

2012 年上海市松江区中考数学二模试卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 下列二次根式中，属于最简二次根式的是 ()
A. $\sqrt{\frac{1}{2}x}$ B. $\sqrt{8}$ C. $\sqrt{x^2}$ D. $\sqrt{x^2+1}$
2. (4 分) 下列运算正确的是 ()
A. $a+a=a^2$ B. $a^2 \cdot a=2a^3$ C. $a^3 \div a^2=a$ D. $(a^2)^3=a^5$
3. (4 分) 在平面直角坐标系中，点 A 和点 B 关于原点对称，已知点 A 的坐标为 $(-2, 3)$ ，那么点 B 的坐标为 ()
A. $(3, -2)$ B. $(2, -3)$ C. $(-3, 2)$ D. $(-2, -3)$
4. (4 分) 如果正五边形绕着它的中心旋转 α 角后与它本身重合，那么 α 角的大小可以是 ()
A. 36° B. 45° C. 72° D. 90°
5. (4 分) 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，那么下列各式中，正确的是 ()
A. $\sin A = \frac{BC}{AB}$ B. $\cos A = \frac{BC}{AB}$ C. $\tan A = \frac{BC}{AB}$ D. $\cot A = \frac{BC}{AB}$
6. (4 分) 下列四个命题中真命题是 ()
A. 矩形的对角线平分对角
B. 菱形的对角线互相垂直平分
C. 梯形的对角线互相垂直
D. 平行四边形的对角线相等

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. (4 分) 计算： $2^{-2} =$ _____.
8. (4 分) 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x + a = 0$ 有两个不相等的实数根，那么 a 的取值范围是_____.
9. (4 分) 方程 $\sqrt{2x+1}=3$ 的解是_____.
10. (4 分) 用换元法解方程 $x^2 - 2x - \frac{2}{x^2 - 2x} = 1$ 时，如设 $y = x^2 - 2x$ ，则将原方程化

为关于 y 的整式方程是_____.

11. (4分) 已知函数 $f(x) = \frac{3}{x-1}$, 那么 $f(4) =$ _____.

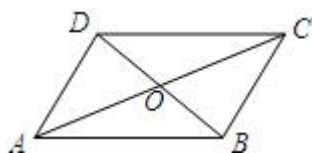
12. (4分) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $A(-3, 2)$, 那么 $k =$ _____.

13. (4分) 已知包裹邮资为每千克 2 元, 每件另加手续费 3 元, 若一件包裹重 x 千克, 则该包裹邮资 y (元) 与重量 x (千克) 之间的函数关系式为_____.

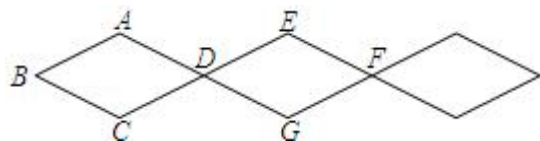
14. (4分) 在一个不透明的口袋中, 装有 4 个红球和 6 个白球, 除颜色不同外其余都相同, 从口袋中任意摸一个球摸到的是红球的概率为_____.

15. (4分) 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切, $O_1O_2 = 8$, 若 $\odot O_1$ 的半径为 3, 则 $\odot O_2$ 的半径为_____.

16. (4分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 设 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{DO} =$ _____.



17. (4分) 如图是利用四边形的不稳定性制作的菱形凉衣架. 已知其中每个菱形的边长为 13cm , $\cos \angle ABC = \frac{5}{13}$, 那么凉衣架两顶点 A 、 E 之间的距离为 cm .



18. (4分) 将一个平面图形分成面积相等的两部分的直线叫做该平面图形的“面线”, “面线”被这个平面图形截得的线段叫做该图形的“面径”, 例如圆的直径就是它的“面径”. 已知等边三角形的边长为 2, 则它的“面径”长可以是 (写出 2 个).

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

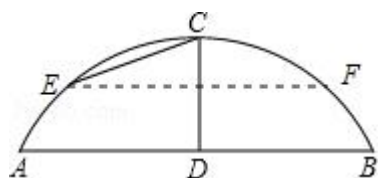
19. (10分) 计算: $(\frac{a+1}{a^2-a} - \frac{4}{a^2-1}) \div \frac{a^2+2a-3}{a+3}$.

20. (10分) 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

21. (10分) 某公园有一圆弧形的拱桥, 如图已知拱桥所在圆的半径为 10 米, 拱桥顶 D 到水面 AB 的距离 $DC = 4$ 米.

(1) 求水面宽度 AB 的大小;

(2) 当水面上升到 EF 时, 从点 E 测得桥顶 D 的仰角为 α , 若 $\cot \alpha = 3$, 求水面上升的高度.



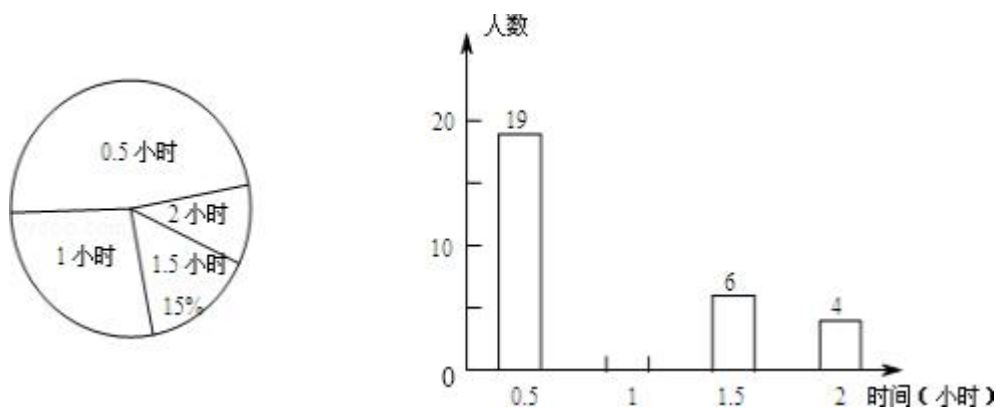
22. (10分) 随着“微博潮”的流行, 初中学生也开始忙着“织围脖”, 某校在上微博的 280 名学生中随机抽取了部分学生调查他们平常每天上微博的时间, 绘制了扇形统计图和频数分布直方图, 请根据图中信息, 回答下列问题:

(1) 本次调查共抽取了_____名学生; 将频数分布直方图补充完整;

(2) 被调查的学生中上微博时间中位数落在_____这一小组内;

(3) 样本中, 平均每天上微博的时间为 0.5 小时这一组的频率是_____;

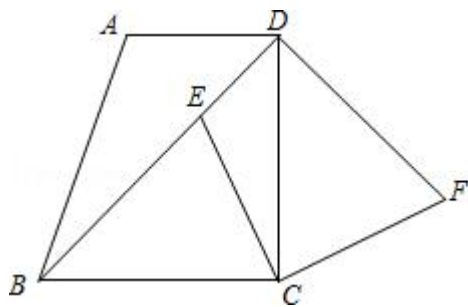
(4) 请估计该校上微博的学生中, 大约有_____名学生平均每天上微博的时间不少于 1 小时.



