

2012 年上海市徐汇区中考数学一模试卷

一、选择题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 5$ ， $\angle A = \alpha$ ，那么 BC 的长是 ()

- A. $5\cot\alpha$ B. $5\tan\alpha$ C. $\frac{5}{\cos\alpha}$ D. $\frac{5}{\sin\alpha}$

2. (4 分) 将抛物线 $y = x^2 + 2$ 向右平移 1 个单位后所得抛物线的解析式是 ()

- A. $y = x^2 + 3$ B. $y = x^2 + 1$ C. $y = (x + 1)^2 + 2$ D. $y = (x - 1)^2 + 2$

3. (4 分) 直升飞机在离地面 2000 米的上空测得上海东方明珠底部的俯角为 30° ，此时直升飞机与上海东方明珠底部之间的距离是 ()

- A. 2000 米 B. $2000\sqrt{3}$ 米 C. 4000 米 D. $4000\sqrt{3}$ 米

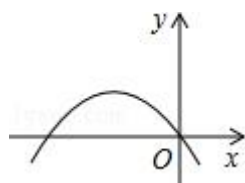
4. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 8$ ， $AD \perp BC$ ，垂足为 D ， BE 是边 AC 上的中线， AD 与 BE 相交于点 G ，那么 AG 的长为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 无法确定

5. (4 分) 关于直角三角形，下列说法正确的是 ()

- A. 所有的直角三角形一定相似
B. 如果直角三角形的两边长分别是 3 和 4，那么第三边的长一定是 5
C. 如果已知直角三角形两个元素（直角除外），那么这个直角三角形一定可解
D. 如果已知直角三角形一锐角的三角比，那么这个直角三角形的三边之比一定确定

6. (4 分) 如图所示的抛物线是二次函数 $y = ax^2 - 3x + a^2 - 1$ 的图象，那么下列结论错误的是 ()



- A. 当 $y < 0$ 时， $x > 0$
B. 当 $-3 < x < 0$ 时， $y > 0$
C. 当 $x < -\frac{3}{2}$ 时， y 随 x 的增大而增大
D. 上述抛物线可由抛物线 $y = -x^2$ 平移得到

二、填空题（共 12 小题，每小题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ ，且 $a+b=21$ ，那么 $b-a=$ _____.

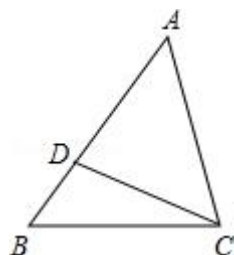
8. (4 分) 如果 $\vec{a} + \vec{b} = 3(2\vec{a} - \vec{b})$ ，那么用 $\vec{a}$ 表示 $\vec{b}$ ， $\vec{b} =$ _____.

9. (4 分) 抛物线 $y = -2x^2 + 3x - 1$ 与 x 轴的交点坐标是_____.

10. (4 分) 2011 年 11 月“天宫一号”和“神州八号”的成功对接是我国航天事业又一巨大成就. 在一比例尺是 1: 15000000 的卫星地图上，测得上海和南京的距离大约是 2 厘米. 那么上海和南京的实际距离大约是_____千米.

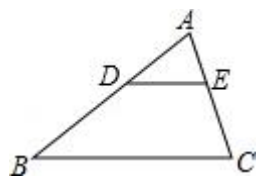
11. (4 分) 抛物线 $y = x^2 + bx$ 的对称轴是直线 $x = -\frac{1}{2}$ ，那么抛物线的解析式是_____.

12. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 4$ ， $AC = 5$ ，点 D 在边 AB 上， $AC^2 = AD \cdot AB$ ，那么 $CD =$ _____.

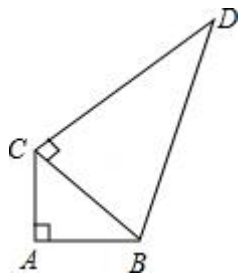


13. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 BA 、 CA 上， $DE \parallel BC$ ， $\frac{S_{\triangle DEA}}{S_{\triangle BCA}} = \frac{1}{9}$ ，

$DE = 3$ ，那么 $BC =$ _____.

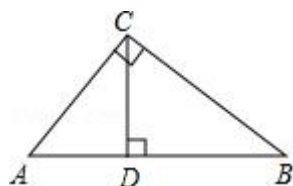


14. (4 分) 如图，在四边形 $ABDC$ 中，连接 BC ， $\angle A = \angle BCD = 90^\circ$ ， $\angle D = 30^\circ$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ，如果 $BC = \sqrt{2}$ ，那么 $S_{\text{四边形 } ABDC} =$ _____.



15. (4 分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，垂足为 D ，如果 $\triangle$

$\triangle ADC$ 和 $\triangle BDC$ 的周长之比是 $1:3$, 则 $\cot \angle BCD =$ _____.



16. (4分) 一公路大桥引桥长 180 米, 已知引桥的坡度 $i = 1:3$, 那么引桥的铅直高度为 _____ (结果保留根号) 米.

17. (4分) 将抛物线 $y = x^2 - 4x + 4$ 沿 y 轴向下平移后, 所得抛物线与 x 轴交于点 A, B , 顶点为 C , 如果 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 那么顶点 C 的坐标是 _____.

18. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 把 $\triangle ABC$ 折叠, 使点 B 与点 A 重合, 折痕交 AB 于点 M , 交 BC 于点 N . 如果 $\triangle CAN$ 是等腰三角形, 则 $\angle B$ 的度数为 _____.

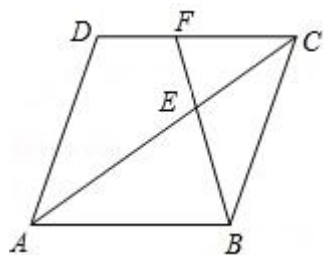
三、解答题 (共 7 小题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $\frac{\tan 45^\circ}{\cot 30^\circ \cdot \sin 60^\circ} - \sqrt{(\cos 45^\circ - 1)^2} - \sin 45^\circ + \cot 60^\circ \tan 30^\circ$.

20. (10分) 如图, $\square ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, 点 F 是 CD 的中点, BF 和 AC 相交于点 E .

(1) 求 $\frac{AE}{CE}$ 的值;

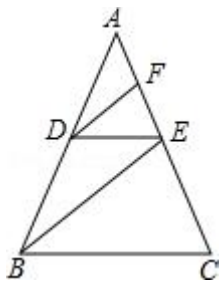
(2) 如果 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 请用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AE}$.



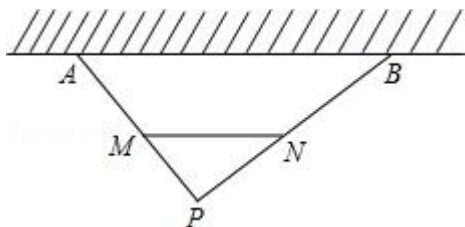
21. (10分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, 点 F, E 在边 AC 上, 且 $DF \parallel BE$, $\frac{AF}{FE} = \frac{AE}{CE}$.

