

2012 年上海市普陀区中考数学一模试卷

一、单项选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

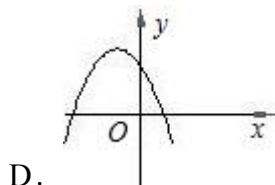
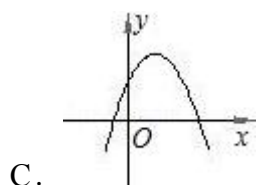
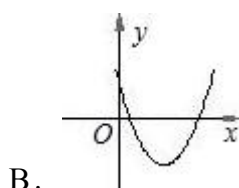
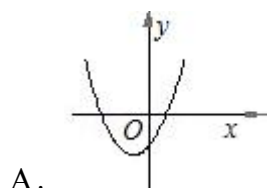
1. (4 分) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，如果各边长都扩大 2 倍，则 $\angle A$ 的正弦值 ()

- A. 扩大 2 倍 B. 缩小 2 倍 C. 大小不变 D. 不能确定

2. (4 分) 下列各组图形中，一定相似的是 ()

- A. 两个矩形 B. 两个菱形
C. 两个正方形 D. 两个等腰梯形

3. (4 分) 如果 $k < 0$ (k 为常数)，那么二次函数 $y = kx^2 - x + k^2$ 的图象大致为 ()



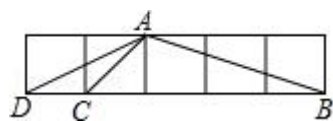
4. (4 分) 下列说法正确的是 ()

- A. 三个点确定一个圆
B. 当半径大于点到圆心的距离时，点在圆外
C. 圆心角相等，它们所对的弧相等
D. 边长为 R 的正六边形的边心距等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}R$

5. (4 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 、 F 分别在边 AB 、 AC 和 BC 上，且 $DE \parallel BC$ ， $DF \parallel AC$ ，那么下列比例式中，正确的是 ()

- A. $\frac{AE}{EC} = \frac{DE}{BC}$ B. $\frac{AE}{EC} = \frac{CF}{FB}$ C. $\frac{DF}{AC} = \frac{DE}{BC}$ D. $\frac{EC}{AC} = \frac{FC}{BC}$

6. (4 分) 如图，由 5 个同样大小的正方形合成一个矩形，那么 $\angle ABD + \angle ADB$ 的度数是 ()



- A. 90° B. 60° C. 45° D. 不能确定

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4分) 计算: $\tan 30^\circ \times \cos 60^\circ =$ _____.

8. (4分) 已知抛物线的表达式是 $y = -\frac{4}{5}x^2$, 那么它的顶点坐标是_____.

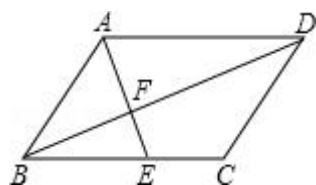
9. (4分) 在平面直角坐标系中, 如果把抛物线 $y = 3x^2 + 5$ 向右平移 4 个单位, 那么所得抛物线的表达式为_____.

10. (4分) 已知线段 $a = 4$, $c = 9$, 那么 a 和 c 的比例中项 $b =$ _____.

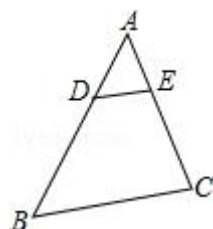
11. (4分) 如果两个相似三角形的相似比为 $3:2$, 那么它们的周长比为_____.

12. (4分) 小王在楼下点 A 处看到楼上点 B 处的小明的仰角是 35° , 那么点 B 处得小明看点 A 处的小王的俯角等于_____度.

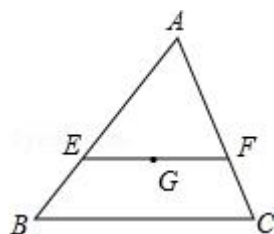
13. (4分) 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, E 是边 BC 上的点, AE 交 BD 于点 F , 如果 $\frac{BF}{FD} = \frac{2}{3}$, 那么 $\frac{BE}{BC} =$ _____.



14. (4分) 如图, $DE \parallel BC$, $\frac{DA}{BA} = \frac{1}{3}$, 请用向量 $\overrightarrow{ED}$ 表示向量 $\overrightarrow{BC}$, 那么 $\overrightarrow{BC} =$ _____.



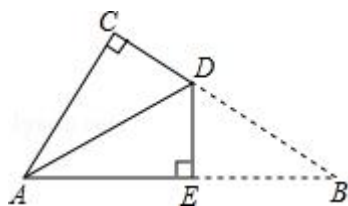
15. (4分) 如图, G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 若 EF 过点 G 且 $EF \parallel BC$, 交 AB 、 AC 于 E 、 F , 则 $\frac{EF}{BC}$ 的值为_____.



16. (4分) 已知两圆相切, 半径分别为 2cm 和 5cm , 那么两圆的圆心距等于_____厘米.

17. (4分) 如图是一张直角三角形的纸片, 直角边 $AC = 6\text{cm}$, $\sin B = \frac{3}{5}$, 现将 $\triangle$

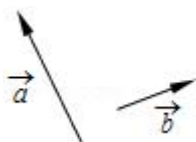
ABC 折叠, 使点 B 与点 A 重合, 折痕为 DE , 那么 DE 的长等于_____.



18. (4 分) 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的顶点分别是 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 2)$, 已知动直线 $y = m$ ($0 < m < 2$) 与线段 AC 、 BC 分别交于 D 、 E 两点, 而在 x 轴上存在点 P , 使得 $\triangle DEP$ 为等腰直角三角形, 那么 m 的值等于_____.

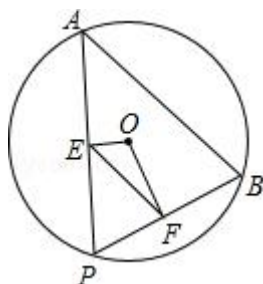
三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 如图, 已知两个不平行的向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$. 先化简, 再求作: $2(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) - \frac{1}{2}(2\vec{a} - 4\vec{b})$. (不要求写作法, 但要指出图中表示结论的向量)



20. (10 分) 如图, 点 A , B 是 $\odot O$ 上两点, $AB = 10$, 点 P 是 $\odot O$ 上的动点 (P 与 A , B 不重合), 连接 AP , BP , 过点 O 分别作 $OE \perp AP$, $OF \perp BP$, 点 E 、 F 分别是垂足.