23. (12分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle BCD = 90^\circ$, $BC = DC$, 点 E 在对角线 BD 上, 作 $\angle ECF = 90^\circ$, 连接 DF , 且满足 $CF = EC$.

(1) 求证: $BD \perp DF$.

(2) 当 $BC^2 = DE \cdot DB$ 时, 试判断四边形 $DECF$ 的形状, 并说明理由.



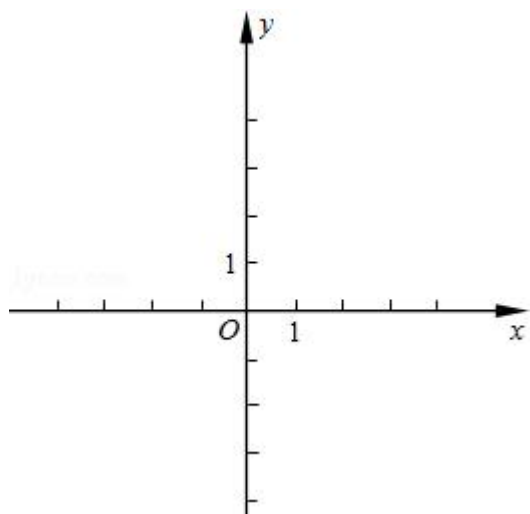
24. (12分) 已知直线 $y = 3x - 3$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A, B , 抛物线 $y = ax^2 + 2x + c$ 经过点 A, B .

(1) 求该抛物线的表达式, 并写出该抛物线的对称轴和顶点坐标;

(2) 记该抛物线的对称轴为直线 l , 点 B 关于直线 l 的对称点为 C , 若点 D 在 y 轴的正半轴上, 且四边形 $ABCD$ 为梯形.

①求点 D 的坐标;

②将此抛物线向右平移, 平移后抛物线的顶点为 P , 其对称轴与直线 $y = 3x - 3$ 交于点 E , 若 $\tan \angle DPE = \frac{3}{7}$, 求四边形 $BDEP$ 的面积.

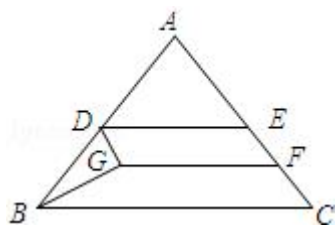


25. (14分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10$, $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$, 点 D 在 AB 边上 (点 D 与点 A, B 不重合), $DE \parallel BC$ 交 AC 边于点 E , 点 F 在线段 EC 上, 且 $EF = \frac{1}{4}AE$, 以 DE, EF 为邻边作平行四边形 $DEFG$, 连接 BG .

(1) 当 $EF = FC$ 时, 求 $\triangle ADE$ 的面积;

(2) 设 $AE = x$, $\triangle DBG$ 的面积为 y , 求 y 与 x 的函数关系式, 并写出 x 的取值范围;

(3) 如果 $\triangle DBG$ 是以 DB 为腰的等腰三角形，求 AD 的值.



2012 年上海市松江区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）下列二次根式中，属于最简二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{\frac{1}{2}x}$ B. $\sqrt{8}$ C. $\sqrt{x^2}$ D. $\sqrt{x^2+1}$

【考点】74：最简二次根式.

【分析】判定一个二次根式是不是最简二次根式的方法，就是逐个检查最简二次根式的两个条件是否同时满足，同时满足的就是最简二次根式，否则就不是.

【解答】解：A、 $\sqrt{\frac{1}{2}x} = \frac{\sqrt{2x}}{2}$ ，可化简，故 A 选项错误；

B、 $\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 2^2} = 2\sqrt{2}$ ，可化简，故 B 选项错误；

C、 $\sqrt{x^2} = |x|$ ，可化简，故 C 选项错误；

D、 $\sqrt{x^2+1}$ 不能化简，是最简二次根式，故 D 选项正确.

故选：D.

【点评】判断一个二次根式是否为最简二次根式主要方法是根据最简二次根式的定义进行，或直观地观察被开方数的每一个因数（或因式）的指数都小于根指数 2，且被开方数中不含有分母，被开方数是多项式时要先因式分解后再观察.

2.（4 分）下列运算正确的是（ ）

A. $a+a=a^2$ B. $a^2 \cdot a=2a^3$ C. $a^3 \div a^2=a$ D. $(a^2)^3=a^5$

【考点】35：合并同类项；46：同底数幂的乘法；47：幂的乘方与积的乘方；48：同底数幂的除法.

【分析】A、根据合并同类项的法则计算；

B、根据同底数幂的乘法法则计算；

C、根据同底数幂的除法计算；

D、根据幂的乘方计算.

【解答】解：A、 $a+a=2a$ ，此选项错误；

B、 $a^2 \cdot a = a^3$ ，此选项错误；

C、 $a^3 \div a^2 = a$ ，此选项正确；

D、 $(a^2)^3 = a^6$ ，此选项错误．

故选：C．

【点评】本题考查了合并同类项、同底数幂的乘法、同底数幂的除法、幂的乘方，解题的关键是掌握有法则．

3. (4分) 在平面直角坐标系中，点A和点B关于原点对称，已知点A的坐标为 $(-2, 3)$ ，那么点B的坐标为()

A. $(3, -2)$ B. $(2, -3)$ C. $(-3, 2)$ D. $(-2, -3)$

【考点】R6：关于原点对称的点的坐标．

【分析】根据关于原点对称的点的坐标特点：两个点关于原点对称时，它们的坐标符号相反，即点 $P(x, y)$ 关于原点O的对称点是 $P'(-x, -y)$ 可以直接写出答案．