(1) 求证: $DE \parallel BC$;

(2) 如果 $\frac{AF}{FE} = \frac{2}{3}$, $S_{\triangle ADF} = 2$, 求 $S_{\triangle ABC}$ 的值.

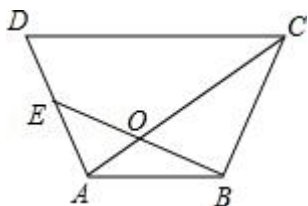


22. (10 分) 小楠家附近的公路上通行车辆限速为 60 千米/小时. 小楠家住在距离公路 50 米的居民楼 (如图中的 P 点处), 在他家前有一道路指示牌 MN 正好挡住公路上的 AB 段 (即点 P 、 M 、 A 和点 P 、 N 、 B 分别在一直线上), 已知 $MN \parallel AB$, $\angle MNP = 30^\circ$, $\angle NMP = 45^\circ$, 小楠看见一辆卡车通过 A 处, 7 秒后他在 B 处再次看见这辆卡车, 他认定这辆卡车一定超速, 你同意小楠的结论吗? 请说明理由. (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$)



23. (12 分) 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD = BC$, 点 E 在边 AD 上, BE 与 AC 相交于点 O , 且 $\angle ABE = \angle BCA$. 求证:

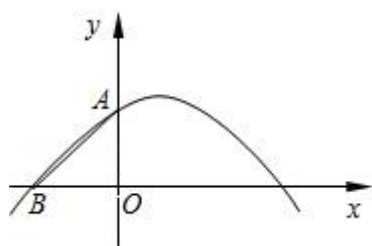
- (1) $\triangle BAE \sim \triangle BOA$;
(2) $BO \cdot BE = BC \cdot AE$.



24. (12 分) 如图, $\triangle AOB$ 的顶点 A 、 B 在二次函数 $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + \frac{3}{2}$ 的图象上,

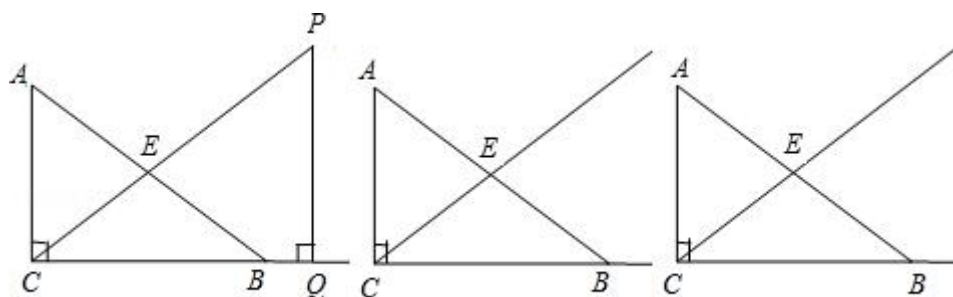
又点 A 、 B 分别在 y 轴和 x 轴上, $\tan \angle ABO = 1$.

- (1) 求此二次函数的解析式;
(2) 过点 A 作 $AC \parallel BO$ 交上述函数图象于点 C , 点 P 在上述函数图象上, 当 $\triangle POC$ 与 $\triangle ABO$ 相似时, 求点 P 的坐标.



25. (14分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CE 是斜边 AB 上的中线, $AB = 10$, $\tan A = \frac{4}{3}$, 点 P 是 CE 延长线上的一动点, 过点 P 作 $PQ \perp CB$, 交 CB 延长线于点 Q , 设 $EP = x$, $BQ = y$.

- (1) 求 y 关于 x 的函数关系式及定义域;
- (2) 连接 PB , 当 PB 平分 $\angle CPQ$ 时, 求 PE 的长;
- (3) 过点 B 作 $BF \perp AB$ 交 PQ 于 F , 当 $\triangle BEF$ 和 $\triangle QBF$ 相似时, 求 x 的值.



值. (图) (备用图) (备用图)

2012 年上海市徐汇区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 5$ ， $\angle A = \alpha$ ，那么 BC 的长是（ ）

- A. $5\cot\alpha$ B. $5\tan\alpha$ C. $\frac{5}{\cos\alpha}$ D. $\frac{5}{\sin\alpha}$

【考点】T1：锐角三角函数的定义；T7：解直角三角形.

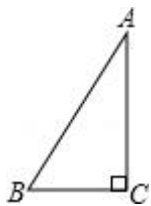
【专题】11：计算题.

【分析】利用 $\angle A$ 的正切值进行计算即可.

【解答】解： $\because \tan A = \frac{BC}{AC}$ ， $AC = 5$ ， $\angle A = \alpha$ ，

$$\therefore BC = 5\tan\alpha,$$

故选：B.



【点评】考查解直角三角形的知识；掌握和一个锐角的邻边与对边有关的三角函数值是正切值的知识是解决本题的关键.

2. (4 分) 将抛物线 $y = x^2 + 2$ 向右平移 1 个单位后所得抛物线的解析式是（ ）

- A. $y = x^2 + 3$ B. $y = x^2 + 1$ C. $y = (x + 1)^2 + 2$ D. $y = (x - 1)^2 + 2$

【考点】H6：二次函数图象与几何变换.

【分析】易得原抛物线的顶点及新抛物线的顶点，利用顶点式及平移不改变二次项的系数可得新抛物线的解析式.

【解答】解：原抛物线的顶点为 $(0, 2)$ ，向右平移 1 个单位，那么新抛物线的顶点为 $(1, 2)$.

可设新抛物线的解析式为： $y = (x - h)^2 + k$ ，代入得： $y = (x - 1)^2 + 2$.

故选：D.

【点评】本题考查二次函数的平移，得到平移前后的顶点是解决本题的关键；用到的知识点为：二次函数的平移，看顶点的平移即可，二次函数的平移不改变二次项的系数.

3.(4分)直升飞机在离地面2000米的上空测得上海东方明珠底部的俯角为 30° ，此时直升飞机与上海东方明珠底部之间的距离是（ ）

- A. 2000 米 B. $2000\sqrt{3}$ 米 C. 4000 米 D. $4000\sqrt{3}$ 米

【考点】TA：解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题.

【专题】11：计算题.

【分析】由题意可知，在直角三角形中，已知角的对边求斜边，可以用正弦函数来计算.

【解答】解：根据题意得：直升飞机与上海东方明珠底部之间的距离是 $\frac{2000}{\sin 30^\circ}$
 $= \frac{2000}{\frac{1}{2}} = 4000$ 米.

故选：C.

【点评】本题考查解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题，要求学生能借助俯角构造直角三角形并解直角三角形.

4.(4分)在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 8$ ， $AD \perp BC$ ，垂足为 D ， BE 是边 AC 上的中线， AD 与 BE 相交于点 G ，那么 AG 的长为（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 无法确定

【考点】K2：三角形的角平分线、中线和高；KH：等腰三角形的性质；KQ：勾股定理.