- (1) 求线段 EF 的长;
- (2) 点 O 到 AB 的距离为 2, 求 $\odot O$ 的半径.



21. (10 分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + 5$ ($a \neq 0$) 中, 函数 y 与自变量 x 的部分对应值如表:

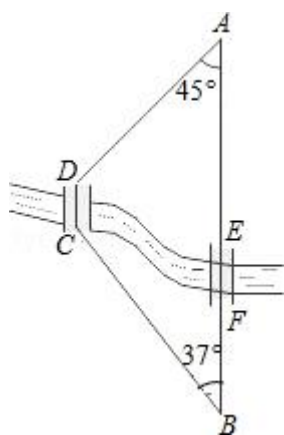
x	...	-1	...	...	2	...
y	...	10	...	...	1	...

- (1) 求这个二次函数的解析式及图象的对称轴;

(2) 设 $m \geq 2$, 且 $A(m, y_1)$, $B(m+1, y_2)$ 两点都在该函数的图象上, 试比较 y_1 与 y_2 的大小: y_1 _____ y_2 (填“大于”“等于”或“小于”).

22. (10分) 如图所示, A, B 两地隔河相望, 原来从 A 地到 B 地需要经过桥 DC , 沿折线 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$ 到达 B 地, 现在直线 AB (与桥 DC 平行) 上建了新桥 EF , 可沿直线 AB 从 A 地直达 B 地, 已知 $BC = 1000m$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 37^\circ$. 问: 现在从 A 地到达 B 地可比原来少走多少路程?

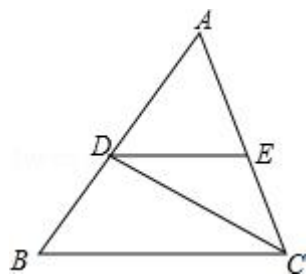
(结果精确到 $1m$. 参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$)



23. (12分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 上一点, E 是 AC 上一点, $\angle ACD = \angle B$, $AD^2 = AE \cdot AC$. 求证:

(1) $DE \parallel BC$;

(2) $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle BCD}}\right)^2$.

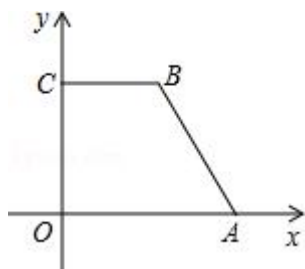


24. (12分) 如图, 梯形 $OABC$, $BC \parallel OA$, 边 OA 在 x 轴正半轴上, 边 OC 在 y 轴正半轴上, 点 $B(3, 4)$, $AB = 5$.

(1) 求 $\angle BAO$ 的正切值;

(2) 如果二次函数 $y = \frac{4}{9}x^2 + bx + c$ 的图象经过 O, A 两点, 求这个二次函数的解析式并求图象顶点 M 的坐标;

- (3) 点 Q 在 x 轴上, 以点 Q , 点 O 及 (2) 中的点 M 为顶点的三角形与 $\triangle ABO$ 相似, 求点 Q 的坐标.



25. (14 分) 把两块边长为 4 的等边三角板 ABC 和 DEF 先如图 1 放置, 使三角板 DEF 的顶点 D 与三角板 ABC 的 AC 边的中点重合, DF 经过点 B , 射线 DE 与射线 AB 相交于点 M , 接着把三角形板 ABC 固定不动, 将三角形板 DEF 由图 11-1 所示的位置绕点 D 按逆时针方向旋转, 设旋转角为 α . 其中 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, 射线 DF 与线段 BC 相交于点 N (如图 2 示).

- (1) 当 $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ 时, 求 $AM \cdot CN$ 的值;
- (2) 当 $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ 时, 设 $AM = x$, 两块三角形板重叠部分的面积为 y , 求 y 与 x 的函数解析式并求定义域;
- (3) 当 $BM = 2$ 时, 求两块三角形板重叠部分的面积.

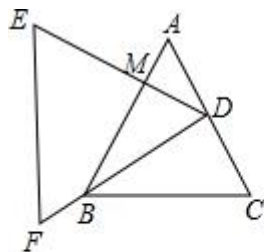


图1

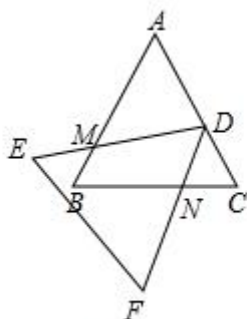
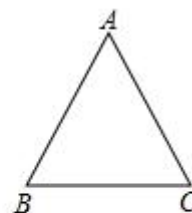


图2



备用图

2012 年上海市普陀区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、单项选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

- 1.（4 分）在锐角 $\triangle ABC$ 中，如果各边长都扩大 2 倍，则 $\angle A$ 的正弦值（ ）
- A. 扩大 2 倍 B. 缩小 2 倍 C. 大小不变 D. 不能确定

【考点】T1：锐角三角函数的定义．

【专题】11：计算题．

【分析】设锐角 $\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c ， AC 边上的高为 h ，则 $\sin A = \frac{h}{c}$ ，如果各边长都扩大 2 倍，则 AC 边上的高为 $2h$ ，则 $\sin A = \frac{2h}{2c} = \frac{h}{c}$ 即可得出答案．

【解答】解；设锐角 $\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c ， AC 边上的高为 h ，则 $\sin A = \frac{h}{c}$ ，

如果各边长都扩大 2 倍，则 AC 边上的高为 $2h$ ，

$$\therefore \sin A = \frac{2h}{2c} = \frac{h}{c},$$

故 $\angle A$ 的正弦值大小不变，

故选：C．

【点评】本题考查了锐角三角函数的定义，属于基础题，关键是掌握锐角三角函数的定义．

- 2.（4 分）下列各组图形中，一定相似的是（ ）

- A. 两个矩形 B. 两个菱形
C. 两个正方形 D. 两个等腰梯形

【考点】S5：相似图形．

【专题】12：应用题．

【分析】根据相似图形的定义，四条边对应成比例，四个角对应相等，对各选项分析判断后利用排除法解答．

【解答】A、两个矩形四个角相等，但是各边不一定对应成比例，所以不一定相似，故本选项错误；

B、两个菱形，形状不一定相同，故本选项错误；

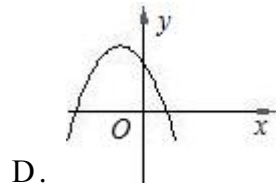
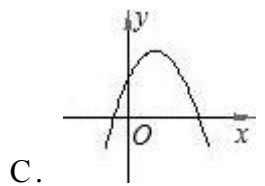
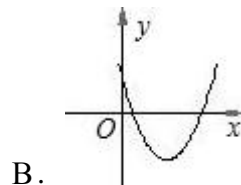
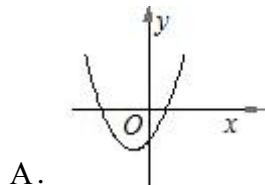
C、两个正方形，形状相同，大小不一定相同，符合相似性定义，故本选项正确；

D、两个等腰梯形不一定相似，故本选项错误．

故选：C.