【解答】解： $\because$ 点A和点B关于原点对称，点A的坐标为 $(-2, 3)$ ，

$\therefore B(2, -3)$ ．

故选：B．

【点评】此题主要考查了关于原点对称的点的坐标特点，关键是掌握两个点关于原点对称的坐标变化规律．

4. (4分) 如果正五边形绕着它的中心旋转 α 角后与它本身重合，那么 α 角的大小可以是()

A. 36° B. 45° C. 72° D. 90°

【考点】R3：旋转对称图形．

【分析】连接OA、OB，根据正五边形的性质求出 $\angle AOB$ ，即可得答案．

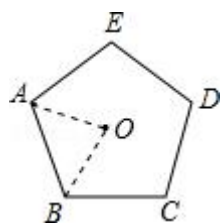
【解答】解：连接OA、OB，

$\because O$ 是正五边形的中心，

$\therefore \angle AOB = 360^\circ \div 5 = 72^\circ$ ，

即正五边形ABCDE绕着它的中心旋转 72° 后与它本身重合，即 α 角的大小可以是 72° ．

故选：C.



【点评】 本题主要考查对正多边形与圆，旋转对称图形等知识点的理解和掌握，能运用性质进行说理是解此题的关键.

5. (4分) 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，那么下列各式中，正确的是 ()

A. $\sin A = \frac{BC}{AB}$ B. $\cos A = \frac{BC}{AB}$ C. $\tan A = \frac{BC}{AB}$ D. $\cot A = \frac{BC}{AB}$

【考点】 T1: 锐角三角函数的定义.

【分析】 本题可以利用锐角三角函数的定义进行分析、解答.

【解答】 解：如图所示， AC 、 BC 为两直角边， AB 为斜边；

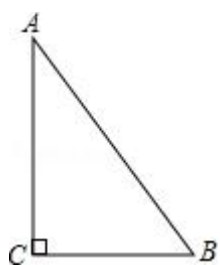
A、 $\sin A = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} = \frac{BC}{AB}$ ；故本选项正确；

B、 $\cos A = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}} = \frac{AC}{AB}$ ；故本选项错误；

C、 $\tan A = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}} = \frac{BC}{AC}$ ；故本选项错误；

D、 $\cot A = \frac{\text{邻边}}{\text{对边}} = \frac{AC}{BC}$ ；故本选项错误；

故选：A.



【点评】 本题考查锐角三角函数的定义及运用：在直角三角形中，锐角的正弦为对边比斜边，余弦为邻边比斜边，正切为对边比邻边.

6. (4分) 下列四个命题中真命题是 ()

A. 矩形的对角线平分对角

B. 菱形的对角线互相垂直平分

C. 梯形的对角线互相垂直

D. 平行四边形的对角线相等

【考点】O1: 命题与定理.

【专题】16: 压轴题.

【分析】分析是否为真命题, 需要分别分析各题设是否能推出结论, 从而利用排除法得出答案.

【解答】解: 矩形的对角线不能平分对角, A 错误;

根据菱形的性质, 菱形的对角线互相垂直平分, B 正确;

梯形的对角线不互相垂直, C 错误;

平行四边形的对角线平分, 但不一定相等, D 错误.

故选: B .

【点评】要根据矩形、菱形、梯形和平行四边形对角线的特点做出判断.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. (4 分) 计算: $2^{-2} = \frac{1}{4}$.

【考点】6F: 负整数指数幂.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据负整数指数幂的定义求解: $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0$, p 为正整数)

【解答】解: $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$,

故答案为 $\frac{1}{4}$.

【点评】本题考查了负整数指数幂的定义, 解题时牢记定义是关键, 此题比较简单, 易于掌握.

8. (4 分) 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x + a = 0$ 有两个不相等的实数根, 那么 a 的取值范围是 $a < \frac{1}{4}$.

【考点】AA: 根的判别式.

【分析】在与一元二次方程有关的求值问题中, 方程 $x^2 - x + a = 0$ 有两个不相等的实数根, 方程必须满足 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 即可求得.

【解答】解: x 的一元二次方程 $x^2 - x + a = 0$ 有两个不相等的实数根,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4a > 0$,

解得 $a < \frac{1}{4}$.

【点评】 本题考查了一元二次方程根的判别式的应用. 总结: 一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系:

- (1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根;
- (2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根;
- (3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

9. (4分) 方程 $\sqrt{2x+1}=3$ 的解是 $x=4$.

【考点】 AG: 无理方程.

【分析】 把方程两边平方去根号后即可转化成整式方程, 解方程即可求得 x 的值, 然后进行检验即可.

【解答】 解: 两边平方得: $2x+1=9$,

解得: $x=4$.

检验: $x=4$ 是方程的解.

故答案是: $x=4$.

【点评】 本题主要考查无理方程的知识点, 在解无理方程是最常用的方法是两边平方法及换元法, 本题用了平方法.

10. (4分) 用换元法解方程 $x^2 - 2x - \frac{2}{x^2 - 2x} = 1$ 时, 如设 $y = x^2 - 2x$, 则将原方程化为关于 y 的整式方程是 $y^2 - y - 2 = 0$.

【考点】 A9: 换元法解一元二次方程.

【分析】 由于方程中含有 $x^2 - 2x$, 故设 $x^2 - 2x = y$, 代入方程后, 把原方程化为整式方程.

【解答】 解: 设 $x^2 - 2x = y$.

$$\therefore y - \frac{2}{y} = 1,$$

$$\therefore y^2 - 2 = y,$$

$$\therefore y^2 - y - 2 = 0.$$

故答案为: $y^2 - y - 2 = 0$.

【点评】 此题考查了用换元法解一元二次方程, 此题要掌握数学中的换元思想, 比较简单.

11. (4分) 已知函数 $f(x) = \frac{3}{x-1}$, 那么 $f(4) = \underline{1}$.

【考点】E5: 函数值.

【分析】把 $x = 4$ 代入函数式, 化简求值.

【解答】解: 依题意, 得 $\frac{3}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$,

故答案为: 1.

【点评】本题考查了求函数值. (1) 当已知函数解析式时, 求函数值就是求代数式的值; (2) 函数值是唯一的, 而对应的自变量可以是多个.

12. (4分) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $A(-3, 2)$, 那么 $k = \underline{-6}$.

【考点】G7: 待定系数法求反比例函数解析式.

【专题】11: 计算题.

【分析】由反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $A(-3, 2)$, 将 $x = -3$, $y = 2$ 代入反比例解析式中计算, 即可得到 k 的值.