【分析】先根据等腰三角形的性质和勾股定理求出 AD ，再判断点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，然后根据三角形重心的性质来求 AG 的长.

【解答】解： $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $AD \perp BC$ ，

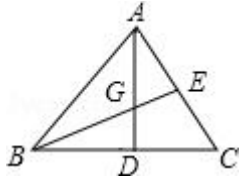
$$\therefore AD = \sqrt{5^2 - (8 \div 2)^2} = 3,$$

$\because$ 中线 BE 与高 AD 相交于点 G ，

$\therefore$ 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore AG = 3 \times \frac{2}{3} = 2.$$

故选：B.



【点评】本题考查了等腰三角形的性质和勾股定理以及三角形的重心的性质，判断点 G 为三角形的重心是解题的关键．

5. (4 分) 关于直角三角形，下列说法正确的是 ()

- A. 所有的直角三角形一定相似
- B. 如果直角三角形的两边长分别是 3 和 4，那么第三边的长一定是 5
- C. 如果已知直角三角形两个元素（直角除外），那么这个直角三角形一定可解
- D. 如果已知直角三角形一锐角的三角比，那么这个直角三角形的三边之比一定确定

【考点】KN：直角三角形的性质；KQ：勾股定理；S8：相似三角形的判定；T7：解直角三角形．

【分析】根据相似的判定方法对 A 进行判断；设斜边为 4，即可对 B 进行判断；由解直角三角形时必须已知一条边可对 C 进行判断；根据锐角函数的定义可对 D 进行判断．

【解答】解： A 、等腰直角三角形和含 30° 的直角三角形不相似，所以 A 选项错误；

B 、若直角三角形的两边长分别是 3 和 4，其中 4 为斜边时，第三边为 $\sqrt{7}$ ，所以 B 选项错误；

C 、已知直角三角形两个元素（直角除外），并且已知的是直角三角形两个锐角，那么此直角三角形不能解，所以 C 选项错误；

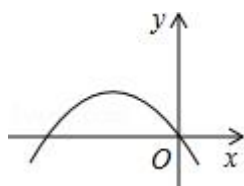
D 、已知直角三角形一锐角的三角比，根据锐角函数的定义可求出这个直角三角形的三边之比，所以 D 选项正确．

故选： D ．

【点评】本题考查了解直角三角形的定义：求直角三角形中未知的边和角的过程，叫解直角三角形．

6. (4 分) 如图所示的抛物线是二次函数 $y = ax^2 - 3x + a^2 - 1$ 的图象，那么下列结

论错误的是 ()



A. 当 $y < 0$ 时, $x > 0$

B. 当 $-3 < x < 0$ 时, $y > 0$

C. 当 $x < -\frac{3}{2}$ 时, y 随 x 的增大而增大

D. 上述抛物线可由抛物线 $y = -x^2$ 平移得到

【考点】 H3: 二次函数的性质; H5: 二次函数图象上点的坐标特征; H6: 二次函数图象与几何变换; HC: 二次函数与不等式 (组).

【分析】 由图象可知, 抛物线经过原点 $(0, 0)$, 二次函数 $y = ax^2 - 3x + a^2 - 1$ 与 y 轴交点纵坐标为 $a^2 - 1$, 所以 $a^2 - 1 = 0$, 解得 a 的值. 再图象开口向下, $a < 0$ 确定 a 的值, 进而得出二次函数的解析式, 即可得出答案.

【解答】 解: 由图象可知, 抛物线经过原点 $(0, 0)$,

所以 $a^2 - 1 = 0$, 解得 $a = \pm 1$,

$\because$ 图象开口向下, $a < 0$,

$\therefore a = -1$.

$\therefore y = -x^2 - 3x$,

$\therefore$ 二次函数与图象的交点为: $(-3, 0), (0, 0)$,

$\therefore$ 当 $y < 0$ 时, $x < -3$ 或 $x > 0$, 故 A 选项错误;

当 $-3 < x < 0$ 时, $y > 0$, 故 B 选项正确;

当 $x < -\frac{3}{2}$ 时, y 随 x 的增大而增大故 C 选项正确;

上述抛物线可由抛物线 $y = -x^2$ 平移得到, 故 D 选项正确;

故选: A.

【点评】 此题主要考查了二次函数图象点的性质, 从图象上把握有用的条件, 准确选择数量关系解得 a 的值, 简单的图象最少能反映出 2 个条件: 开口向下 $a < 0$; 经过原点 $a^2 - 1 = 0$, 利用这两个条件即可求出 a 的值进而得出二次函数的解析式是解题关键.

二、填空题（共 12 小题，每小题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）如果 $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ ，且 $a+b=21$ ，那么 $b-a=$ 3 .

【考点】S1：比例的性质.

【专题】11：计算题.

【分析】由题意得： $4a=3b$ ，又 $a+b=21$ ，将两式联立分别求出 a 和 b 的值，继而代入即可.

【解答】解：由题意可知： $4a=3b$ ①，

又 $\because a+b=21$ ②，

将①和②联立得： $a=9$ ， $b=12$ ，

$\therefore b-a=3$.

故答案为：3.

【点评】本题是基础题，考查了比例的基本性质，比较简单，注意细心运算即可.

8.（4 分）如果 $\vec{a}+\vec{b}=3(2\vec{a}-\vec{b})$ ，那么用 $\vec{a}$ 表示 $\vec{b}$ ， $\vec{b}=$ $-\frac{5}{4}\vec{a}$.

【考点】LM：*平面向量.

【专题】11：计算题.

【分析】根据平面向量的运算法则将题目所给式子 $\vec{a}+\vec{b}=3(2\vec{a}-\vec{b})$ 进行化简，即可得出答案.

【解答】解：由题意得： $\vec{a}+\vec{b}=6\vec{a}-3\vec{b}$ ，

$\therefore 4\vec{b}=5\vec{a}$ ，

$\therefore \vec{b}=\frac{5}{4}\vec{a}$.

故答案为： $\frac{5}{4}\vec{a}$.

【点评】本题考查平面向量的知识，解题关键是熟练掌握平面向量这一概念（不但有大小，而且有方向）及其运算法则，难度一般.

9.（4 分）抛物线 $y=-2x^2+3x-1$ 与 x 轴的交点坐标是 $(\frac{1}{2}, 0)$ 或 $(1, 0)$.

【考点】HA：抛物线与 x 轴的交点.

【专题】2B：探究型.

【分析】根据抛物线与 x 轴的交点坐标特点令 $y=0$ ，求出 x 的值即可.

【解答】解：∵ x 轴上点的纵坐标为0，

$$\therefore -2x^2+3x-1=0, \text{ 解得 } x_1=\frac{1}{2}, x_2=1,$$

∴抛物线 $y=-2x^2+3x-1$ 与 x 轴的交点坐标是 $(\frac{1}{2}, 0), (1, 0)$.

