

2012 年上海市宝山区中考数学一模试卷

一.选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

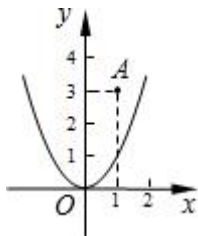
1. (4 分) 下列各式中, 正确的是 ()
- A. $a^2+a^2=2a^4$ B. $a^3-a^2=a$
C. $a^2 \cdot a^3=a^5$ D. $(a+b)^2=a^2+b^2$
2. (4 分) 下列各数中, 是无理数的为 ()
- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt[3]{8}$ C. π^0 D. $\cos 60^\circ$
3. (4 分) 关于二次函数 $y = -2x^2+1$ 的图象, 下列说法中, 正确的是 ()
- A. 对称轴为直线 $x=1$
B. 顶点坐标为 $(-2, 1)$
C. 可以由二次函数 $y = -2x^2$ 的图象向左平移 1 个单位得到
D. 在 y 轴的左侧, 图象上升, 在 y 轴的右侧, 图象下降
4. (4 分) 已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, 顶点 A 、 B 、 C 分别与 D 、 E 、 F 对应, 若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的周长分别为 24、36, 又 $\because BC=8$, 则下列判断正确的 ()
- A. $DE=12$ B. $EF=12$ C. $DE=18$ D. $EF=18$
5. (4 分) 飞机在空中测得地面上某观测目标 A 的俯角为 α , 且飞机与目标 A 相距 12 千米, 那么这时飞机离地面的高度为 ()
- A. $12\sin\alpha$ B. $12\cos\alpha$ C. $12\tan\alpha$ D. $12\cot\alpha$
6. (4 分) 下列关于向量的说法中, 不正确的是 ()
- A. $|3\vec{a}|=3|\vec{a}|$
B. $3(\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}+3\vec{b}$
C. 若 $\vec{a}=k\vec{b}$ (k 为实数), 则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
D. 若 $|\vec{a}|=3|\vec{b}|$, 则 $\vec{a}=3\vec{b}$ 或 $\vec{a}=-3\vec{b}$

二. 填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 计算: $3^{-2} =$ _____.
8. (4 分) 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{x}$ 满足 $\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{x})=\vec{a}+\vec{x}$, 则 $\vec{x} =$ _____. (用向量 $\vec{a}$ 表示)
9. (4 分) 分解因式: $x^4+x^2-2 =$ _____.

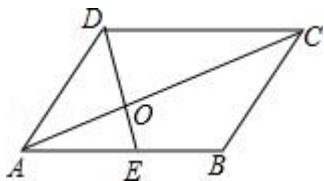
10. (4分) 已知抛物线 $y = (1-a)x^2 + 1$ 的顶点是它的最高点, 则 a 的取值范围是_____.

11. (4分) 如图, 已知抛物线 $y = x^2$, 把该抛物线向上平移, 使平移后的抛物线经过点 $A(1, 3)$, 那么平移后的抛物线的表达式是_____.



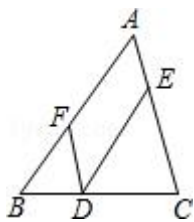
12. (4分) 已知抛物线 $y = -x^2 + 2x + 2$ 的顶点为 A , 与 y 轴交于点 B , C 是其对称轴上的一点, O 为原点, 若四边形 $ABOC$ 是等腰梯形, 则点 C 的坐标为_____.

13. (4分) 如图, 已知平行四边形 $ABCD$, E 是边 AB 的中点, 连接 AC 、 DE 交于点 O . 则 $\frac{AO}{OC}$ 的值为_____.

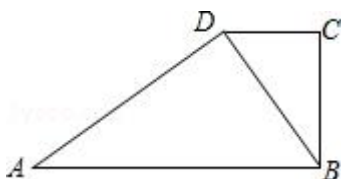


14. (4分) 已知一个斜坡的坡角为 α , 坡度为 $1:3$, 则 $\cot \alpha$ 的值为_____.

