64 > 18,$$

$\therefore r = 64$ 不合题意, 取 $r = 4$,

即小圆的半径为 4cm ;

另解: 如图, 连接 OO_1 、 O_1O_2 、 O_2O , 则 $\triangle OO_1O_2$ 是等腰三角形.

作 $OA \perp O_1O_2$, 垂足为 A , 则 $O_1A = O_2A$. $\cdots 2$ 分

$\because$ 薄铁板的宽是 18cm ,

$\therefore$ 大圆的半径是 9cm . 设小圆的半径为 $x\text{cm}$,

$$\text{则 } OO_1 = 9+x, O_1A = \frac{1}{2}O_1O_2 = \frac{1}{2}(18-x-x) = 9-x, OA = 25-9-x,$$

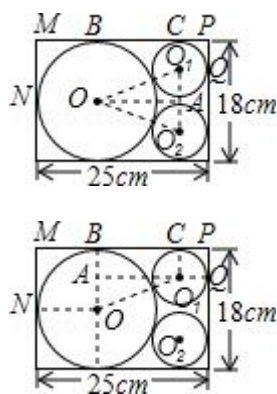
在 $\text{Rt}\triangle OAO_1$ 中, $OO_1^2 = OA^2 + O_1A^2$, 即 $(9+x)^2 = (9-x)^2 + (25-9-x)^2$. $\cdots$

5 分

整理, 得 $x^2 - 68x + 256 = 0$. 解得 $x_1 = 4$, $x_2 = 64$. $\cdots 8$ 分

$\because x_2 = 64 > 9$, 不合题意, 舍去. $\therefore x = 4$.

答: 两个小圆的半径是 4cm . $\cdots 10$ 分



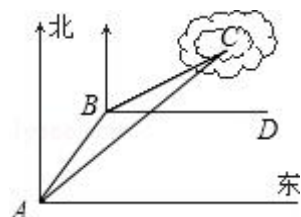
【点评】 本题考查圆与圆外切时两圆的位置关系及圆心距与两圆半径间的关系,

解答此类题关键是通过图形找到等量关系.

五、解答题 (本题共 10 分)

25. (10 分) 一艘渔船在 A 处观测到东北方向有一小岛 C , 已知小岛 C 周围 4.8 海里范围内是水产养殖场. 渔船沿北偏东 30° 方向航行 10 海里到达 B 处,

在 B 处测得小岛 C 在北偏东 60° 方向，这时渔船改变航线向正东（即 BD ）方向航行，这艘渔船是否有进入养殖场的危险？



【考点】 TB：解直角三角形的应用 - 方向角问题.

【专题】 11：计算题；16：压轴题.

【分析】 过点 B 作 $BM \perp AH$ 于 M ，过点 C 作 $CN \perp AH$ 于 N ，利用直角三角形的性质求得 CK 的长，若 $CK > 4.8$ 则没有进入养殖场的危险，否则有危险.

【解答】 解：解法一，过点 B 作 $BM \perp AH$ 于 M ，

$$\therefore BM \parallel AF.$$

$$\therefore \angle ABM = \angle BAF = 30^\circ$$

$$\text{在 } \triangle BAM \text{ 中, } AM = \frac{1}{2}AB = 5, \quad BM = 5\sqrt{3}$$

过点 C 作 $CN \perp AH$ 于 N ，交 BD 于 K

$$\text{在 Rt} \triangle BCK \text{ 中, } \angle CBK = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\text{设 } CK = x, \text{ 则 } BK = \sqrt{3}x$$

在 $\text{Rt} \triangle ACN$ 中，

$\because$ 在 A 处观测到东北方向有一小岛 C ，

$$\therefore \angle CAN = 45^\circ,$$

$$\therefore AN = NC.$$

$$\therefore AM + MN = CK + KN$$

$$\text{又 } NM = BK, \quad BM = KN$$

$$\therefore x + 5\sqrt{3} = 5 + \sqrt{3}x. \text{ 解得 } x = 5$$

$$\because 5 \text{ 海里} > 4.8 \text{ 海里},$$

$\therefore$ 渔船没有进入养殖场的危险

答：这艘渔船没有进入养殖场危险；

解法二，过点 C 作 $CE \perp BD$ ，垂足为 E ，如图：

$$\therefore CE \parallel GB \parallel FA.$$

$$\therefore \angle BCE = \angle GBC = 60^\circ, \quad \angle ACE = \angle FAC = 45^\circ$$

$$\therefore \angle BCA = \angle BCE - \angle ACE = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

$$\text{又 } \angle BAC = \angle FAC - \angle FAB = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$