【解答】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $A(-3, 2)$,

$\therefore$ 将 $x = -3$, $y = 2$ 代入反比例解析式得: $2 = \frac{k}{-3}$,

解得: $k = -6$.

故答案为: -6

【点评】此题考查了利用待定系数法求反比例函数解析式, 熟练掌握待定系数法是解本题的关键.

13. (4分) 已知包裹邮资为每千克 2 元, 每件另加手续费 3 元, 若一件包裹重 x 千克, 则该包裹邮资 y (元) 与重量 x (千克) 之间的函数关系式为 $\underline{y = 2x + 3}$.

【考点】FG: 根据实际问题列一次函数关系式.

【分析】根据题意, 一次函数的比例系数 k 等于 2, 常数 b 等于 3, 写出一次数关系式即可.

【解答】解: 根据题意, $k = 2$, $b = 3$,

则 $y = 2x + 3$;

故答案为: $y = 2x + 3$.

【点评】 本题主要考查一次函数解析式的理解，从题中找出 k 、 b 的值是解题的关键.

14. (4 分) 在一个不透明的口袋中，装有 4 个红球和 6 个白球，除颜色不同外其余都相同，从口袋中任意摸一个球摸到的是红球的概率为 $\frac{2}{5}$.

【考点】 X4: 概率公式.

【分析】 先算出袋子中球的总数，再让红球的个数除以球的总数即为所求的概率.

【解答】 解：袋子中球的总数为 $4+6=10$,

红球有 4 个，

则摸出红球的概率为 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$;

故答案为： $\frac{2}{5}$.

【点评】 此题考查概率的求法：如果一个事件有 n 种可能，而且这些事件的可能性相同，其中事件 A 出现 m 种结果，那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

15. (4 分) 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切， $O_1O_2 = 8$ ，若 $\odot O_1$ 的半径为 3，则 $\odot O_2$ 的半径为 5.

【考点】 MJ: 圆与圆的位置关系.

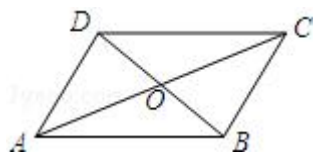
【分析】 根据两圆外切时，圆心距等于两圆半径的和，进行计算.

【解答】 解：根据题意，两圆外切得： $\odot O_2$ 的半径 $= 8 - 3 = 5$.

故答案为：5.

【点评】 本题考查了两圆的位置关系与数量之间的联系.

16. (4 分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，设 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$.



【考点】 LM: *平面向量.

【分析】 由 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ，利用三角形法则，即可求得 $\overrightarrow{DB}$ 的值，又由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，根据平行四边形的对角线互相平分，即可求得 $\overrightarrow{DO}$ 的值.

【解答】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DB},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AB} = \vec{b},$$

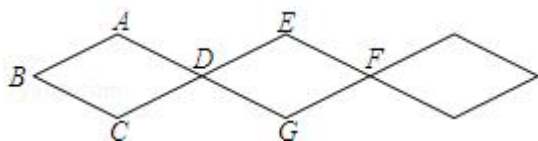
$$\therefore \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a}.$$

故答案为： $\frac{1}{2} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a}$.

【点评】此题考查了平行四边形的性质与平面向量的知识．此题难度不大，注意掌握三角形法则的应用，注意数形结合思想的应用．

17. (4 分) 如图是利用四边形的不稳定性制作的菱形凉衣架．已知其中每个菱形的边长为 13cm ， $\cos \angle ABC = \frac{5}{13}$ ，那么凉衣架两顶点 A 、 E 之间的距离为 $6\sqrt{13}\text{cm}$.



【考点】T8：解直角三角形的应用．

【分析】由图可得： AE 两点之间的距离是较长对角线的长；根据已知可分别求得较短和较长的对角线的长，则不难求得 AE 的长．

【解答】解：连接 AC 、 BD 交于点 O ，作 $AM \perp BC$ 于点 M ，

$$\therefore AB = BC = 13\text{cm}, \quad \cos \angle ABC = \frac{5}{13},$$

$$\therefore BM = BC \cdot \cos \angle ABC = 13 \times \frac{5}{13} = 5,$$

$$\therefore \text{由勾股定理得：} AM = 12$$

$$\therefore MC = 8,$$

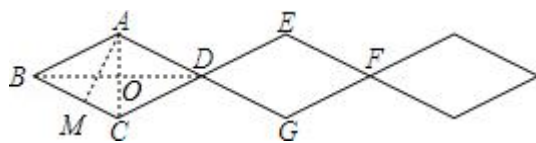
$$\text{由勾股定理得：} AC = 4\sqrt{13}$$

$$\therefore \text{在直角三角形 } ABO \text{ 中，} BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = 3\sqrt{13}$$

$$\therefore BD = 2BO = 6\sqrt{13}$$

$$\therefore \text{凉衣架两顶点 } A、E \text{ 之间的距离为 } 6\sqrt{13}$$

故答案为: $6\sqrt{13}$



【点评】 本题考查了解直角三角形的应用及菱形的性质，解题的关键是正确的构造直角三角形并求解．

18. (4分) 将一个平面图形分成面积相等的两部分的直线叫做该平面图形的“面线”，“面线”被这个平面图形截得的线段叫做该图形的“面径”，例如圆的直径就是它的“面径”．已知等边三角形的边长为2，则它的“面径”长可以是 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ (或介于 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 之间的任意两个实数) (写出2个)．

【考点】 KK：等边三角形的性质．

【专题】 16：压轴题；23：新定义．

【分析】 根据等边三角形的性质，最短的面径平行于三角形一边，最长的面径为等边三角形的高，然后根据相似三角形面积的比等于相似比的平方求出最短面径，根据等边三角形的性质求出高线，然后写出即可．

【解答】 解：如图， $EF \parallel BC$ 时， EF 为最短面径，

$$\text{此时, } \left(\frac{EF}{BC}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \frac{EF}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

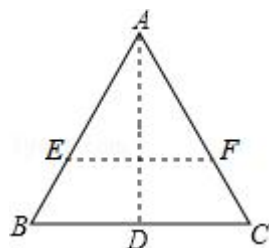
$$\text{解得 } EF = \sqrt{2},$$

等边三角形的高 AD 是最长的面径，

$$AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3},$$

所以，它的面径长可以是 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ (或介于 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 之间的任意两个实数)．

故答案为: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ (或介于 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 之间的任意两个实数)．



【点评】 本题考查了等边三角形的性质，读懂题意，弄明白面径的定义，并准确

判断出等边三角形的最短与最长的面径是解题的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $(\frac{a+1}{a^2-a} - \frac{4}{a^2-1}) \div \frac{a^2+2a-3}{a+3}$.