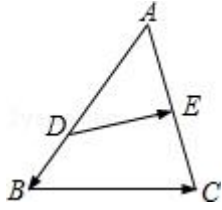
15. (4分) 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 、 F 分别在边 BC 、 AC 、 AB 上, 且 $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$, 若 $BD:DC = 1:2$, $\triangle ABC$ 的面积为 9cm^2 , 则四边形 $AEDF$ 的面积为_____ cm^2 .



16. (4分) 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB \perp BC$, 且 $AD \perp BD$, 若 $AB = 3$, $CD = 1$, 那么 $\angle A$ 的正弦值为_____.



17. (4分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, 且 $AD = 2DB$, $AE = EC$. 若设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{DE} =$ _____. (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)



18. (4分) 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 9$, $\cos A = \frac{2}{3}$, 把 $\triangle ABC$ 绕着点 C 旋转, 使得点 A 落在点 A' , 点 B 落在点 B' . 若点 A' 在边 AB 上, 则点 B 、 B' 的距离为_____.

三、(本大题共6题, 第19--22题, 每题8分; 第23、24题, 每题10分. 满分52分)

19. (8分) 先化简, 再求值: $(\frac{a+2}{a^2-1} - \frac{1}{a-1}) \div (\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1})$, 其中 $a = \sqrt{2}$.

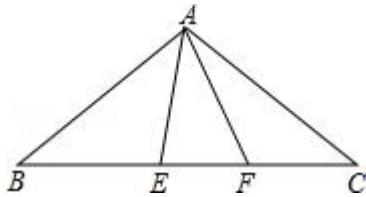
20. (8分) 已知 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$, (1) 求 $\frac{x-2y}{z}$ 的值; (2) 若 $\sqrt{x+3} = z-y$, 求 x 值.

21. (8分) 已知一个二次函数的图象经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(0, 3)$, 且对称轴为直线 $x = 1$,

(1) 求这个函数的解析式;

(2) 指出该函数图象的开口方向和顶点坐标, 并说明图象的变化情况.

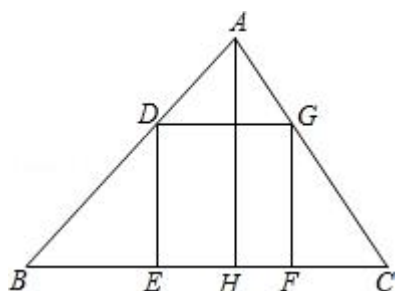
22. (8分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 E 、 F 在边 BC 上, 满足 $\angle EAF = \angle C$, 求证: $BF \cdot CE = AB^2$.



23. (10分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的边 BC 长15厘米, 高 AH 为10厘米, 长方形 $DEFG$ 内接于 $\triangle ABC$, 点 E 、 F 在边 BC 上, 点 D 、 G 分别在边 AB 、 AC 上.

(1) 设 $DG = x$, 长方形 $DEFG$ 的面积为 y , 试求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;

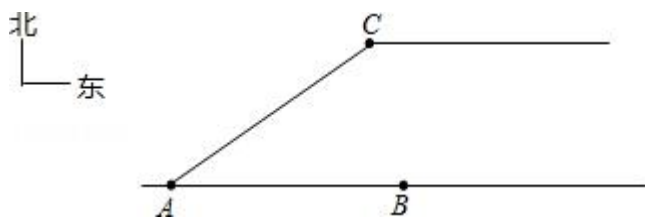
(2) 若长方形 $DEFG$ 的面积为36, 试求这时 $\frac{AD}{AB}$ 的值.



24. (10 分) 据新华社 12 月 13 日电, 参加湄公河联合巡逻执法的中国巡逻船顺利返航. 已知在巡逻过程中, 某一天上午, 我巡逻船正在由西向东匀速行驶, 10:00 巡逻船在 A 处发现北偏东 53.1° 方向, 相距 10 海里的 C 处有一个不明物体正在向正东方向移动, 10:15 巡逻船在 B 处又测得该物体位于北偏东 18.4° 方向的 D 处. 若巡逻船的速度是每小时 36 海里,

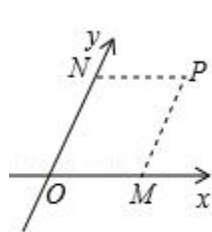
- (1) 试在图中画出点 D 的大致位置, 并求不明物体移动的速度;
- (2) 假设该不明物体移动的方向和速度保持不变, 巡逻船航行的方向和速度也不变, 试问什么时间该物体与我巡逻船之间的距离最近?