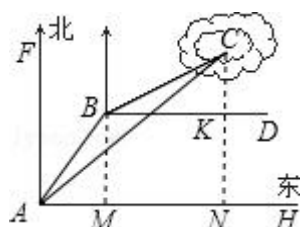
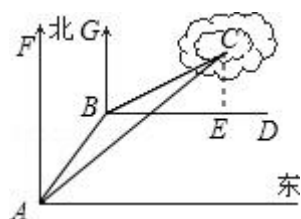
$$\therefore \angle BCA = \angle BAC,$$

$$\therefore BC = AB = 10$$

在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中, $CE = BC \cdot \cos \angle BCE = BC \cdot \cos 60^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = 5$ (海里)

$\because 5 \text{ 海里} > 4.8 \text{ 海里}$, $\therefore$ 渔船没有进入养殖场的危险

答: 这艘渔船没有进入养殖场的危险.



【点评】 解一般三角形, 求三角形的边或高的问题一般可以转化为解直角三角形的问题, 解决的方法就是作高线.

六、解答题 (本题共 10 分)

26. (10 分) 某食品批发部准备用 10000 元从厂家购进一批出厂价分别为 16 元和 20 元的甲、乙两种酸奶, 然后将甲、乙两种酸奶分别加价 20% 和 25% 向外销售. 如果设购进甲种酸奶为 x (箱), 全部售出这批酸奶所获销售利润为 y (元).

- (1) 求所获销售利润 y (元) 与 x (箱) 之间的函数关系式;
- (2) 根据市场调查, 甲、乙两种酸奶在保质期内销售量都不超过 300 箱, 那么食品批发部怎样进货获利最大, 最大销售利润是多少?

【考点】 FH: 一次函数的应用.

【分析】 (1) 本题的等量关系是销售利润 = 购甲种酸奶的费用 $\times$ 20% + 购乙种酸奶的费用 $\times$ 25%. 可根据此等量关系得出 y 与 x 的函数关系式;

(2) 可根据“甲、乙两种酸奶在保质期内销售量都不超过 300 箱”, 先求出自变量的取值范围, 然后根据 (1) 中得出的函数的性质和自变量的取值范围, 求

出利润最大的方案.

【解答】解:(1)根据题意,得: $y = 16 \cdot x \cdot 20\% + (10000 - 16x) \cdot 25\% = -0.8x + 2500$;

$$(2) \text{ 由题意知, } \begin{cases} 0 \leq x \leq 300 \\ 0 \leq \frac{10000-16x}{20} \leq 300 \end{cases},$$

解得 $250 \leq x \leq 300$,

由(1)知 $y = -0.8x + 2500$,

$\because k = -0.8 < 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小

$\therefore$ 当 $x = 250$ 时, y 值最大, 此时 $y = -0.8 \times 250 + 2500 = 2300$ (元)

$$\therefore \frac{10000-16x}{20} = \frac{10000-16 \times 250}{20} = 300 \text{ (箱)}.$$

答: 当购进甲种酸奶 250 箱, 乙种酸奶 300 箱时, 所获销售利润最大, 最大销售利润为 2300 元.

【点评】本题是利用一次函数的有关知识解答实际应用题, 利用一次函数求最值时, 主要应用一次函数的性质.

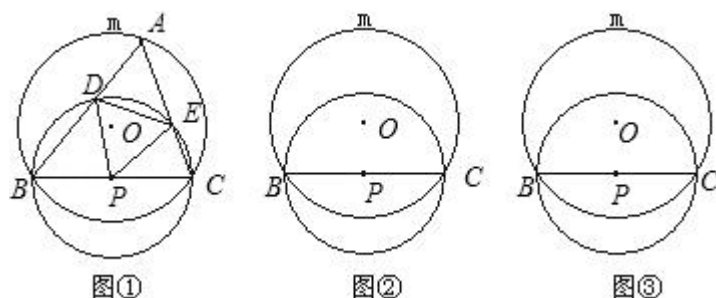
七、解答题 (本题共 12 分)

27. (12 分) 如图, $\odot O$ 与 $\odot P$ 相交于 B 、 C 两点, BC 是 $\odot P$ 的直径, 且把 $\odot O$ 分成度数的比为 1:2 的两条弧, A 是 $\widehat{BmC}$ 上的动点 (不与 B 、 C 重合), 连接 AB 、 AC 分别交 $\odot P$ 于 D 、 E 两点.