【点评】 本题主要考查了图形相似的判定，熟练掌握矩形、等腰梯形、菱形、正方形的性质是解题的关键，难度适中.

3. (4分) 如果 $k < 0$ (k 为常数), 那么二次函数 $y = kx^2 - x + k^2$ 的图象大致为()



【考点】 H2: 二次函数的图象.

【分析】 二次函数 $y = kx^2 - x + k^2$ 中 $k < 0$, 可根据开口方向, 对称轴的位置确定抛物线的位置.

【解答】 解: $\because$ 二次函数 $y = kx^2 - x + k^2$ 中 $k < 0$,

$\therefore$ 抛物线开口向下, 对称轴 $x = -\frac{-1}{2k} < 0$, 在 y 轴左边.

故选：D.

【点评】 本题考查了抛物线解析式的系数与抛物线图象位置的关系.

4. (4分) 下列说法正确的是()

- A. 三个点确定一个圆
- B. 当半径大于点到圆心的距离时, 点在圆外
- C. 圆心角相等, 它们所对的弧相等
- D. 边长为 R 的正六边形的边心距等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}R$

【考点】 M5: 圆周角定理; M8: 点与圆的位置关系; M9: 确定圆的条件; MM: 正多边形和圆.

【专题】 2B: 探究型.

【分析】 分别根据确定圆的条件, 点与圆的位置关系, 圆心角、弧、弦的关系及圆内接正六边形的性质对各选项进行逐一判断.

【解答】 解: A、只有不在同一条直线上的三点才可以确定一个圆, 故本选项错

误；

B、当半径大于点到圆心的距离时，点在圆内，故本选项错误；

C、只有在同圆或等圆中圆心角相等，它们所对的弧相等，故本选项错误；

D、边长为 R 的正六边形的边心距等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ ，故本选项正确．

故选：D．

【点评】 本题考查的是确定圆的条件，点与圆的位置关系，圆心角、弧、弦的关系及圆内接正六边形的性质，熟练掌握以上知识是解答此题的关键．

5. (4分) 已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 、 F 分别在边 AB 、 AC 和 BC 上，且 $DE \parallel BC$ ， $DF \parallel AC$ ，那么下列比例式中，正确的是 ()

A. $\frac{AE}{EC} = \frac{DE}{BC}$

B. $\frac{AE}{EC} = \frac{CF}{FB}$

C. $\frac{DF}{AC} = \frac{DE}{BC}$

D. $\frac{EC}{AC} = \frac{FC}{BC}$

【考点】 S4：平行线分线段成比例．

【专题】 11：计算题；31：数形结合．

【分析】 首先根据题意画出图形，由相似三角形的判定，可得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ， $\triangle BDF \sim \triangle BAC$ ；又由相似三角形的对应边成比例与平行线分线段成比例定理，可得 B 正确．

【解答】 解： $\because DE \parallel BC$ ， $DF \parallel AC$ ，

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC, \triangle BDF \sim \triangle BAC,$$

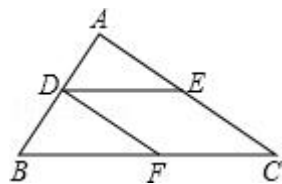
$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}, \text{ 故 A 错误,}$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB} = \frac{FC}{FB}, \text{ 故 B 正确,}$$

$$\frac{DF}{AC} = \frac{DB}{BA}, \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}, \text{ 故 C 错误,}$$

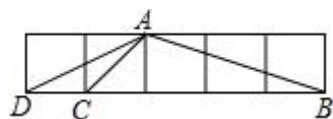
$$\frac{EC}{AC} = \frac{DB}{BA} = \frac{BF}{BC}, \text{ 故 D 错误.}$$

故选：B．



【点评】 此题考查了平行线分线段成比例定理与相似三角形的判定与性质．解题的关键是注意根据题意作图，利用数形结合思想求解．

6. (4分) 如图, 由5个同样大小的正方形合成一个矩形, 那么 $\angle ABD + \angle ADB$ 的度数是()



- A. 90° B. 60° C. 45° D. 不能确定

【考点】 LB: 矩形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 利用勾股定理分别计算出 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ADB$ 的各个边长, 根据有三边比值相等的两三角形相似可判定 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ADB$ 相似定理即可求出, 再根据相似三角形的性质: 对应角相等和三角形外角和定理即可求出 $\angle ABD + \angle ADB$ 的度数.

【解答】 解: 设每个小正方形的边长为1,

由勾股定理得: $AC = \sqrt{2}$, $AD = \sqrt{5}$, $AB = \sqrt{10}$,

又 $\because DC = 1$, $BD = 5$,

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{DC}{AD} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{AD},$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BDA,$$

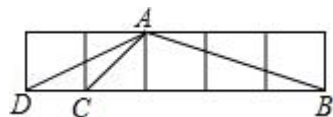
$$\therefore \angle DAC = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DAC + \angle ADB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle ADB = 45^\circ.$$

故选: C.



【点评】 本题考查了相似三角形的判定和相似三角形的性质以及勾股定理的运用和三角形的外角和不相邻的两内角之间的关系.

二、填空题: (本大题共12题, 每题4分, 满分48分)

7. (4分) 计算: $\tan 30^\circ \times \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

【考点】 T5: 特殊角的三角函数值.

【专题】11：计算题.

【分析】将 $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 代入进行运算即可.

【解答】解：将 $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 代入，

$$\text{原式} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

【点评】此题考查了特殊角的三角函数值，属于基础题，解答本题的关键是熟练掌握一些特殊角的三角函数值，需要我们熟练记忆.