【考点】6C: 分式的混合运算.

【专题】11: 计算题.

【分析】将原式括号中两项的分母分别分解因式, 找出最简公分母, 通分并利用同分母分式的减法法则计算, 除式的分子利用十字相乘法分解因式, 然后利用除以一个数等于乘以这个数的倒数将除法运算化为乘法运算, 约分后即可得到结果.

【解答】解: 原式 $= [\frac{a+1}{a(a-1)} - \frac{4}{(a+1)(a-1)}] \div \frac{(a+3)(a-1)}{a+3}$
 $= [\frac{(a+1)^2}{a(a+1)(a-1)} - \frac{4a}{a(a+1)(a-1)}] \div \frac{(a+3)(a-1)}{a+3}$
 $= \frac{(a-1)^2}{a(a+1)(a-1)} \cdot \frac{a+3}{(a+3)(a-1)}$
 $= \frac{1}{a(a+1)}$
 $= \frac{1}{a^2+a}$.

【点评】此题考查了分式的混合运算, 分式的加减运算关键是通分, 通分的关键是找最简公分母; 分式的乘除运算关键是约分, 约分的关键是找公因式, 约分时分式的分子分母出现多项式, 应将多项式分解因式后再约分.

20. (10 分) 解方程组: $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ x-3y=2 \end{cases}$.

【考点】AF: 高次方程.

【分析】先将 $x^2+xy-2y^2=0$ 转化为 $x-y=0$ 和 $x+2y=0$. 可得两个方程组

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x-3y=2 \end{cases}, \begin{cases} x+2y=0 \\ x-3y=0 \end{cases}, \text{ 求解即可.}$$

【解答】解: 由 $x^2+xy-2y^2=0$ 得 $x-y=0$ 和 $x+2y=0$.

原方程组可化为 $\begin{cases} x-y=0 \\ x-3y=2 \end{cases}, \begin{cases} x+2y=0 \\ x-3y=0 \end{cases}$,

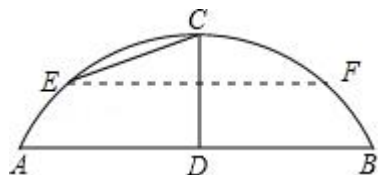
解得原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = \frac{4}{5} \\ y_1 = -\frac{2}{5} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -1 \end{cases}$.

【点评】 本题考查了高次方程，难度较大，需要先将方程转化为二元一次方程，然后解答；格外注意，本题有两组解.

21. (10 分) 某公园有一圆弧形的拱桥，如图已知拱桥所在圆的半径为 10 米，拱桥顶 D 到水面 AB 的距离 $DC = 4$ 米.

(1) 求水面宽度 AB 的大小；

(2) 当水面上升到 EF 时，从点 E 测得桥顶 D 的仰角为 α ，若 $\cot \alpha = 3$ ，求水面上升的高度.



【考点】 KQ：勾股定理；M3：垂径定理的应用；TA：解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题.

【分析】 (1) 设拱桥所在圆的圆心为 O ，由题意可知，点 O 在 DC 的延长线上，连接 OA ，在 $\text{Rt}\triangle ADO$ 中利用勾股定理求出 AD 的长，再由垂径定理求出 $AB = 2AD$ 即可得出答案；

(2) 设 OD 与 EF 相交于点 G ，连接 OE ，由 $EF \parallel AB$ ， $OD \perp AB$ ，可知 $OD \perp EF$ ， $\angle EGC = \angle EGO = 90^\circ$ ，在 $\text{Rt}\triangle EGC$ 中，由 $\cot \alpha = \frac{EG}{CG} = 3$ ，可知 $EG = 3CG$ ，设水面上升的高度为 x 米，即 $DG = x$ ，则 $CG = 4 - x$ ，则 $EG = 12 - 3x$ ，在 $\text{Rt}\triangle EGO$ 中，利用勾股定理即可求出 x 的值，进而得出结论.

【解答】 解：(1) 设拱桥所在圆的圆心为 O ，由题意可知，点 O 在 DC 的延长线上，连接 OA ，

$\because OD \perp AB$ ，

$\therefore \angle ADO = 90^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADO$ 中， $OA = 10$ ， $OD = OC - DC = 10 - 4 = 6$ ，

$\therefore AD = 8$ ，

$\because OD \perp AB$ ， OC 是半径，

$\therefore AB = 2AD = 16$ ，

即水面宽度 AB 的长为 16 米.

(2) 设 OD 与 EF 相交于点 G , 连接 OE ,

$\because EF \parallel AB, OD \perp AB$

$\therefore OD \perp EF$,

$\therefore \angle EGC = \angle EGO = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle EGC$ 中, $\cot \alpha = \frac{EG}{CG} = 3$,

$\therefore EG = 3CG$,

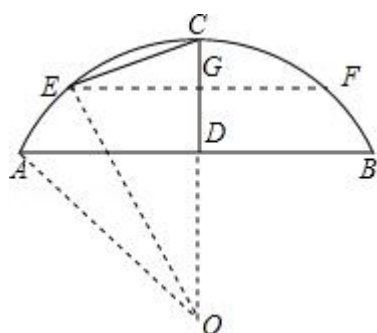
设水面上升的高度为 x 米, 即 $DG = x$, 则 $CG = 4 - x$,

$\therefore EG = 12 - 3x$

在 $\text{Rt}\triangle EGO$ 中, $EG^2 + OG^2 = OE^2$, $(12 - 3x)^2 + (6 + x)^2 = 10^2$, 化简得 $x^2 - 6x + 8$
 $= 0$

解得 $x_1 = 4$ (舍去), $x_2 = 2$,

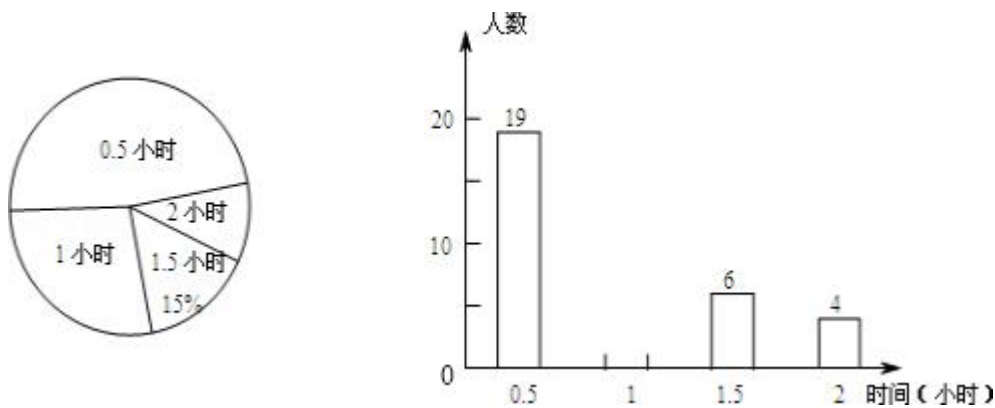
答: 水面上升的高度为 2 米.