故答案为： $(\frac{1}{2}, 0), (1, 0)$.

【点评】本题考查的是抛物线与 x 轴的交点问题，熟知 x 轴上点的坐标特点是解答此题的关键.

10. (4分) 2011年11月“天宫一号”和“神州八号”的成功对接是我国航天事业又一巨大成就. 在一比例尺是1:15000000的卫星地图上，测得上海和南京的距离大约是2厘米. 那么上海和南京的实际距离大约是300千米.

【考点】S2: 比例线段.

【分析】首先设上海和南京实际相距 x 厘米，然后根据比例尺的性质，即可得方程 $1:15000000=2:x$ ，解此方程即可求得答案. 注意统一单位.

【解答】解：设上海和南京实际相距 x 厘米，

根据题意得： $1:15000000=2:x$ ，

解得： $x=30000000$ ，

∵ 30000000 厘米 $=300$ 千米，

∴两地实际相距300千米.

故答案为：300.

【点评】此题考查了比例尺的性质. 此题比较简单，注意方程思想的应用，注意统一单位.

11. (4分) 抛物线 $y=x^2+bx$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{1}{2}$ ，那么抛物线的解析式是 $y=x^2+x$.

【考点】H3: 二次函数的性质; H8: 待定系数法求二次函数解析式.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据题意得出 $-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}$ ， $a=1$ ，求出 b ，代入即可.

【解答】解：∵抛物线 $y=x^2+bx$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{1}{2}$ ，

$$\therefore -\frac{b}{2 \times 1} = -\frac{1}{2},$$

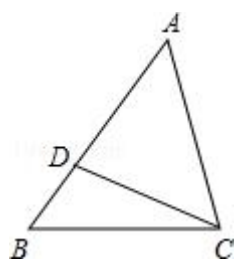
解得： $b = 1$ ，

$$\therefore y = x^2 + x,$$

故答案为： $y = x^2 + x$ 。

【点评】本题考查了用待定系数法求二次函数的解析式，二次函数的性质的应用，关键是知道抛物线的对称轴 $x = -\frac{1}{2}$ ，就是抛物线的顶点的横坐标 $-\frac{b}{2a}$ ，题目比较典型，难度不大。

12. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 4$ ， $AC = 5$ ，点 D 在边 AB 上， $AC^2 = AD \cdot AB$ ，那么 $CD = \frac{10}{3}$ 。



【考点】S9：相似三角形的判定与性质。

【分析】根据 $AC^2 = AD \cdot AB$ 可以得到 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，利用相似三角形对应边的比等于相似比和已知边的长求未知边即可。

【解答】解： $\because AC^2 = AD \cdot AB$ ， $\angle A = \angle A$ ，

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BC}$$

$$\because AB = 6, BC = 4, AC = 5,$$

$$\therefore \frac{5}{6} = \frac{CD}{4}$$

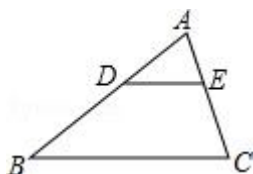
$$\text{解得： } CD = \frac{10}{3},$$

故答案为 $\frac{10}{3}$ 。

【点评】本题考查了相似三角形的性质及判定，解题的关键是利用已知条件证得两个三角形相似，然后利用相似三角形的对应边成比例求得结论。

13. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 BA 、 CA 上， $DE \parallel BC$ ， $\frac{S_{\triangle DEA}}{S_{\triangle BCA}} = \frac{1}{9}$ ，

$DE = 3$ ，那么 $BC = 9$ 。



【考点】S9：相似三角形的判定与性质．

【分析】根据相似三角形的性质相似三角形的面积之比等于相似比的平方建立等量关系就可以求出结论．

【解答】解：∵ $DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \triangle DEA \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \frac{S_{\triangle DEA}}{S_{\triangle BCA}}.$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DEA}}{S_{\triangle BCA}} = \frac{1}{9}, \text{ 且 } DE = 3,$$

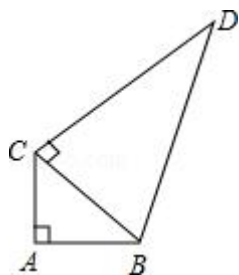
$$\therefore \left(\frac{3}{BC}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\therefore BC = 9$$

故答案为：9

【点评】本题考查了相似三角形的判定及相似三角形的面积之间的关系．

14. (4分) 如图，在四边形 $ABDC$ 中，连接 BC ， $\angle A = \angle BCD = 90^\circ$ ， $\angle D = 30^\circ$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ，如果 $BC = \sqrt{2}$ ，那么 $S_{\text{四边形} ABDC} = \frac{1+2\sqrt{3}}{2}$ ．



【考点】K3：三角形的面积；KO：含 30° 度角的直角三角形；KU：勾股定理的应用；KW：等腰直角三角形．

【专题】11：计算题．

【分析】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BC = \sqrt{2}$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ，易求 $\angle ACB = 45^\circ$ ，那么 $AB = AC$ ，再利用勾股定理可求 $AB = AC = 1$ ，进而可求 $\triangle ABC$ 的面积，在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中， $\angle D = 30^\circ$ ， $BC = \sqrt{2}$ ，利用 30° 的角所对的直角边等于斜边的一半

可求 BD ，再利用勾股定理可求 CD ，进而可求 $\triangle BCD$ 的面积，从而可求四边形 $ABCD$ 的面积.

【解答】解：如右图，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BC = \sqrt{2}$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACB = 45^\circ，$$

$$\therefore AB = AC = 1，$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}；$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中， $\angle D = 30^\circ$ ， $BC = \sqrt{2}$ ，

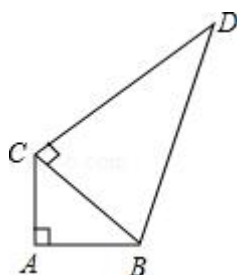
$$\therefore BD = 2\sqrt{2}，$$

$$\therefore CD = \sqrt{8-2} = \sqrt{6}，$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{3}，$$

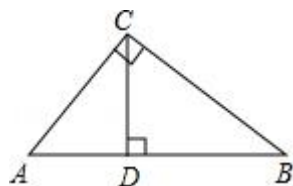
$$\therefore S_{\text{四边形 } ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} + \sqrt{3} = \frac{1+2\sqrt{3}}{2}.$$

故答案是 $\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$.



【点评】本题考查了等腰直角三角形的判定和性质、三角形的面积、勾股定理、含有 30° 角的直角三角形的性质，解题的关键是分别求出两个直角三角形的两直角边.

15. (4分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，垂足为 D ，如果 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDC$ 的周长之比是 $1:3$ ，则 $\cot \angle BCD = \frac{1}{3}$.



【考点】KN：直角三角形的性质；KQ：勾股定理；T1：锐角三角函数的定义.

【专题】 11： 计算题.