(1) 当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形 (图①) 时, 判断 $\triangle PDE$ 的形状, 并证明你的结论;

(2) 当 $\triangle ABC$ 是直角三角形、钝角三角形时, 请你分别在图②、图③中画出相应的图形 (不要求尺规作图), 并按图①标记字母;

(3) 在你所画的图形中, (1) 的结论是否成立? 请就钝角的情况加以证明.



【考点】KL: 等边三角形的判定; M4: 圆心角、弧、弦的关系; M5: 圆周角

定理.

【专题】13: 作图题; 16: 压轴题.

【分析】(1) 因为 BC 将圆 O 分成 1: 2 两条弧, 那么弧 BC 的度数就是 120° , 我们要利用这个度数来求解, 连接 DC , 那么 $\angle BAC = 60^\circ$, 而 BC 是圆 P 的直径, 那么 $\angle ACD = 30^\circ$, 而 $\angle ACD$ 所对的弧 DE , 圆 P 的圆心角 $\angle DPE$ 也正好对着这条弧, 因此根据圆周角定理可得出 $\angle DPE = 60^\circ$, 而 $PD = PE$, 因此三角形 PDE 是等边三角形;

(3) 结论仍然成立, 方法与 (1) 相同.

【解答】解: (1) $\triangle PDE$ 是等边三角形, 连 DC .

$\because$ 弦 BC 把 $\odot O$ 分成度数的比为 1: 2 的两条弧,

$\therefore \widehat{BC}$ 的度数为 120° ,

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$

又 $\because BC$ 为 $\odot P$ 的直径, $\therefore \angle BDC = 90^\circ$,

又 $\because \angle A = 60^\circ$,

$\therefore \angle DCA = 30^\circ$,

$\therefore \angle DPE = 60^\circ$

又 $\because PD = PE$,

$\therefore \triangle PDE$ 是等边三角形;

(2) 如图②、图③即为所画图形;

(3) 图②和图③中 $\triangle PDE$ 仍为等边三角形.

证明: 如图③, 连接 BE 、 DC

$\because BC$ 为 $\odot P$ 的直径,

$\therefore \angle BDC = 90^\circ$

又 $\because \angle A = 60^\circ$,

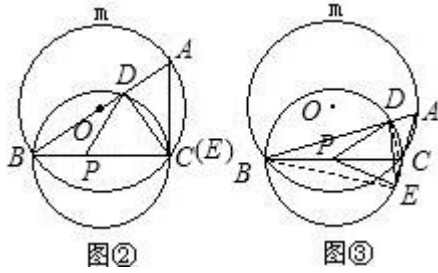
$\therefore \angle ACD = 30^\circ$

又 $\because$ 四边形 $DBEC$ 是 $\odot P$ 的内接四边形,

$\therefore \angle DBE = \angle DCA = 30^\circ$, $\angle DPE = 60^\circ$

又 $\because PD = PE$,

$\therefore \triangle PDE$ 是等边三角形.



【点评】 本题主要考查了圆周角定理，等边三角形的判定等知识点，根据圆周角定理得出角的度数或倍数关系是解题的关键.

八、解答题（本题共 14 分）

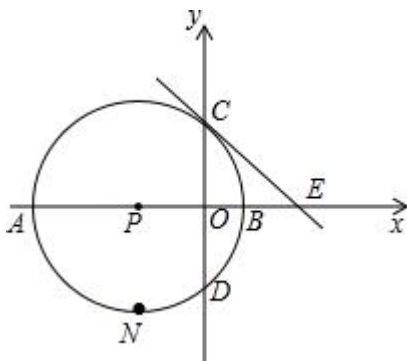
28. (14 分) 如图，点 P 是 x 轴上一点，以 P 为圆心的圆分别与 x 轴、 y 轴交于 A 、 B 、 C 、 D 四点，已知 $A(-3, 0)$ 、 $B(1, 0)$ ，过点 C 作 $\odot P$ 的切线交 x 轴于点 E .

(1) 求直线 CE 的解析式；

(2) 若点 F 是线段 CE 上一动点，点 F 的横坐标为 m ，问 m 在什么范围时，直线 FB 与 $\odot P$ 相交？

(3) 若直线 FB 与 $\odot P$ 的另一个交点为 N ，当点 N 是 $\widehat{ADB}$ 的中点时，求点 F 的坐标；

(4) 在 (3) 的条件下， CN 交 x 轴于点 M ，求 $CM \cdot CN$ 的值.