[备用数据: $\sin 53.1^\circ = 0.8$, $\cos 53.1^\circ = 0.6$, $\cot 53.1^\circ = 0.75$; $\sin 18.4^\circ = 0.32$, $\cos 18.4^\circ = 0.95$, $\cot 18.4^\circ = 3$;].

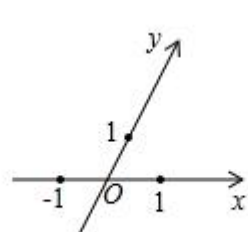


四、(本大题共 2 题, 第 25 题 12 分, 第 26 题 14 分, 满分 26 分)

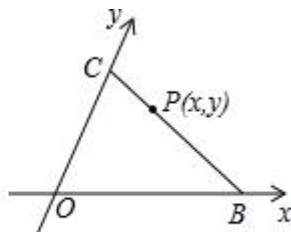
25. (12 分) 我们知道, 互相垂直且有公共原点的两条数轴构成平面直角坐标系. 如果坐标系中两条坐标轴不垂直, 那么这样的坐标系称为“斜坐标系”.



(图1)



(图2)



(图3)

如图 1, P 是斜坐标系 xOy 中的任意一点, 与直角坐标系相类似, 过点 P 分别作两坐标轴的平行线, 与 x 轴、 y 轴交于点 M 、 N , 若 M 、 N 在 x 轴、 y 轴上分别对应实数 a 、 b , 则有序数对 (a, b) 叫做点 P 在斜坐标系 xOy 中的坐标.

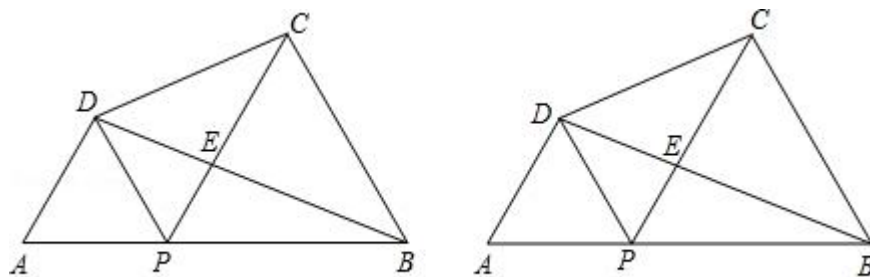
- (1) 如图 2, 已知斜坐标系 xOy 中, $\angle xOy = 60^\circ$, 试在该坐标系中作出点 A (-

2, 2), 并求点 O 、 A 之间的距离;

(2) 如图 3, 在斜坐标系 xOy 中, 已知点 $B(4, 0)$ 、点 $C(0, 3)$, $P(x, y)$ 是线段 BC 上的任意一点, 试求 x 、 y 之间一定满足的一个等量关系式;

(3) 若问题 (2) 中的点 P 在线段 BC 的延长线上, 其它条件都不变, 试判断上述 x 、 y 之间的等量关系是否仍然成立, 并说明理由.

26. (14 分) 如图, 已知线段 AB , P 是线段 AB 上任意一点 (不与点 A 、 B 重合), 分别以 AP 、 BP 为边, 在 AB 的同侧作等边 $\triangle APD$ 和 $\triangle BPC$, 连接 BD 与 PC 交于点 E , 连接 CD .



(备用图)

(1) 当 $BC \perp CD$ 时, 试求 $\angle DBC$ 的正切值;

(2) 若线段 CD 是线段 DE 和 DB 的比例中项, 试求这时 $\frac{AP}{PB}$ 的值;

(3) 记四边形 $ABCD$ 的面积为 S , 当 P 在线段 AB 上运动时, S 与 BD^2 是否成正比例, 若成正比例, 试求出比例系数; 若不成正比例, 试说明理由.