【分析】 根据直角三角形的直角的关系可以推出 $\angle BCD = \angle A$ ，然后根据锐角三角函数的定义用 BD 表示 CD ，用 BC 表示 AC ，用 CD 表示 AD ，然后根据 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDC$ 的周长的比列式即可求解.

【解答】 解： $\because CD \perp AB$,

$$\therefore \angle A + \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = \angle BCD + \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle A,$$

$$\therefore CD = BD \cdot \cot \angle BCD,$$

$$AC = BC \cdot \cot \angle A,$$

$$AD = CD \cdot \cot \angle A,$$

$$\therefore \triangle ADC \text{ 和 } \triangle BDC \text{ 的周长的比为 } \frac{CD+AD+AC}{BD+BC+CD} = \frac{BD \cdot \cot \angle BCD + CD \cdot \cot \angle A + BC \cdot \cot \angle A}{BD+BC+CD} = \cot \angle BCD,$$

$$\because \triangle ADC \text{ 和 } \triangle BDC \text{ 的周长之比是 } 1:3,$$

$$\therefore \cot \angle BCD = \frac{1}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{3}.$$

【点评】 本题考查了直角三角形的性质，锐角三角函数的定义，用三角函数表示出边的关系是解题的关键.

16. (4 分) 一公路大桥引桥长 180 米，已知引桥的坡度 $i = 1:3$ ，那么引桥的铅直高度为 $18\sqrt{10}$ (结果保留根号) 米.

【考点】 T9： 解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

【分析】 先根据题意画出图形，由 $\tan \angle A = \frac{1}{3}$ ， $AB = 180m$ ，解直角三角形即可求出引桥的铅直高度 BC .

【解答】 解： 如图.

$$\text{由题意得 } \tan \angle A = \frac{1}{3}, AB = 180m.$$

$$\text{设 } BC = x, \text{ 则 } AC = 3x,$$

$$\therefore \text{在 Rt} \triangle ABC \text{ 中, } AC^2 + BC^2 = AB^2$$

$\therefore$ 解得 $x = 18\sqrt{10}$,

引桥的铅直高度为 $18\sqrt{10}$ 米.

故答案为 $18\sqrt{10}$



【点评】 本题主要考查解直角三角形的应用及坡角的知识, 关键在于根据题意画出示意图, 这样会使问题简单化.

17. (4 分) 将抛物线 $y = x^2 - 4x + 4$ 沿 y 轴向下平移后, 所得抛物线与 x 轴交于点 A 、 B , 顶点为 C , 如果 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 那么顶点 C 的坐标是 $(2, -1)$.

【考点】 H6: 二次函数图象与几何变换; HA: 抛物线与 x 轴的交点; KW: 等腰直角三角形.

【专题】 31: 数形结合.

【分析】 设抛物线 $y = x^2 - 4x + 4$ 沿 y 轴向下平移 b 个单位, 则抛物线的解析式为 $y = x^2 - 4x + 4 - b$, 再根据题意画出图形, 令 $y = 0$ 得出 AB 两点的坐标, 作 $CE \perp x$ 轴于点 E , 求出 E 点坐标, 由等腰三角形的性质可知 $CE = BE$, 进而可得出 b 的值.

【解答】 解: 设抛物线 $y = x^2 - 4x + 4$ 沿 y 轴向下平移 b 个单位, 抛物线的解析式为 $y = (x - 2)^2 - b$, 此时点 C 的坐标为 $(2, -b)$,

如图所示:

令 $y = 0$, 则 $(x - 2)^2 - b = 0$,

$\therefore A(-\sqrt{b} + 2, 0)$, $B(\sqrt{b} + 2, 0)$,

过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于点 E , 则 $E(2, 0)$,

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

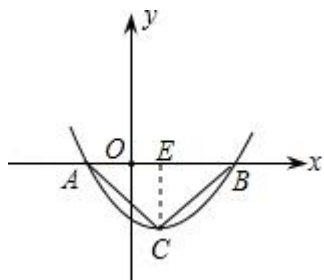
$\therefore CE = BE = b$,

$\therefore \sqrt{b} + 2 - 2 = b$,

$\therefore b = 1$ 或 $b = 0$,

$\therefore C$ 点坐标为 $(2, -1)$.

故答案为 $(2, -1)$.



【点评】 本题考查的是二次函数的图象与几何变换、等腰直角三角形的性质及抛物线与 x 轴的交点问题，根据题意画出图形、作出辅助线是解答此题的关键.

18. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 把 $\triangle ABC$ 折叠, 使点 B 与点 A 重合, 折痕交 AB 于点 M , 交 BC 于点 N . 如果 $\triangle CAN$ 是等腰三角形, 则 $\angle B$ 的度数为 45° 或 36° .

【考点】 K7: 三角形内角和定理; KH: 等腰三角形的性质; PB: 翻折变换 (折叠问题).

【专题】 32: 分类讨论.

【分析】 MN 是 AB 的中垂线, 则 $\triangle ABN$ 是等腰三角形, 且 $NA = NB$, 即可得到 $\angle B = \angle BAN = \angle C$. 然后对 $\triangle ANC$ 中的边进行讨论, 然后在 $\triangle ABC$ 中, 利用三角形内角和定理即可求得 $\angle B$ 的度数.

【解答】 解: $\because$ 把 $\triangle ABC$ 折叠, 使点 B 与点 A 重合, 折痕交 AB 于点 M , 交 BC 于点 N ,

$\therefore MN$ 是 AB 的中垂线.

$\therefore NB = NA$.

$\therefore \angle B = \angle BAN$,

$\because AB = AC$

$\therefore \angle B = \angle C$.

设 $\angle B = x^\circ$, 则 $\angle C = \angle BAN = x^\circ$.

1) 当 $AN = NC$ 时, $\angle CAN = \angle C = x^\circ$.

则在 $\triangle ABC$ 中, 根据三角形内角和定理可得: $4x = 180$,

解得: $x = 45^\circ$ 则 $\angle B = 45^\circ$;

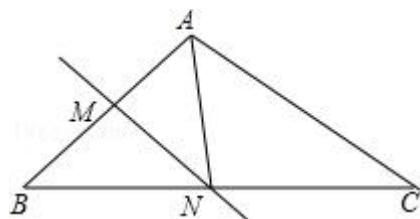
2) 当 $AN = AC$ 时, $\angle ANC = \angle C = x^\circ$, 而 $\angle ANC = \angle B + \angle BAN$, 故此时不成立;

3) 当 $CA = CN$ 时, $\angle NAC = \angle ANC = \frac{180-x}{2}$.

在 $\triangle ABC$ 中, 根据三角形内角和定理得到: $x+x+x+\frac{180-x}{2}=180$,

解得: $x=36^\circ$.

故 $\angle B$ 的度数为 45° 或 36° .



【点评】 本题考查了等腰三角形的性质, 等边对等角, 正确对 $\triangle ANC$ 的边进行讨论是解题的关键.