【考点】 F1: 一次函数综合题.

【专题】 16: 压轴题.

【分析】 (1) 连 PC ，利用 $OC^2 = OA \cdot OB$ ，得 $OC = \sqrt{3}$ ，得 C 的坐标，利用 CE 是 $\odot P$ 的切线，求 E 的坐标，

设直线 CE 的解析式为 $y = kx + b$ ，将 C 、 E 两点坐标代入解析式，可得直线 CE 的解析式；

(2) 当 $0 \leq m \leq 3$ 且 $m \neq 1$ 时，直线 FB 与 $\odot P$ 相交；

(3) 先求得 $N(-1, -2)$ 设直线 NB 的解析式为 $y = kx + b$ ，把 N 、 B 两点坐标代入解析式，

求直线 NB 的解析式．解两直线表达式组成的方程组，求交点坐标；

(4) 连接 AC 、 BC ，点 N 是 $\widehat{ADB}$ 的中点，易证 $\triangle AMC \sim \triangle NBC$ ．所以 $\frac{MC}{BC} = \frac{AC}{NC}$ ，

即 $MC \cdot NC = BC \cdot AC$ ．分别求相关线段的长得解．

【解答】 解：(1) 连 PC ．

$\because A(-3, 0), B(1, 0)$,

$\therefore \odot P$ 的直径是 4，

$\therefore$ 半径 $R = 2$ ， $OP = 1$ ．

又 $\because CD \perp AB$ ， AB 是直径，

$\therefore OC^2 = OA \cdot OB = 3 \times 1 = 3$ ，

$\therefore OC = \sqrt{3}$ ．

$\therefore C(0, \sqrt{3})$. (1 分)

又 $\because \odot P$ 的半径是 2， $OP = 1$ ，

$\therefore \angle PCO = 30^\circ$ ．

又 CE 是 $\odot P$ 的切线，

$\therefore PC \perp CE$ ．

$\therefore \angle PEC = 30^\circ$ ．

$\therefore PE = 2PC = 4$ ， $EO = PE - MP = 3$ ．

$\therefore E(3, 0)$. (2 分)

设直线 CE 的解析式为 $y = kx + b$ ，将 C 、 E 两点坐标代入解析式，

得 $\begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} k = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$ ．

$\therefore$ 直线 CE 的解析式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ ①；(4 分)

(2) $\because m = 1$ 时，直线 FB 与 $\odot P$ 相切， $\therefore m \neq 1$ ．

$$\therefore E(3, 0),$$

$\therefore$ 当 $0 \leq m \leq 3$ 且 $m \neq 1$ 时, 直线 FB 与 $\odot P$ 相交; (6 分)

(3) 解法一: $\because$ 点 N 是 $\widehat{ADB}$ 的中点,

$$\therefore N(-1, -2).$$

设直线 NB 的解析式为 $y = kx + b$, 把 N 、 B 两点坐标代入解析式,

$$\text{得} \begin{cases} k+b=0 \\ -k+b=-2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k=1 \\ b=-1 \end{cases}.$$

$\therefore$ 直线 NB 的解析式为 $y = x - 1$ ②.

$$\text{由①, ②式得} \begin{cases} y=x-1 \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3}-1 \end{cases}.$$

$$\therefore F(\sqrt{3}, \sqrt{3}-1).$$

(10 分)

解法二: 过点 F 作 $FH \perp BE$ 于 H ,

$\because N$ 是 $\widehat{ADB}$ 的中点,

$$\text{则} \angle ABN = \angle FBE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BFH = 45^\circ, \therefore BH = FH.$$

由 (1) 知 $\angle CEP = 30^\circ$,

$$\therefore HE = \sqrt{3}FH.$$

$$\because OE = OB + BH + HE,$$

$$\therefore 1 + FH + \sqrt{3}FH = 3, FH = \sqrt{3} - 1,$$

$$\therefore OH = OB + BH = 1 + (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3}.$$

$$\therefore F(\sqrt{3}, \sqrt{3}-1);$$

(4) 连接 AC 、 BC .

$\because$ 点 N 是 $\widehat{ADB}$ 的中点,

$$\therefore \angle NCA = \angle CAN, \text{又} \angle CAB = \angle CNB,$$

$$\therefore \triangle AMC \sim \triangle NBC.$$

$$\therefore \frac{MC}{BC} = \frac{AC}{NC},$$

$$\therefore MC \cdot NC = BC \cdot AC.$$