2012 年上海市宝山区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一.选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. (4 分) 下列各式中, 正确的是 ()

A. $a^2+a^2=2a^4$

B. $a^3-a^2=a$

C. $a^2 \cdot a^3 = a^5$

D. $(a+b)^2 = a^2+b^2$

【考点】35: 合并同类项; 46: 同底数幂的乘法; 4C: 完全平方公式.

【分析】根据整式的加减, 同底数幂的乘法法则, 完全平方公式逐一检验.

【解答】解: A、 $a^2+a^2=2a^2$, 本选项错误;

B、 a^3 与 a^2 不是同类项, 不能合并, 本选项错误;

C、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$, 本选项正确;

D、 $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, 本选项错误;

故选: C.

【点评】本题考查了同底数幂的乘法, 合并同类项, 完全平方公式的运用. 关键是熟练掌握运算法则.

2. (4 分) 下列各数中, 是无理数的为 ()

A. $\sqrt{6}$

B. $\sqrt[3]{8}$

C. π^0

D. $\cos 60^\circ$

【考点】24: 立方根; 26: 无理数; 6E: 零指数幂; 73: 二次根式的性质与化简; T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】根据无理数的概念进行逐项分析解答即可.

【解答】解: A、 $\sqrt{6}$ 为无理数, 故本选项正确,

B、 $\sqrt[3]{8}=2$, 为有理数, 故本选项错误,

C、 $\pi^0=1$, 为有理数, 故本选项错误,

D、 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, 为有理数, 故本选项错误,

故选: A.

【点评】本题主要考查零指数幂、立方根、二次根式的性质与化简, 特殊角的三角函数值等知识点, 关键在于正确掌握无理数的概念并熟练应用.

3. (4 分) 关于二次函数 $y = -2x^2+1$ 的图象, 下列说法中, 正确的是 ()

A. 对称轴为直线 $x = 1$

B. 顶点坐标为 $(-2, 1)$

C. 可以由二次函数 $y = -2x^2$ 的图象向左平移 1 个单位得到

D. 在 y 轴的左侧, 图象上升, 在 y 轴的右侧, 图象下降

【考点】H3: 二次函数的性质; H6: 二次函数图象与几何变换.

【专题】31: 数形结合.

【分析】由二次函数 $y = -2x^2 + 1$, 可得其对称轴、顶点坐标; 由二次项系数, 可知图象开口向下; 对每个选项分析、判断即可;

【解答】解: A、由二次函数 $y = -2x^2 + 1$ 得, 对称轴为 $x = 0$; 故本项错误;

B、由二次函数 $y = -2x^2 + 1$ 得, 顶点坐标为 $(0, 1)$; 故本项错误;

C、由二次函数 $y = -2x^2 + 1$ 的图象可由二次函数 $y = -2x^2$ 的图象向上平移 1 个单位得到; 故本项错误;

D、由二次函数 $y = -2x^2 + 1$ 得, 其开口向下, 顶点为 $(0, 1)$, 则在 y 轴的左侧, 图象上升, 在 y 轴的右侧, 图象下降; 故本项正确;

故选: D.

【点评】本题主要考查了二次函数的性质及几何变换, 应熟练掌握二次函数的性质: 顶点、对称轴的求法及图象的特点.

4. (4 分) 已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, 顶点 A 、 B 、 C 分别与 D 、 E 、 F 对应, 若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的周长分别为 24、36, 又 $\because BC = 8$, 则下列判断正确的 ()

A. $DE = 12$

B. $EF = 12$

C. $DE = 18$

D. $EF = 18$

【考点】S7: 相似三角形的性质.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据相似三角形周长的比等于相似比求出 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比, 然后根据相似三角形对应边成比例列式即可求出 EF 的长, 从而选择答案即可.

【解答】解: $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的周长分别为 24、36,

$$\therefore \triangle ABC \text{ 和 } \triangle DEF \text{ 的相似比为 } \frac{24}{36} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{BC}{EF} = \frac{2}{3},$$

$$\because BC = 8,$$

$$\therefore \frac{8}{EF} = \frac{2}{3},$$

解得 $EF = 12$,

$\therefore AB$ 的边长不知道,

$\therefore DE$ 的长度无法求出.