三、解答题 (共 7 小题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $\frac{\tan 45^\circ}{\cot 30^\circ \cdot \sin 60^\circ} - \sqrt{(\cos 45^\circ - 1)^2} - \sin 45^\circ + \cot 60^\circ \tan 30^\circ$.

【考点】 73: 二次根式的性质与化简; 76: 分母有理化; T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】 把各特殊角的三角函数值代入原式进行计算即可.

【解答】 解: 原式 = $\frac{1}{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \dots$ (7 分)

$$= \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{3} \dots$$
 (2 分)

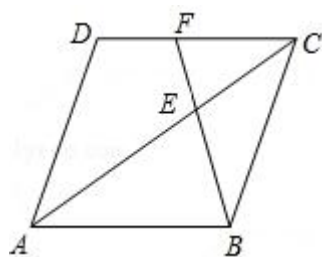
$$= 0 \dots$$
 (1 分)

【点评】 此题考查了特殊角的三角函数值, 对特殊值的记忆是解题的关键.

20. (10 分) 如图, $\square ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, 点 F 是 CD 的中点, BF 和 AC 相交于点 E .

(1) 求 $\frac{AE}{CE}$ 的值;

(2) 如果 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 请用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AE}$.



【考点】L5：平行四边形的性质；LM：*平面向量；S4：平行线分线段成比例.

【专题】1：常规题型.

【分析】（1）根据平行四边形的性质及平行线分线段成比例得出 $\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CF}$ ，继而根据题意求解即可；

（2）根据平面向量的概念及其运算法则求解即可.

【解答】解：（1） $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB = CD \cdots (1 \text{ 分})$$

$\because$ 点 F 是 CD 的中点，

$$\therefore CF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB \cdots (1 \text{ 分})$$

$\because CD \parallel AB$,

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CF} = \frac{AB}{\frac{1}{2}AB} = 2. \cdots (3 \text{ 分})$$

$$(2) \because \frac{AE}{CE} = 2,$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}, \cdots (1 \text{ 分})$$

$$\because \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD},$$

$$\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} = \vec{b} - \vec{a},$$

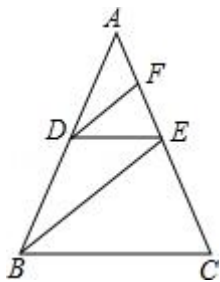
$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}. (2 \text{ 分})$$

【点评】 本题考查平行四边形的性质、平行线分线段成比例及平面向量的知识，注意这些知识的熟练掌握并灵活运用，难度适中.

21. (10 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，点 F 、 E 在边 AC 上，且 $DF \parallel BE$ ， $\frac{AF}{FE} = \frac{AE}{CE}$.

(1) 求证： $DE \parallel BC$ ；

(2) 如果 $\frac{AF}{FE} = \frac{2}{3}$ ， $S_{\triangle ADF} = 2$ ，求 $S_{\triangle ABC}$ 的值.



【考点】JA：平行线的性质；S4：平行线分线段成比例；S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】(1) 由 $DF \parallel BE$ 得比例，结合已知比例，利用过渡比得出 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{CE}$ ，证明结论；

(2) $\triangle ADF$ 与 $\triangle DEF$ 等高，根据等高的两个三角形面积比等于底边的比，求 $\triangle DEF$ 的面积，得出 $\triangle ADE$ 的面积，

再由 $DE \parallel BC$ ，得出 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，利用相似三角形的面积比等于相似比的平方求解.

【解答】(1) 证明： $\because DF \parallel BE$ ，

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FE}. \quad \cdots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{AF}{FE} = \frac{AE}{CE},$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{CE} \cdots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore DE \parallel BC. \quad \cdots (1 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 解: } \because \frac{AF}{FE} = \frac{2}{3}, \therefore \frac{AE}{CE} = \frac{2}{3}, \therefore \frac{AE}{AC} = \frac{2}{5}. \quad \cdots (1 \text{ 分})$$

设 $\triangle ADE$ 中边 AE 上的高为 h .

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{\frac{1}{2}AF \cdot h}{\frac{1}{2}EF \cdot h} = \frac{AF}{EF} = \frac{2}{3}, \therefore S_{\triangle DEF} = \frac{3}{2} \times 2 = 3.$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = 2 + 3 = 5. \quad \cdots (1 \text{ 分})$$

$$\because DE \parallel BC,$$

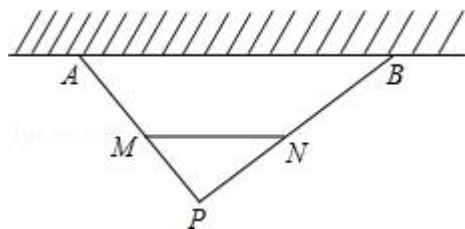
$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC. \quad \cdots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2. \quad \cdots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{125}{4}. \dots (1 \text{ 分})$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质，平行线的性质，平行线分线段成比例．关键是利用平行线得出相似三角形及比例，利用相似三角形的面积比等于相似比的平方解题．

22. (10 分) 小楠家附近的公路上通行车辆限速为 60 千米/小时．小楠家住在距离公路 50 米的居民楼（如图中的 P 点处），在他家前有一道路指示牌 MN 正好挡住公路上的 AB 段（即点 P 、 M 、 A 和点 P 、 N 、 B 分别在一直线上），已知 $MN \parallel AB$ ， $\angle MNP = 30^\circ$ ， $\angle NMP = 45^\circ$ ，小楠看见一辆卡车通过 A 处，7 秒后他在 B 处再次看见这辆卡车，他认定这辆卡车一定超速，你同意小楠的结论吗？请说明理由．（参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ）



【考点】 KO：含 30° 度角的直角三角形；KW：等腰直角三角形；T8：解直角三角形的应用．

【分析】 首先过点 P 作 $PQ \perp AB$ ，垂足为 Q ，再利用 $MN \parallel AB$ ，得出 $\angle PAQ = \angle PMN = 45^\circ$ ， $\angle PBQ = \angle PNM = 30^\circ$ ，进而求出 QA 和 AB 的长，进而求出即可．

【解答】 解：同意小楠的结论．

过点 P 作 $PQ \perp AB$ ，垂足为 Q ．

$$\because MN \parallel AB,$$

$$\therefore \angle PAQ = \angle PMN = 45^\circ, \quad \angle PBQ = \angle PNM = 30^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle PQA$ 中， $\angle PQA = 90^\circ$ ，

$$\because \cot \angle PAQ = \frac{AQ}{PQ}, \quad \therefore AQ = PQ \cdot \cot 45^\circ = 50 \times 1 = 50,$$

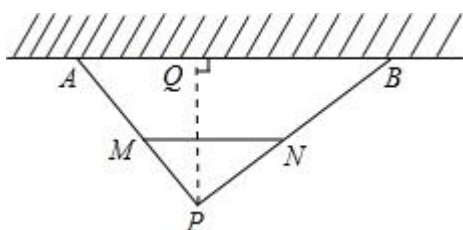
在 $\text{Rt}\triangle PQB$ 中， $\angle PQB = 90^\circ$

$$\because \cot \angle PBQ = \frac{BQ}{PQ}, \quad \therefore BQ = PQ \cdot \cot 30^\circ = 50\sqrt{3},$$

$$\therefore AB = AQ + BQ = 50(1 + \sqrt{3}) \approx 50 \times 2.73 = 136.5,$$

$$\therefore v_{\text{实际}} = \frac{136.5 \text{米}}{7 \text{秒}} = \frac{136.5 \times 3600}{7 \times 1000} = 70.2 \text{千米/小时} > 60 \text{千米/小时}.$$

$\therefore$ 小楠的结论是正确的.