8. (4分) 已知抛物线的表达式是 $y = -\frac{4}{5}x^2$ ，那么它的顶点坐标是 (0, 0).

【考点】H3：二次函数的性质.

【专题】2B：探究型.

【分析】根据二次函数的性质， y 有最小值，当 $x = 0$ 时， y 取得最小值 0，故其顶点坐标为其最小值点 (0, 0).

【解答】解：根据二次函数的性质，

$$\therefore -\frac{4}{5} < 0,$$

$\therefore$ 图象开口向下，

函数有最小值，

其最小值点为但 $x = 0$ 时取得的点 (0, 0).

故答案为 (0, 0).

【点评】本题考查了二次函数的性质，要熟悉式子的特点并能结合图象.

9. (4分) 在平面直角坐标系中，如果把抛物线 $y = 3x^2 + 5$ 向右平移 4 个单位，那么所得抛物线的表达式为 $y = 3(x - 4)^2 + 5$.

【考点】H6：二次函数图象与几何变换.

【分析】易得原抛物线的顶点及平移后新抛物线的顶点，利用顶点式根据平移不改变二次项系数可得新抛物线解析式.

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = 3x^2 + 5$ 的顶点为 (0, 5)，

$\therefore$ 向右平移 4 个单位得到的顶点为 (4, 5)，

$\therefore$ 把抛物线 $y = 3x^2 + 5$ 向右平移 4 个单位，

那么所得抛物线的表达式为 $y = 3(x - 4)^2 + 5$.

故答案为 $y = 3(x - 4)^2 + 5$

【点评】 考查二次函数的平移情况；用到的知识点为：二次函数的平移不改变二次项的系数；关键是根据左右平移只改变二次函数的顶点的横坐标得到新抛物线的顶点.

10. (4分) 已知线段 $a = 4$, $c = 9$, 那么 a 和 c 的比例中项 $b = \underline{6}$.

【考点】 S2: 比例线段.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 根据比例中项的定义可得 $b^2 = ac$, 从而易求 b .

【解答】 解: $\because b$ 是 a 、 c 的比例中项,

$$\therefore b^2 = ac,$$

$$\text{即 } b^2 = 36,$$

$$\therefore b = 6 \text{ (负数舍去),}$$

故答案是 6.

【点评】 本题考查了比例线段, 解题的关键是理解比例中项的含义.

11. (4分) 如果两个相似三角形的相似比为 3:2, 那么它们的周长比为 3:2.

【考点】 S7: 相似三角形的性质.

【分析】 根据相似三角形的性质: 周长比等于相似比即可解得.

【解答】 解: $\because$ 两个相似三角形的相似比为 3:2,

$\therefore$ 它们的周长比为 3:2.

【点评】 此题主要考查相似三角形的性质: 相似三角形的周长比等于相似比.

12. (4分) 小王在楼下点 A 处看到楼上点 B 处的小明的仰角是 35° , 那么点 B 处得小明看点 A 处的小王的俯角等于 35° 度.

【考点】 TA: 解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题.

【分析】 两点之间的仰角与俯角正好是两条水平线夹角的内错角, 应相等.

【解答】 解: 从点 A 看点 B 的仰角与从点 B 看点 A 的俯角互为内错角, 大小相等.

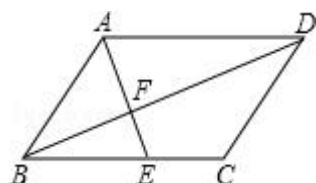
点 B 处的小明看点 A 处的小李的俯角是 35° 度.

故答案为： 35° .

【点评】此题考查的知识点是解直角三角形的应用，主要考查仰角、俯角的概念，以及仰角与俯角的关系.

13. (4分) 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， E 是边 BC 上的点， AE 交 BD 于点 F ,

如果 $\frac{BF}{FD} = \frac{2}{3}$, 那么 $\frac{BE}{BC} = \frac{2}{3}$.



【考点】L5: 平行四边形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】首先由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可知 $BC = AD$ ，那么求 $\frac{BE}{BC}$ 的值，

就转化为求 $\frac{BE}{AD}$ 的值. 又由于 $BE \parallel AD$ ，可证 $\triangle BEF \sim \triangle DAF$ ，则 $\frac{BE}{AD} = \frac{BF}{FD} = \frac{2}{3}$,

从而得出结果.

【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore BC \parallel AD$, $BC = AD$,

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{BE}{AD}.$$

又 $\because BE \parallel AD$,

$\therefore \angle BEF = \angle DAF$, $\angle EBF = \angle ADF$,

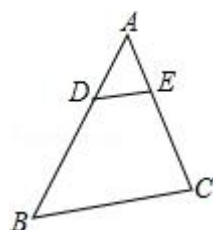
$\therefore \triangle BEF \sim \triangle DAF$,

$$\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{BF}{FD} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{2}{3}.$$

【点评】本题主要考查了相似三角形的判定及性质，有两角对应相等的两个三角形相似，相似三角形的三边对应成比例.

14. (4分) 如图， $DE \parallel BC$, $\frac{DA}{BA} = \frac{1}{3}$, 请用向量 $\overrightarrow{ED}$ 表示向量 $\overrightarrow{BC}$, 那么 $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{ED}$.



【考点】LM：*平面向量；S4：平行线分线段成比例.

【专题】31：数形结合.

【分析】先由平行线分线段成比例的性质得出线段 ED 和线段 BC 的数量关系，

可用向量 $\overrightarrow{ED}$ 表示向量 $\overrightarrow{BC}$.

【解答】解：∵ $DE \parallel BC$, $\frac{DA}{BA} = \frac{1}{3}$,

$$\therefore \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3},$$

即 $BC = 3ED$,

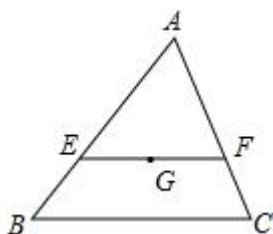
又∵ 向量 $\overrightarrow{ED}$ 和向量 $\overrightarrow{BC}$ 方向相反，

$$\therefore \overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{ED}.$$

故答案为： $-3\overrightarrow{ED}$.

【点评】此题考查了平面向量的知识及平行线分线段成比例的知识，解答本题的关键是先得出两线段的数量关系，再确定方向是否一样，难度一般.