故选: B .

【点评】 本题主要考查了相似三角形周长的比等于相似比的性质, 相似三角形对应边成比例的性质, 找准对应边是解题的关键.

5. (4 分) 飞机在空中测得地面上某观测目标 A 的俯角为 α , 且飞机与目标 A 相距 12 千米, 那么这时飞机离地面的高度为 ()

- A. $12\sin\alpha$ B. $12\cos\alpha$ C. $12\tan\alpha$ D. $12\cot\alpha$

【考点】 TA: 解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题.

【专题】 11: 计算题.

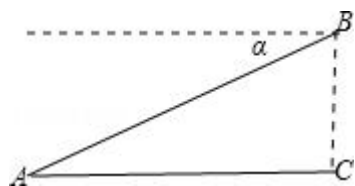
【分析】 已知直角三角形的一个锐角和斜边求锐角所对的直角边, 运用三角函数定义解答.

【解答】 解: 如图: BC 为飞机离地面的高度,

所以在直角三角形 ABC 中, $\angle BAC = \alpha$, $AB = 12$,

则 $BC = AB \cdot \sin\alpha = 12\sin\alpha$,

故选: A .



【点评】 此题考查的知识点是解直角三角形的应用, 关键要求学生借助俯角构造直角三角形, 并结合图形利用三角函数解直角三角形.

6. (4 分) 下列关于向量的说法中, 不正确的是 ()

- A. $|3\vec{a}| = 3|\vec{a}|$
- B. $3(\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} + 3\vec{b}$
- C. 若 $\vec{a} = k\vec{b}$ (k 为实数), 则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
- D. 若 $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$, 则 $\vec{a} = 3\vec{b}$ 或 $\vec{a} = -3\vec{b}$

【考点】LM: *平面向量.

【分析】根据平面向量的性质分别进行解答, 即可判断出正确答案.

【解答】解: A、根据数与向量的乘积的模等于该数与向量的模的乘积, 即

$$|3\vec{a}|=3|\vec{a}|, \text{ 故本选项正确;}$$

B、根据数与向量和的乘积等于该数与各个向量乘积的和, 即 $3(\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}+3\vec{b}$,

故本选项正确;

C、若 $\vec{a}=k\vec{b}$ (k 为实数), 可得 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反, 均有 $\vec{a} // \vec{b}$, 故本选项正确;

D、向量既有大小又有方向, 假如 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 且 $|\vec{a}|=3|\vec{b}|$, 则 $\vec{a} \neq 3\vec{b}$ 或且 $\vec{a} \neq -3\vec{b}$, 故本选项错误;

故选: D.

【点评】本题考查了平面向量, 解题的关键是根据平面向量的性质进行解答, 属于中难度题.

二. 填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 计算: $3^{-2} = \frac{1}{9}$.

【考点】6F: 负整数指数幂.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据负整数指数为正整数指数的倒数计算.

【解答】解: $3^{-2} = \frac{1}{9}$. 故答案为 $\frac{1}{9}$.

【点评】本题主要考查了负指数幂的运算, 比较简单.

8. (4 分) 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{x}$ 满足 $\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{x})=\vec{a}+\vec{x}$, 则 $\vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{a}$. (用向量 $\vec{a}$ 表示)

【考点】LM: *平面向量.

【专题】11: 计算题.

【分析】先去括号, 然后根据向量的运算法则进行计算即可得出 $\vec{x}$ 的表示形式.

【解答】解: 由题意得, $\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{x} = \vec{a} + \vec{x}$,

移项得, $\frac{4}{3}\vec{x} = -\frac{2}{3}\vec{a}$,

$$\therefore \vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{a}.$$

故答案为: $-\frac{1}{2}\vec{a}$.

【点评】此题考查了平面向量的运算,属于基础题,关键是掌握平面向量的运算方法,难度一般.

9. (4分) 分解因式: $x^4+x^2-2 = \underline{(x^2+2)(x+1)(x-1)}$.

【考点】57: 因式分解 - 十字相乘法等.

【分析】将 x^2 看作整体, 常数项 -2 可以写成 -1×2 , $-1+2=1$, 符合 $x^2+(p+q)x+pq$ 型的式子的因式分解, 再利用平方差公式分解.