【点评】 本题考查的是勾股定理及垂径定理, 根据题意作出辅助线, 构造出直角三角形是解答此题的关键.

22. (10 分) 随着“微博潮”的流行, 初中学生也开始忙着“织围脖”, 某校在上微博的 280 名学生中随机抽取了部分学生调查他们平常每天上微博的时间, 绘制了扇形统计图和频数分布直方图, 请根据图中信息, 回答下列问题:

- (1) 本次调查共抽取了 40 名学生; 将频数分布直方图补充完整;
- (2) 被调查的学生中上微博时间中位数落在 1 小时 这一小组内;
- (3) 样本中, 平均每天上微博的时间为 0.5 小时这一组的频率是 0.475;
- (4) 请估计该校上微博的学生中, 大约有 147 名学生平均每天上微博的时间不少于 1 小时.



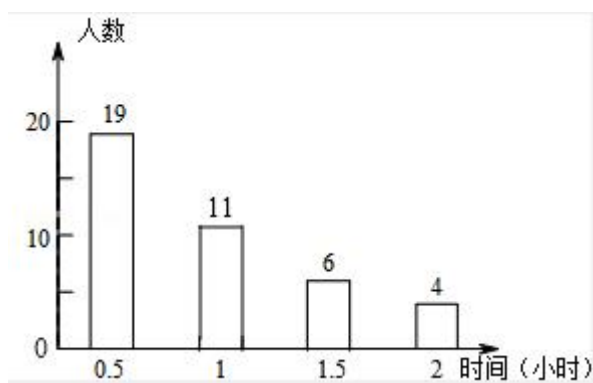
【考点】 V5: 用样本估计总体; V8: 频数(率)分布直方图; VB: 扇形统计图.

- 【分析】** (1) 先根据平均每天上微博的时间为 1.5 小时的人数和所占的百分比, 求出总数, 即可得出平均每天上微博的时间为 1 小时的人数, 画出图形即可;
- (2) 根据总人数确定中位数是那两个人的平均数即可确定中位数落在那个小组内;
- (3) 用平均每天上微博的时间为 0.5 小时的人数除以总数即可得出这一组的频率;
- (4) 用 280 乘以平均每天上微博的时间不少于 1 小时的人数的频率, 即可得出答案.

【解答】 解: (1) 本次调查共抽取了 $6 \div 15\% = 40$ 名学生;

平均每天上微博的时间为 1 小时的学生数是 $40 - 19 - 6 - 4 = 11$;

如图:



- (2) 共 40 个人, 中位数应为第 20 和第 21 个的平均数, 由统计图知第 20 和第 21 个落在 1 小时这一组内

(4) 平均每天上微博的时间为 0.5 小时这一组的频率是 $\frac{19}{40} = 0.475$;

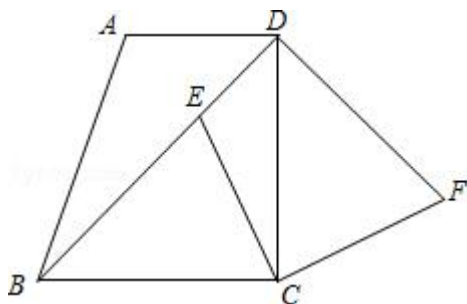
该校上微博的学生中, 平均每天上微博的时间不少于 1 小时的学生数是 $280 \times (1 - 0.475) = 147$ (人).

【点评】 本题考查了频数分布表和频数分布直方图的知识, 解题的关键是仔细的读图并从中找到进一步解题的有关信息.

23. (12 分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle BCD = 90^\circ$, $BC = DC$, 点 E 在对角线 BD 上, 作 $\angle ECF = 90^\circ$, 连接 DF , 且满足 $CF = EC$.

(1) 求证: $BD \perp DF$.

(2) 当 $BC^2 = DE \cdot DB$ 时, 试判断四边形 $DECF$ 的形状, 并说明理由.



【考点】 KD: 全等三角形的判定与性质; LF: 正方形的判定; LH: 梯形; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 利用互余关系证明 $\angle BCE = \angle DCF$, 又有 $BC = DC$, $EC = CF$, 可证 $\triangle BCE \cong \triangle DCF$, 得出 $\angle EBC = \angle FDC$, 由已知可知 $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形, 故有 $\angle BDC = \angle EBC = \angle FDC = 45^\circ$, 可证 $\angle FDB = 90^\circ$, 证明 $BD \perp DF$;

(2) 四边形 $DECF$ 是正方形. 由 $BC^2 = DE \cdot DB$ 及 $BC = DC$, 得 $DC^2 = DE \cdot DB$, 转化为比例式, 利用公共角 $\angle CDE = \angle BDC$, 证明 $\triangle CDE \sim \triangle BDC$, 则有 $\angle DEC = \angle DCB = 90^\circ$, 判断四边形 $DECF$ 是矩形, 结合条件 $CE = CF$, 可证四边形 $DECF$ 是正方形.