15. (4分) 如图， G 为 $\triangle ABC$ 的重心，若 EF 过点 G 且 $EF \parallel BC$ ，交 AB 、 AC 于 E 、 F ，则 $\frac{EF}{BC}$ 的值为 $\frac{2}{3}$.



【考点】K5：三角形的重心；S9：相似三角形的判定与性质.

【专题】16：压轴题.

【分析】如果连接 AG 并延长，交 BC 于点 P ，由三角形的重心的性质可知 $AG = 2GP$ ，则 $AG:AP = 2:3$. 又 $EF \parallel BC$ ，根据相似三角形的判定可知 $\triangle AGF \sim \triangle APC$ ，得出 $AF:AC = 2:3$ ，最后由 $EF \parallel BC$ ，得出 $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ ，从而求出 $EF:BC = AF:AC = 2:3$.

【解答】解：如图，连接 AG 并延长，交 BC 于点 P .

∵ G 为 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore AG = 2GP,$$

$$\therefore AG: AP = 2: 3,$$

$\because EF$ 过点 G 且 $EF \parallel BC$,

$$\therefore \triangle AGF \sim \triangle APC,$$

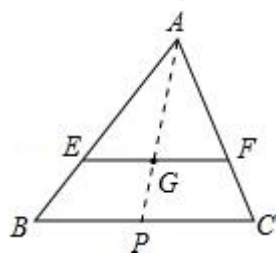
$$\therefore AF: AC = AG: AP = 2: 3.$$

又 $\because EF \parallel BC$,

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} = \frac{2}{3}.$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.



【点评】 本题主要考查了三角形的重心的性质，相似三角形的判定及性质．

三角形三边的中线相交于一点，这点叫做三角形的重心．重心到顶点的距离等于它到对边中点距离的两倍．

平行于三角形一边的直线截其它两边，所得三角形与原三角形相似．

相似三角形的三边对应成比例．

16. (4 分) 已知两圆相切，半径分别为 $2cm$ 和 $5cm$ ，那么两圆的圆心距等于 7 或 3 厘米．

【考点】 MJ：圆与圆的位置关系；MK：相切两圆的性质．

【分析】 已知两圆的半径，分两种情况：①当两圆外切时；②当两圆内切时；即可求得两圆的圆心距．

【解答】 解： $\because$ 两圆半径分别为 $2cm$ 和 $5cm$

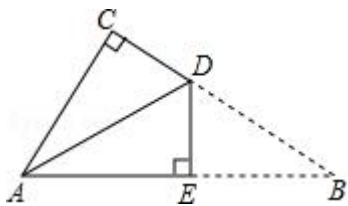
$\therefore$ 当两圆外切时，圆心距为 $2+5=7cm$ ；

当两圆内切时，圆心距为 $5-2=3cm$ ．

故答案为 7 或 3．

【点评】 本题考查了两圆相切的性质，以及两圆的半径与圆心距的关系，注意有两种情况．

17. (4分) 如图是一张直角三角形的纸片, 直角边 $AC = 6\text{cm}$, $\sin B = \frac{3}{5}$, 现将 $\triangle ABC$ 折叠, 使点 B 与点 A 重合, 折痕为 DE , 那么 DE 的长等于 $\frac{15}{4}\text{cm}$.



【考点】KQ: 勾股定理; PB: 翻折变换 (折叠问题); T1: 锐角三角函数的定义.

【专题】31: 数形结合.

【分析】在 $\text{RT}\triangle ABC$ 中, 可求出 AB 的长度, 根据折叠的性质可得出 $AE = EB = \frac{1}{2}AB$, 在 $\text{RT}\triangle ADE$ 中, 利用 $\sin B = \sin \angle DAE$ 即可得出 DE 的长度.

【解答】解: $\because AC = 6\text{cm}$, $\sin B = \frac{3}{5}$,

$$\therefore AB = \frac{AC}{\sin B} = 10\text{cm}, \quad \tan B = \frac{3}{4},$$

由折叠的性质得, $\angle B = \angle DAE$, $AE = EB = \frac{1}{2}AB = 5\text{cm}$,

$$\therefore DE = AE \tan \angle DAE = \frac{15}{4}\text{cm}.$$

故答案为: $\frac{15}{4}\text{cm}$.

【点评】此题考查了翻折变换、勾股定理及锐角三角函数的定义, 属于基础题, 解答本题的关键是掌握翻折变换前后对应边相等、对应角相等, 难度一般.

18. (4分) 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的顶点分别是 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 2)$, 已知动直线 $y = m$ ($0 < m < 2$) 与线段 AC 、 BC 分别交于 D 、 E 两点, 而在 x 轴上存在点 P , 使得 $\triangle DEP$ 为等腰直角三角形, 那么 m 的值等于 $\frac{4}{3}$ 或 1 .

【考点】D5: 坐标与图形性质; KW: 等腰直角三角形.

【专题】25: 动点型; 2C: 存在型.

【分析】因为 $\triangle ABC$ 的顶点分别为 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 2)$, 动直线 $y = m$ ($0 < m < 2$) 与线段 AC , BC 分别交于 D , E , 要使 $\triangle DEP$ 为等腰直角三角形, (1) $DE = EP$, (或 DP), $\angle DEP$ (或 $\angle EDP$) $= 90^\circ$ 或 (2) $PD = PE$,

$\angle EPD = 90^\circ$ ，由直线方程和等腰直角三角形的性质及勾股定理求解.

【解答】解： $\triangle DEP$ 为等腰直角三角形分两种情况：

(1) $DE = EP$, (或 DP), $\angle DEP$ (或 $\angle EDP$) $= 90^\circ$ 时,

设 $D(x_1, m)$, $E(x_2, m)$,

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = m^2,$$

由已知得 CA 方程: $y = 2x + 2$,

$$\therefore x_1 = \frac{m-2}{2} = \frac{m}{2} - 1,$$

CB 方程: $y = -\frac{2}{3}x + 2$,

$$\therefore x_2 = -\frac{3(m-2)}{2} = -\frac{3m}{2} + 3,$$

$$\therefore \text{得: } 4(m-2)^2 = m^2,$$

解得: $m_1 = \frac{4}{3}$, $m_2 = 4$ (与 $0 < m < 2$ 不符舍去),

$$\therefore m = \frac{4}{3};$$

(2) $PD = PE$, $\angle EPD = 90^\circ$ 时,

$$\text{则 } \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 = m^2,$$

$$\therefore (x_2 - x_1)^2 = 4m^2,$$

$$\therefore 4(m-2)^2 = 4m^2,$$

解得: $m = 1$,

综上: 当 $m = \frac{4}{3}$ 或 $m = 1$ 时, $\triangle DEP$ 为等腰直角三角形, 故答案为: $\frac{4}{3}$ 或 1.