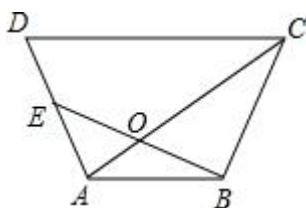


【点评】 此题主要考查了解直角三角形的应用，根据已知在直角三角形中求出 AQ 的长是解题关键.

23. (12分) 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AD = BC$ ，点 E 在边 AD 上， BE 与 AC 相交于点 O ，且 $\angle ABE = \angle BCA$. 求证：

(1) $\triangle BAE \sim \triangle BOA$;

(2) $BO \cdot BE = BC \cdot AE$.



【考点】 LJ：等腰梯形的性质；S9：相似三角形的判定与性质.

【专题】 11：计算题.

【分析】 (1) 利用梯形的性质得到 $\angle EAB = \angle CBA$ ，从而证得 $\triangle EBA \sim \triangle ACB$ ，然后利用相似三角形的性质得到 $\angle AEB = \angle BAC$ ，从而证明 $\triangle BAE \sim \triangle BOA$ ；

(2) 根据上题证得的 $\triangle BAE \sim \triangle BOA$ 得到 $\frac{AE}{BE} = \frac{AO}{AB}$ ，然后再利用 $\angle BAC = \angle OAB$ 、

$\angle EBA = \angle BCA$ 证得 $\triangle OAB \sim \triangle BAC$ ，从而得到 $\frac{BO}{BC} = \frac{AO}{AB}$ ，再根据 $\frac{AE}{BE} = \frac{AO}{AB}$ 得到

$BE \cdot BO = AE \cdot BC$ 即可.

【解答】 证明：(1) 在梯形 $ABCD$ 中，

$\because AB \parallel CD$ ， $AD = BC$ ，

$\therefore \angle EAB = \angle CBA$

$\because \angle EBA = \angle BCA$ ，

$\therefore \triangle EBA \sim \triangle ACB$

$\therefore \angle AEB = \angle BAC$

$$\because \angle ABE = \angle OBA$$

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle BOA$$

$$(2) \because \triangle BAE \sim \triangle BOA,$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AO}{AB}$$

$$\because \angle BAC = \angle OAB,$$

$$\angle EBA = \angle BCA$$

$$\therefore \triangle OAB \sim \triangle BAC$$

$$\therefore \frac{BO}{BC} = \frac{AO}{AB}$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{BO}{BC}$$

$$\therefore BE \cdot BO = AE \cdot BC$$

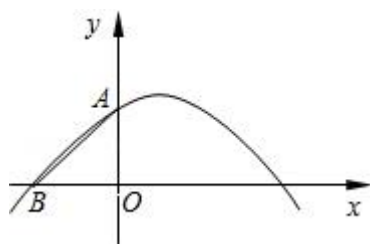
【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质及等腰梯形的性质，解题的关键是正确的利用相似三角形的性质得到对应角相等，从而得到证明三角形全等的条件.

24. (12分) 如图, $\triangle AOB$ 的顶点 A 、 B 在二次函数 $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + \frac{3}{2}$ 的图象上,

又点 A 、 B 分别在 y 轴和 x 轴上, $\tan \angle ABO = 1$.

(1) 求此二次函数的解析式;

(2) 过点 A 作 $AC \parallel BO$ 交上述函数图象于点 C , 点 P 在上述函数图象上, 当 $\triangle POC$ 与 $\triangle ABO$ 相似时, 求点 P 的坐标.



【考点】 H8: 待定系数法求二次函数解析式; HF: 二次函数综合题; S7: 相似三角形的性质; T1: 锐角三角函数的定义.

【专题】 15: 综合题.

【分析】 (1) 首先根据函数解析式求出 A 的坐标, 然后得到 AO 的长度, 接着利用三角函数的定义求出 BO 的长度, 也就得到 B 的坐标, 最后代入解析式即可求出函数的解析式;

(2))首先由 $AC \parallel BO$ 交上述函数图象于点 C 可以求出 C 的坐标,接着得到 AC 、 AO 、 OC 的长度,由此也可以求出 b 的值,根据抛物线的对称性可以求出抛物线与 x 轴的另一交点为 D 的坐标,从而得到 CD 的长度,接着利用勾股定理的逆定理证明 $\angle OCD = 90^\circ$, 易得 $\text{Rt}\triangle OCA \sim \text{Rt}\triangle ABO$, $\text{Rt}\triangle ODC \sim \text{Rt}\triangle ABO$, 求出 P 的坐标.

【解答】 解: (1) $\because$ 点 A 在二次函数 $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + \frac{3}{2}$ 的图象上, $A(0, \frac{3}{2}) \cdots (1$
分)

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $\angle AOB = 90^\circ$

$$\because \tan \angle ABO = \frac{AO}{BO} = 1,$$

$$\because BO = AO = \frac{3}{2},$$

$$\therefore B(-\frac{3}{2}, 0) \cdots (1 \text{ 分})$$

$\because$ 点 B 在二次函数 $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + \frac{3}{2}$ 的图象上

$$\therefore -\frac{1}{3} \times (-\frac{3}{2})^2 - \frac{3}{2}b + \frac{3}{2} = 0$$

$$\therefore b = \frac{1}{2} \cdots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \cdots (1 \text{ 分})$$

(2) $\because AC \parallel BO$ 交上述函数图象于点 C ,

$$\therefore \text{设 } C(x, \frac{3}{2}) \cdots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\text{解得 } x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore C(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \cdots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore AC = AO = \frac{3}{2},$$

$$\text{根据勾股定理得: } OC = \frac{3}{2}\sqrt{2},$$

设抛物线 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 与 x 轴的另一交点为 D ,

可得, $D(3, 0) \cdots (1 \text{ 分})$

$\therefore$ 根据两点间的距离公式得: $CD = \sqrt{(3 - \frac{3}{2})^2 + (0 - \frac{3}{2})^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, 又 $OD = 3$, $OC =$

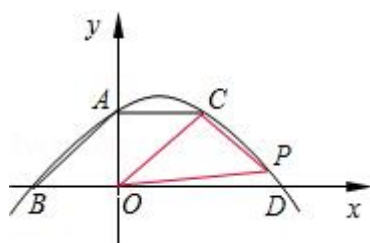
$$\frac{3}{2}\sqrt{2},$$

$\therefore OC^2 + CD^2 = OD^2$, $\therefore \angle OCD = 90^\circ \cdots (1 \text{ 分})$

易得, $\text{Rt}\triangle OCA \sim \text{Rt}\triangle ABO$, $\text{Rt}\triangle ODC \sim \text{Rt}\triangle ABO \cdots (2 \text{ 分})$

此时 D, P 重合, A 与 P 重合,

$\therefore P(0, \frac{3}{2})$ 或 $P(3, 0) \cdots (2 \text{ 分})$.