【解答】 (1) 证明: $\because \angle BCD = \angle ECF = 90^\circ$, $\therefore \angle BCE = \angle DCF$,

$\because BC = DC$, $EC = CF$, $\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCF$,

$\therefore \angle EBC = \angle FDC$,

$\because BC = DC$, $\angle BCD = 90^\circ$, $\therefore \angle DBC = \angle BDC = 45^\circ$,

$$\therefore \angle FDC = 45^\circ, \therefore \angle FDB = 90^\circ,$$

$$\therefore BD \perp DF;$$

(2) 解: 四边形 $DECF$ 是正方形.

$$\because BC^2 = DE \cdot DB, BC = DC, \therefore DC^2 = DE \cdot DB, \therefore \frac{DC}{DB} = \frac{DE}{DC},$$

$$\because \angle CDE = \angle BDC, \therefore \triangle CDE \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\because \angle FDE = \angle ECF = 90^\circ, \therefore \text{四边形 } DECF \text{ 是矩形},$$

$$\because CE = CF, \therefore \text{四边形 } DECF \text{ 是正方形}.$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质, 正方形的判定. 关键是利用已知条件证明等腰直角三角形, 全等三角形, 判断垂直关系, 利用条件证明相似三角形, 判断直角, 矩形及正方形.

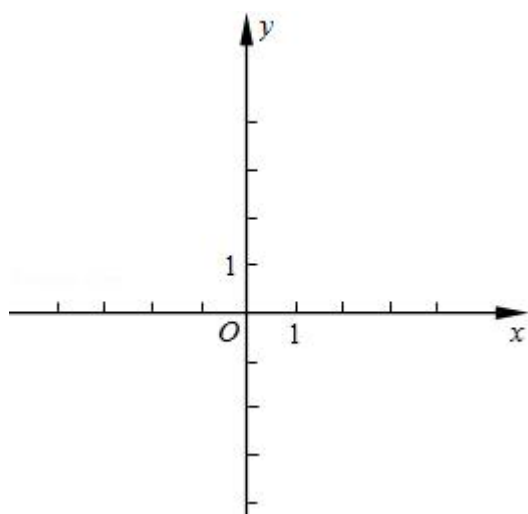
24. (12 分) 已知直线 $y = 3x - 3$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A, B , 抛物线 $y = ax^2 + 2x + c$ 经过点 A, B .

(1) 求该抛物线的表达式, 并写出该抛物线的对称轴和顶点坐标;

(2) 记该抛物线的对称轴为直线 l , 点 B 关于直线 l 的对称点为 C , 若点 D 在 y 轴的正半轴上, 且四边形 $ABCD$ 为梯形.

①求点 D 的坐标;

②将此抛物线向右平移, 平移后抛物线的顶点为 P , 其对称轴与直线 $y = 3x - 3$ 交于点 E , 若 $\tan \angle DPE = \frac{3}{7}$, 求四边形 $BDEP$ 的面积.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【专题】16：压轴题；2B：探究型.

【分析】(1) 先根据直线 $y = 3x - 3$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 、 B 两点求出 A 、 B 两点的坐标，再把 AB 两点的坐标代入

抛物线 $y = ax^2 + 2x + c$ 即可得出 a 、 c 的值，进而得出抛物线的解析式，故可得出其对称轴方程及顶点坐标；

(2) ①由于 B 、 C 两点关于直线 $x = -1$ 对称，故 $C(-2, -3)$ ， $BC \parallel x$ 轴，点 D 在 y 轴的正半轴所以 AD 不能平行于 BC ，故 $AB \parallel CD$ ，设直线 CD 的解析式为 $y = 3x + b$ ，把 C 点坐标代入即可得出直线 CD 的解析式，故可得出 D 点坐标；

②作 $DF \perp PE$ 于 F ，则 $PF = 7$ ，在 $\text{Rt}\triangle DFP$ 中， $\tan \angle DPE = \frac{DF}{PF} = \frac{DF}{7} = \frac{3}{7}$ 可得出 DF 的长，再把 x 的值代入直线 AB 即可得出 y 的值，故可得出 E 点坐标，由梯形的面积公式即可求出四边形 $BDEP$ 的面积.

【解答】解：(1) $\because$ 直线 $y = 3x - 3$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 、 B ，

$$\therefore A(1, 0), B(0, -3),$$

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + 2x + c$ 过点 $A(1, 0)$ 、 $B(0, -3)$

$$\therefore \begin{cases} a+2+c=0 \\ c=-3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=1 \\ c=-3 \end{cases}.$$

$$\therefore y = x^2 + 2x - 3,$$

$$\therefore y = (x+1)^2 - 4,$$

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = -1$ ，顶点坐标为 $(-1, -4)$ ；

(2) ① $\because B$ 、 C 两点关于直线 $x = -1$ 对称，

$$\therefore C(-2, -3), BC \parallel x \text{ 轴}$$

$\therefore AB \parallel CD$ ，设直线 CD 的解析式为 $y = 3x + b$ ，

$$\because C(-2, -3),$$

$$\therefore -6 + b = -3,$$

$$\therefore b = 3,$$

$\therefore$ 直线 CD 的解析式为 $y = 3x + 3$

$$\therefore D(0, 3),$$

②作 $DF \perp PE$ 于 F , 则 $PF = 7$,

$$\text{在 Rt}\triangle DFP \text{ 中, } \tan \angle DPE = \frac{DF}{PF} = \frac{DF}{7} = \frac{3}{7},$$

$$\therefore DF = 3,$$

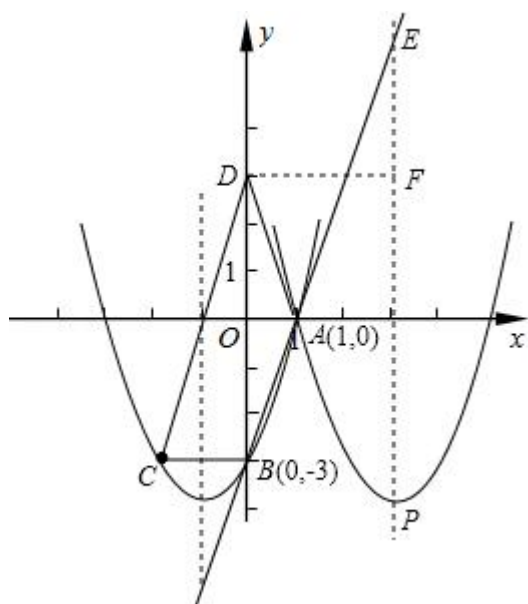
$$\therefore P(3, -4), \text{ 即 } EP \text{ 的方程为 } x = 3,$$

$\because$ 点 E 在直线 $y = 3x - 3$ 上,

$$\therefore y = 3 \times 3 - 3 = 6,$$

$$\therefore \text{点 } E(3, 6),$$

$$\therefore S_{\text{四边形 } BDEP} = \frac{1}{2} (BD + EP) \cdot DF = \frac{1}{2} (6 + 10) \times 3 = 24.$$



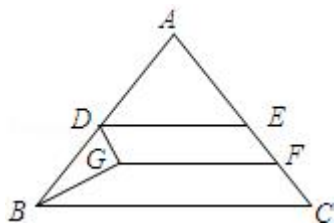
【点评】 本题考查的是二次函数综合题, 涉及到用待定系数法求一次函数及二次函数的解析式、梯形的面积公式等知识点, 根据题意画出图形, 利用数形结合求解是解答此题的关键.