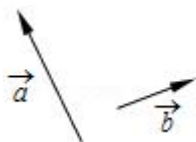
【点评】此题考查的知识点是等腰直角三角形的性质运用及坐标与图形的性质,

关键是确定等腰直角三角形的两种情况, 然后分别求解.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 如图, 已知两个不平行的向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$. 先化简, 再求作: $2\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$

$-\frac{1}{2}(2\vec{a} - 4\vec{b})$. (不要求写作法, 但要指出图中表示结论的向量)



【考点】LM：*平面向量．

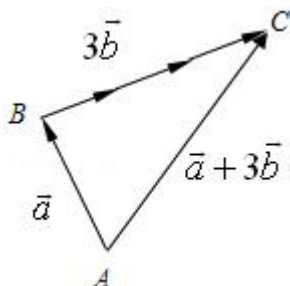
【专题】13：作图题．

【分析】首先将原式化简，再根据向量的意义画图即可．

【解答】解：原式 $= 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{a} + 2\vec{b} = \vec{a} + 3\vec{b}$ ．

$\therefore \overrightarrow{AC} = \vec{a} + 3\vec{b}$ ．

$\therefore \overrightarrow{AC}$ 为所求向量

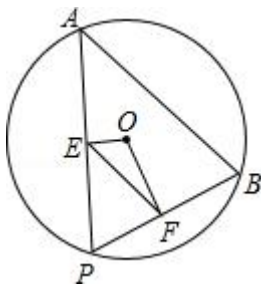


【点评】此题考查了向量的计算与向量的意义．此题培养了学生的动手能力，要注意分析．

20. (10 分) 如图，点 A, B 是 $\odot O$ 上两点， $AB = 10$ ，点 P 是 $\odot O$ 上的动点 (P 与 A, B 不重合)，连接 AP, BP ，过点 O 分别作 $OE \perp AP$ ， $OF \perp BP$ ，点 E, F 分别是垂足．

(1) 求线段 EF 的长；

(2) 点 O 到 AB 的距离为 2，求 $\odot O$ 的半径．



【考点】KQ：勾股定理；M2：垂径定理．

【分析】(1) 由于 $OE \perp AP$ ， $OF \perp BP$ ，点 E, F 分别是垂足，根据垂径定理可以得到 E, F 分别是 AP, BP 的中点，然后利用中位线定理即可求解；

(2) 如图, 过 O 作 $OC \perp AB$ 于 C , 连接 OB , 利用垂径定理和勾股定理即可求解.

【解答】解: (1) $\because OE \perp AP$, $OF \perp BP$, 点 E 、 F 分别是垂足,

$$\therefore AE = EP, PF = BF,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AB, \text{ 而 } AB = 10,$$

$$\therefore EF = 5;$$

(2) 如图, 过 O 作 $OC \perp AB$ 于 C , 连接 OB ,

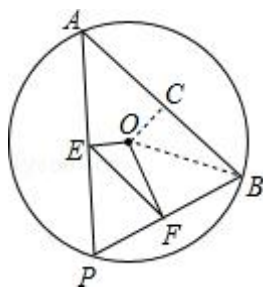
$\therefore C$ 为 AB 的中点,

$$\therefore BC = 5,$$

而 $OC = 2$,

$$\therefore OB = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29},$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } \sqrt{29}.$$



【点评】此题考查了垂径定理和勾股定理, 解题时首先根据垂径定理证明中位线, 然后利用勾股定理计算即可解决问题.

21. (10 分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + 5$ ($a \neq 0$) 中, 函数 y 与自变量 x 的部分对应值如表:

x	...	-1	...	...	2	...
y	...	10	...	...	1	...

(1) 求这个二次函数的解析式及图象的对称轴;

(2) 设 $m \geq 2$, 且 $A(m, y_1)$, $B(m+1, y_2)$ 两点都在该函数的图象上, 试比较 y_1 与 y_2 的大小: y_1 小于 y_2 (填“大于”“等于”或“小于”).

【考点】H3: 二次函数的性质; H5: 二次函数图象上点的坐标特征; H8: 待定系数法求二次函数解析式.

【分析】(1) 利用待定系数法求得该二次函数的解析式, 由对称轴方程求得该二次函数图象的对称轴;

(2) 根据二次函数图象的单调性填空.

【解答】解: (1) 根据图表知, 该二次函数的图象经过点 $(-1, 10)$ 、 $(2, 1)$,

$$\therefore \begin{cases} a-b+5=10 \\ 4a+2b+5=1 \end{cases},$$

解得, $\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \end{cases},$

$\therefore$ 该二次函数的解析式是: $y = x^2 - 4x + 5$,

$\therefore$ 该二次函数图象的对称轴是: $x = -\frac{-4}{2} = 2$, 即 $x = 2$;

(2) $\because 1 > 0$,

$\therefore$ 二次函数 $y = x^2 - 4x + 5$ 的开口向上;

$\therefore$ 该二次函数图象在当 $x > 2$ 时, y 随 x 的增大而增大;

又 $\because m \geq 2$, $A(m, y_1)$, $B(m+1, y_2)$ 两点都在该函数的图象上,

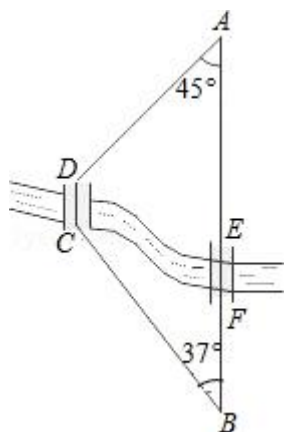
$\therefore y_1 < y_2$;

故答案是: 小于.

【点评】本题综合考查了待定系数法求二次函数的解析式、二次函数图象上点的坐标特征以及二次函数图象的性质. 解答该题的关键是根据图表提取关键性信息.

22. (10分) 如图所示, A , B 两地隔河相望, 原来从 A 地到 B 地需要经过桥 DC , 沿折线 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$ 到达 B 地, 现在直线 AB (与桥 DC 平行) 上建了新桥 EF , 可沿直线 AB 从 A 地直达 B 地, 已知 $BC = 1000m$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 37^\circ$. 问: 现在从 A 地到达 B 地可比原来少走多少路程?