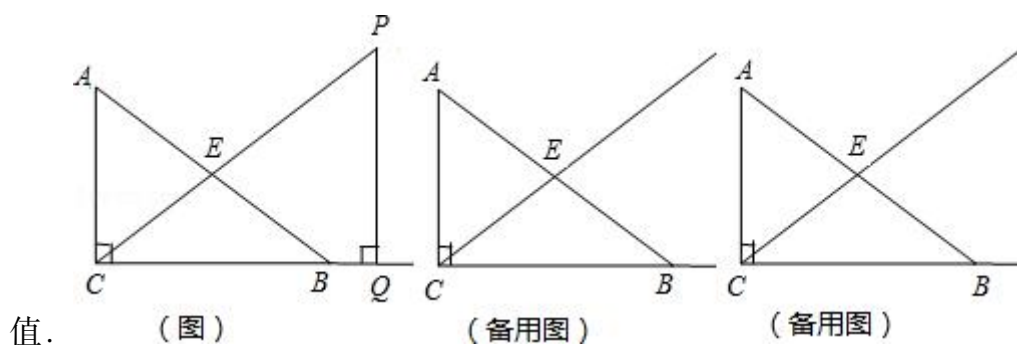
【点评】 此题是二次函数的综合题, 分别考查了待定系数法确定函数解析式、相似三角形的判定与性质及三角函数的定义, 对于学生综合分析问题的能力要求比较高, 平时要加强训练.

25. (14 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CE 是斜边 AB 上的中线, $AB = 10$, $\tan A = \frac{4}{3}$, 点 P 是 CE 延长线上的一动点, 过点 P 作 $PQ \perp CB$, 交 CB 延长线于点 Q , 设 $EP = x$, $BQ = y$.

(1) 求 y 关于 x 的函数关系式及定义域;

(2) 连接 PB , 当 PB 平分 $\angle CPQ$ 时, 求 PE 的长;

(3) 过点 B 作 $BF \perp AB$ 交 PQ 于 F , 当 $\triangle BEF$ 和 $\triangle QBF$ 相似时, 求 x 的



【考点】 E4: 函数自变量的取值范围; KN: 直角三角形的性质; S9: 相似三角

形的判定与性质；T1：锐角三角函数的定义．

【分析】（1）利用 $\tan A = \frac{BC}{AC}$ ，以及 $AB = 10$ ，即可求出 BC ， AC ，再利用 $\triangle PCQ$

$\sim \triangle ABC$ ，利用相似三角形的性质求出 y 与 x 的关系式即可；

（2）利用 PB 平分 $\angle CPQ$ ， $BQ \perp PQ$ ，垂足为 Q ．得出 $BM = BQ = y$ ，进而求出 x 即可；

（3）分两种情况：①当 $\angle FEB = \angle A$ 时，②当 $\angle FEB = \angle ABC$ 时，分别求出即可．

【解答】解：（1）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\because \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}, AB = 10,$$

$$\therefore BC = 8, AC = 6,$$

$\because CE$ 是斜边 AB 上的中线，

$$\therefore CE = BE = \frac{1}{2}AB = 5,$$

$$\therefore \angle PCB = \angle ABC,$$

$$\because \angle PQC = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PCQ \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{CQ}{PC} = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5},$$

$$\text{即 } \frac{8+y}{5+x} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore y = \frac{4}{5}x - 4, \text{ 定义域为 } x > 5.$$

（2）过点 B 作 $BM \perp PC$ ，垂足为 M ．

$\because PB$ 平分 $\angle CPQ$ ， $BQ \perp PQ$ ，垂足为 Q ．

$$\therefore BM = BQ = y,$$

$$\because \tan A = \frac{4}{3} = \frac{BC}{AC},$$

设 $AC = 3x$ ，则 $BC = 4x$ ， $AB = 5x$ ，

$$\therefore \sin \angle MCB = \frac{BM}{BC} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore BM = \frac{3}{5}BC = \frac{3}{5} \times 8 = \frac{24}{5},$$

$$\therefore \frac{4}{5}x - 4 = \frac{24}{5},$$

$$\therefore x = 11,$$

$$(3) \because \angle Q = \angle ACB = 90^\circ, \angle QBF = \angle A,$$

$$\therefore \triangle BQF \sim \triangle ABC,$$

当 $\triangle BEF$ 和 $\triangle QBF$ 相似时,

可得 $\triangle BEF$ 和 $\triangle ABC$ 也相似.

分两种情况:

①当 $\angle FEB = \angle A$ 时,

在 $\text{Rt}\triangle FBE$ 中, $\angle FBE = 90^\circ$, $BE = 5$, $BF = \frac{5}{3}y$

$$\therefore \frac{5}{3}(\frac{4}{5}x - 4) = \frac{4}{3} \times 5,$$

解得 $x = 10$;

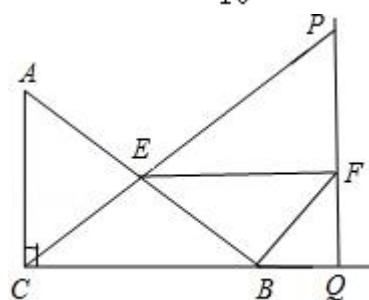
②当 $\angle FEB = \angle ABC$ 时,

在 $\text{Rt}\triangle FBE$ 中, $\angle FBE = 90^\circ$, $BE = 5$, $BF = \frac{5}{3}y$

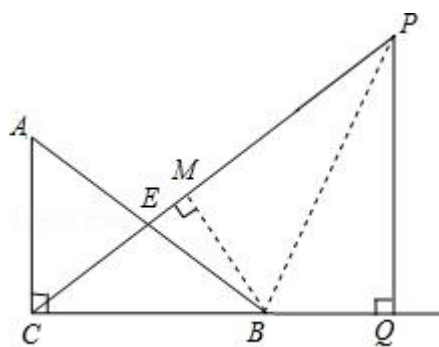
$$\therefore \frac{5}{3}(\frac{4}{5}x - 4) = \frac{3}{4} \times 5,$$

解得 $x = \frac{125}{16}$;

综合①②, $x = \frac{125}{16}$ 或 10 .



(备用图)



(图)

【点评】此题主要考查了相似三角形的性质与判定，相似三角形的考查是中考中重点题型，同学们应重点掌握.