25. (14分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10$, $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$, 点 D 在 AB 边上 (点 D 与点 A, B 不重合), $DE \parallel BC$ 交 AC 边于点 E , 点 F 在线段 EC 上, 且 $EF = \frac{1}{4}AE$, 以 DE, EF 为邻边作平行四边形 $DEFG$, 连接 BG .

(1) 当 $EF = FC$ 时, 求 $\triangle ADE$ 的面积;

(2) 设 $AE = x$, $\triangle DBG$ 的面积为 y , 求 y 与 x 的函数关系式, 并写出 x 的取值范围;

(3) 如果 $\triangle DBG$ 是以 DB 为腰的等腰三角形, 求 AD 的值.



【考点】SO: 相似形综合题.

【专题】16: 压轴题; 2B: 探究型.

【分析】(1) 作 $AH \perp BC$ 于 H , 在 $\text{Rt}\triangle AHB$ 中, $\cos \angle ABC = \frac{BH}{AB} = \frac{3}{5}$ 可得出 AH 、 BC 的长, 进而可得出 $\triangle ABC$ 的面积, 由相似三角形的判定定理得出 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 根据相似三角形面积的比等于相似比即可得出 $\triangle ADE$ 的面积;

(2) 设 AH 交 DE 、 GF 于点 M 、 N , 由(1)可知 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 故可得出 $\frac{AE}{AC} = \frac{AM}{AH} = \frac{DE}{BC}$, 再根据 $AE = x$, 可知 $AM = \frac{4}{5}x$, $DE = \frac{6}{5}x$, $NH = 8 - x$, 根据 $S_{\triangle DBG} = S_{\text{梯形} DBCE} - S_{\text{平行四边形} DGFE} - S_{\text{梯形} GBCF}$, 即可得出结论;

(3) 作 $FP \perp BC$ 于 P , $GQ \perp BC$ 于 Q , 由 $FC = 10 - \frac{5}{4}x$, $\cos C = \cos \angle ABC = \frac{3}{5}$, 可知 $PC = 6 - \frac{3}{4}x$, $BQ = 12 - \frac{6}{5}x - (6 - \frac{3}{4}x) = 6 - \frac{9}{20}x$, 由勾股定理可用 x 表示出 BG 的长, 在 $\triangle DBG$ 中用 x 表示出 DB , DG 的长, 再分 $DB = DG$ 和 $DB = BG$ 两种情况进行讨论.

【解答】解: (1) 作 $AH \perp BC$ 于 H .

在 $\text{Rt}\triangle AHB$ 中, $\because \cos \angle ABC = \frac{BH}{AB} = \frac{3}{5}$, $AB = 10$,

$$\therefore BH = 6, \therefore AH = 8,$$

$$\because AB = AC, \therefore BC = 2BH = 12,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48.$$

$$\because DE \parallel BC, \therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AE}{AC} \right)^2,$$

$$\because EF = \frac{1}{4}AE, EF = FC,$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{48} = \frac{4}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{64}{3};$$

(2) 设 AH 交 DE 、 GF 于点 M 、 N .

$$\because DE \parallel BC, \therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AM}{AH} = \frac{DE}{BC},$$

$$\because AE = x, \therefore AM = \frac{4}{5}x, DE = \frac{6}{5}x,$$

$$\because MN = \frac{1}{4}AM = \frac{1}{5}x, \therefore NH = 8 - x,$$

$$\therefore S_{\triangle DBG} = S_{\text{梯形 } DBCE} - S_{\text{平行四边形 } DGFE} - S_{\text{梯形 } GBCF},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \left(\frac{6}{5}x + 12 \right) (8 - \frac{4}{5}x) - \frac{6}{5}x \cdot \frac{1}{5}x - \frac{1}{2} \left(\frac{6}{5}x + 12 \right) (8 - x),$$

$$\therefore y = -\frac{3}{25}x^2 + \frac{6}{5}x \quad (0 < x \leq 8);$$

(3) 作 $FP \perp BC$ 于 P , $GQ \perp BC$ 于 Q ,

$$\text{在 Rt}\triangle FPC \text{ 中, } FC = 10 - \frac{5}{4}x, \cos C = \cos \angle ABC = \frac{3}{5},$$

$$\therefore PC = 6 - \frac{3}{4}x,$$

$$\therefore BQ = 12 - \frac{6}{5}x - (6 - \frac{3}{4}x) = 6 - \frac{9}{20}x,$$

$$\therefore BG = \sqrt{(8-x)^2 + (6 - \frac{9}{20}x)^2},$$

$$\text{在 } \triangle DBG \text{ 中, } DB = 10 - x, DG = \frac{1}{4}x,$$

$$\text{①若 } DB = DG, \text{ 则 } 10 - x = \frac{1}{4}x, \text{ 解得 } x = 8;$$

$$\text{②若 } DB = BG, \text{ 则 } 10 - x = \sqrt{(8-x)^2 + (6 - \frac{9}{20}x)^2},$$

$$\text{解得 } x_1 = 0 \text{ (舍去)}, x_2 = \frac{560}{81},$$

$$\therefore AD = 8 \text{ 或 } AD = \frac{560}{81}.$$

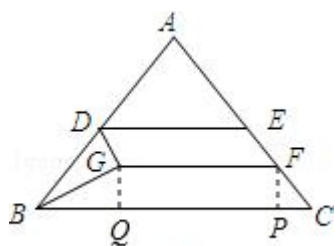


图2

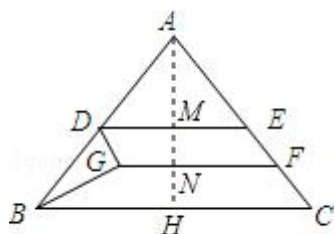


图1

【点评】 本题考查的是相似形综合题，涉及到相似三角形的判定与性质、勾股定理及直角三角形的性质、等腰三角形的性质，根据题意判断出 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 是解答此题的关键．