(结果精确到 $1m$. 参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$)



【考点】T8：解直角三角形的应用．

【分析】少走路程就是 $(AD+CD+BC-AB)$ 的长．过点 D 作 $DH \perp AB$ 于 H ， $DG \parallel CB$ 交 AB 于 G ．将梯形问题转化为三角形中求解．

【解答】解：如图，过点 D 作 $DH \perp AB$ 于 H ， $DG \parallel CB$ 交 AB 于 G ．

$\because DC \parallel AB$ ，

$\therefore$ 四边形 $DCBG$ 为平行四边形．

$\therefore DC = GB$ ， $GD = BC = 1000$ ．

$\therefore$ 两条路线路程之差为 $AD+DG-AG$ ．

在 $\text{Rt}\triangle DGH$ 中，

$$DH = DG \cdot \sin 37^\circ \approx 1000 \times 0.60 = 600m,$$

$$GH = DG \cdot \cos 37^\circ \approx 1000 \times 0.80 \approx 800m.$$

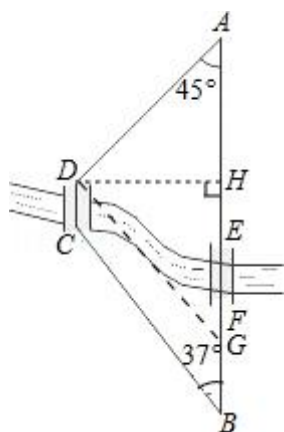
在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中，

$$AD = \sqrt{2}DH \approx 1.41 \times 600 \approx 846m.$$

$$AH = DH \approx 600m.$$

$$\therefore AD+DG-AG = (846+1000) - (600+800) \approx 446(m).$$

即现在从 A 地到 B 地可比原来少走约 $446m$ ．

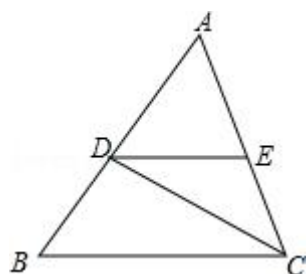


【点评】 本题考查了解直角三角形的实际应用，将梯形中的问题转化为三角形问题是解决梯形问题的常用方法，常作的辅助线有平移腰、平移对角线、作高等.

23. (12分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 上一点， E 是 AC 上一点， $\angle ACD = \angle B$ ， $AD^2 = AE \cdot AC$. 求证：

(1) $DE \parallel BC$;

(2) $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle BCD}}\right)^2$.



【考点】 J9: 平行线的判定; K3: 三角形的面积; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】 14: 证明题.

【分析】 (1) 利用隐藏条件: $\angle A = \angle A$ 和已知条件: $\angle ACD = \angle B$ 可判定 $\triangle ADC \sim \triangle ACB$, 再利用相似三角形的性质: 对应边的比值相等可得比例式, 再由已知的比例式可证明: $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$, 即可证明 $DE \parallel BC$;

(2) 有(1)可知: $DE \parallel BC$, 所以 $\triangle DEC$ 和 $\triangle BCD$ 中 DE 和 BC 边上的高相等, 即面积比等于底之比, 问题得证.

【解答】 证明: (1) $\because \angle A = \angle A$, $\angle ACD = \angle B$,

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB},$$

$$\therefore AD^2 = AE \cdot AC$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD},$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD},$$

$$\therefore DE \parallel BC;$$

$$(2) \because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2,$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{DE}{BC},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle BCD}}\right)^2.$$

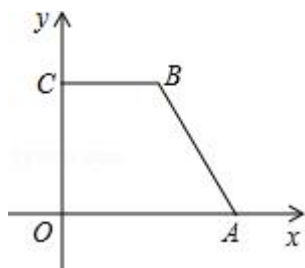
【点评】 本题考查了利用平行线判定两线平行和相似三角形的判定以及相似三角形的性质和平行线之间的距离相等这一性质.

24. (12分) 如图, 梯形 $OABC$, $BC \parallel OA$, 边 OA 在 x 轴正半轴上, 边 OC 在 y 轴正半轴上, 点 $B(3, 4)$, $AB = 5$.

(1) 求 $\angle BAO$ 的正切值;

(2) 如果二次函数 $y = \frac{4}{9}x^2 + bx + c$ 的图象经过 O 、 A 两点, 求这个二次函数的解析式并求图象顶点 M 的坐标;

(3) 点 Q 在 x 轴上, 以点 Q , 点 O 及 (2) 中的点 M 为顶点的三角形与 $\triangle ABO$ 相似, 求点 Q 的坐标.



【考点】 D5：坐标与图形性质；H3：二次函数的性质；H8：待定系数法求二次函数解析式；HF：二次函数综合题；LI：直角梯形；S7：相似三角形的性质；T1：锐角三角函数的定义．

【分析】（1）作 $BD \perp OA$ 于点 D ，由点 B 的坐标可以求出 BD 、 OD 的值，在直角三角形 ABD 中由勾股定理可以求出 AD 的值，从而可以求出 $\angle BAO$ 的正切值．

（2）由条件可以求出 A 点的坐标，利用待定系数法就可以直接求出抛物线的解析式．

（3）根据条件当 $\triangle ABO \sim \triangle MQO$ 和 $\triangle ABO \sim \triangle QMO$ 时，从两种情况根据相似三角形的性质就可以求出 OQ 的值，从而求出 Q 点的坐标．

【解答】 解：（1）作 $BD \perp OA$ 于点 D ，

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ ,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，由勾股定理得

$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$\because B(3, 4),$$

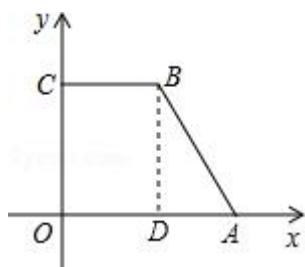
$$\therefore OD = 3, BD = 4.$$

$$\because AB = 5,$$

$$\therefore AD^2 = 25 - 16,$$

$$\therefore AD = 3,$$

$$\therefore \tan \angle BAD = \frac{4}{3}.$$



$$(2) \because AD = 3, OD = 3,$$

$$\therefore OA = 6,$$

$$\therefore A(6, 0), O(0, 0)$$

$$\therefore \begin{cases} 0=c \\ 0=\frac{4}{9} \times 36 + 6b+c \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} b=-\frac{8}{3} \\ c=0 \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x$$

$$\therefore y = -\frac{4}{9}(x-3)^2 - 4,$$

$$\therefore M(3, -4).$$

$$(3) \because M(3, -4), B(3, 4),$$

$$\therefore OB = OM,$$

$$\because BD \perp OA, OD = AD,$$

$$\therefore OB = AB = 5,$$

$$\therefore OM = 5.$$

$$\triangle ABO \sim \triangle MQO \text{ 时, } \frac{AO}{MO} = \frac{BO}{OQ},$$

$$\therefore \frac{6}{5} = \frac{5}{OQ},$$

$$\therefore OQ = \frac{25}{6},$$

$$\therefore Q\left(\frac{25}{6}, 0\right)$$

$$\triangle ABO \sim \triangle QMO \text{ 时, } \frac{AO}{QO} = \frac{BO}{MO},$$

$$\therefore \frac{6}{QO} = \frac{5}{5},$$

$$\therefore QO = 6,$$

$$\therefore Q(6, 0),$$

综上所述, 所以 $Q\left(\frac{25}{6}, 0\right)$ 或 $(6, 0)$

(2) 分别过 D 点作 $DP \perp AB$ 于 P , $DQ \perp BC$ 于 Q , 连 DB , 根据等边三角形的性质得 $\angle A = \angle C = 60^\circ$, 而 $DA = DC = 2$, 根据含 30° 的直角三角形三边的关系得到 $AP = CQ = 1$, $DP = DQ = \sqrt{3}$, 由 $AM = x$, 得 $CN = \frac{4}{x}$, $MB = 4 - x$, $BN = 4 - \frac{4}{x}$, 两块三角形板重叠部分为四边形 $DMBN$, 则 $y = S_{\triangle DBM} + S_{\triangle DBN}$, 然后根据三角形的面积公式计算即可, 易得到当 $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ 时, x 的取值范围为 $1 < x < 4$;

(3) 当 M 在线段 AB 上, $BM = 2$ 时, $x = 4 - 2 = 2$, 把 $x = 2$ 代入 (2) 的关系式中计算即可. 当 M 点在线段 AB 的延长线上, 过 D 作 $DH \parallel BC$ 交 AB 于 H , $BP = \frac{1}{2}DH = 1$, 由 $\triangle AMD \sim \triangle CDN$, 则 $AM : DC = AD : CN$, 即 $AM \cdot CN = DC \cdot AD$, 可计算出 CN , 然后根据三角形的面积公式可计算出 $S_{\triangle DPN}$, 即两块三角形板重叠部分的面积.

【解答】 解: (1) $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 都是边长为 4 的等边三角形,

$$\therefore \angle A = \angle C = \angle EDF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AMD + \angle ADM = 120^\circ, \quad \angle ADM + \angle NDC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AMD = \angle NDC,$$

$$\therefore \triangle AMD \sim \triangle CDN,$$

$$\therefore AM : DC = AD : CN, \text{ 即 } AM \cdot CN = DC \cdot AD,$$

而 D 点为 AC 的中点,

$$\therefore DC = AD = 2,$$

$$\therefore AM \cdot CN = 4;$$

(2) 分别过 D 点作 $DP \perp AB$ 于 P , $DQ \perp BC$ 于 Q , 连 DB , 如图

$$\because \angle A = \angle C = 60^\circ, \quad DA = DC = 2,$$

$$\therefore AP = CQ = 1,$$

$$\therefore DP = DQ = \sqrt{3},$$

$$AM = x, \text{ 则 } CN = \frac{4}{x}, \quad MB = 4 - x, \quad BN = 4 - \frac{4}{x},$$

$\because BD$ 为等边三角形的高,

$\therefore$ 点 D 到 EF 的距离为 DB ,

$\therefore$ 两块三角形板重叠部分为四边形 $DMBN$,

$$\begin{aligned}\therefore y &= S_{\triangle DBM} + S_{\triangle DBN} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot (4 - x) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(4 - \frac{4}{x}\right) \\ &= 4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{2\sqrt{3}}{x},\end{aligned}$$

在图(1)中, $AM = 1$,

$\therefore$ 当 $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ 时, x 的取值范围为 $1 < x < 4$;

(3) 当 M 在线段 AB 上, $BM = 2$ 时, $x = 4 - 2 = 2$,

$$\begin{aligned}\text{即 } y &= 4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 - \frac{2\sqrt{3}}{2} \\ &= 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

当 M 点在线段 AB 的延长线上, 如图(备用图),

过 D 作 $DH \parallel BC$ 交 AB 于 H ,

$$\therefore DH = \frac{1}{2}BC = 2, \quad BH = 2,$$

$$\because BM = 2,$$

$$\therefore BP = \frac{1}{2}DH = 1,$$

与①一样可证得 $\triangle AMD \sim \triangle CDN$,

$$\therefore AM : DC = AD : CN, \text{ 即 } AM \cdot CN = DC \cdot AD,$$

$$\therefore 6 \times CN = 4, \text{ 即 } CN = \frac{2}{3},$$

$$\therefore PN = 4 - 1 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle DPN} = \frac{1}{2}PN \cdot DQ = \frac{1}{2} \times \frac{7}{3} \times \sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{6}.$$

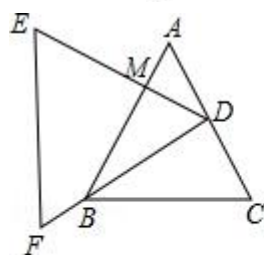


图1

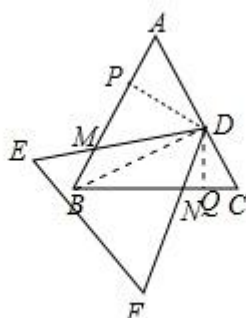
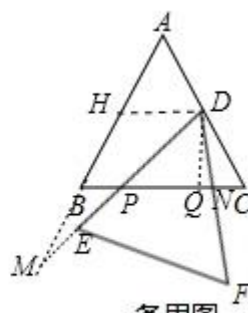


图2



备用图

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质: 有两组角对应相等的两个三角形相似; 相似三角形的对应边的比相等. 也考查了等边三角形的性质、旋转的性质以及三角形的面积公式.