【解答】解: 原式 $= (x^2+2)(x^2-1)$,
 $= (x^2+2)(x+1)(x-1)$.

故答案为: $(x^2+2)(x+1)(x-1)$.

【点评】此题主要考查了二次三项式的分解因式: $x^2+(p+q)x+pq = (x+p)(x+q)$, 将 x^2 看作整体先因式分解是解题关键.

10. (4分) 已知抛物线 $y = (1-a)x^2+1$ 的顶点是它的最高点, 则 a 的取值范围是 $\underline{a > 1}$.

【考点】H2: 二次函数的图象; H3: 二次函数的性质; H7: 二次函数的最值.

【专题】2B: 探究型.

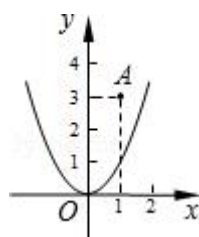
【分析】根据抛物线有最高点可知 $1-a < 0$, 求出 a 的取值范围即可.

【解答】解: $\because$ 抛物线 $y = (1-a)x^2+1$ 的顶点是它的最高点,
 $\therefore 1-a < 0$, 解得 $a > 1$.

故答案为: $a > 1$.

【点评】本题考查的是二次函数的性质、二次函数的图象及二次函数的最值,

11. (4分) 如图, 已知抛物线 $y = x^2$, 把该抛物线向上平移, 使平移后的抛物线经过点 $A(1, 3)$, 那么平移后的抛物线的表达式是 $\underline{y = x^2+2}$.



【考点】 H6: 二次函数图象与几何变换.

【专题】 25: 动点型.

【分析】 可设所求的函数解析式为 $y = x^2 + k$, 把 A 坐标代入可得平移后的抛物线.

【解答】 解: 设所求的函数解析式为 $y = x^2 + k$,

$\because$ 点 $A(1, 3)$ 在抛物线上,

$\therefore k = 2$,

$\therefore y = x^2 + 2$.

故答案为: $y = x^2 + 2$.

【点评】 考查二次函数的平移问题; 用到的知识点为: 上下平移不改变二次项系数及顶点的横坐标, 只改变顶点的纵坐标, 上加下减.

12. (4 分) 已知抛物线 $y = -x^2 + 2x + 2$ 的顶点为 A , 与 y 轴交于点 B , C 是其对称轴上的一点, O 为原点, 若四边形 $ABOC$ 是等腰梯形, 则点 C 的坐标为 $(1, -1)$.

【考点】 H3: 二次函数的性质; H5: 二次函数图象上点的坐标特征; LJ: 等腰梯形的性质.

【分析】 由于 $y = -x^2 + 2x + 2 = y = -x^2 + 2x - 1 + 3 = -(x - 1)^2 + 3$, 由此得到 A 的坐标, 同时也可以得到 B 的坐标, 而 C 是其对称轴上的一点, 四边形 $ABOC$ 是等腰梯形, 根据平移规律可以求出 C' 的坐标, 然后利用对称性即可求出 C 的坐标.

【解答】 解: $\because y = -x^2 + 2x + 2 = y = -x^2 + 2x - 1 + 3 = -(x - 1)^2 + 3$,

$\therefore A$ 的坐标为 $(1, 3)$,

当 $x = 0$ 时, $y = 2$,

$\therefore B$ 的坐标为 $(0, 2)$,

而 C 是其对称轴上的一点, O 为原点,

过 O 作 $OC' \parallel BA$,

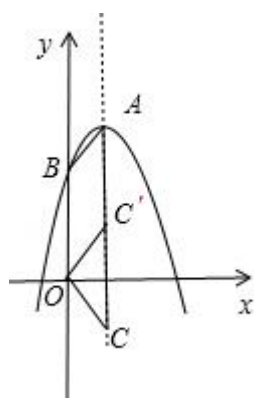
$\therefore$ 根据平移规律知道 C' 的坐标为 $(1, 1)$

又四边形 $ABOC$ 是等腰梯形,

$\therefore C$ 和 C' 关于 x 轴对称,

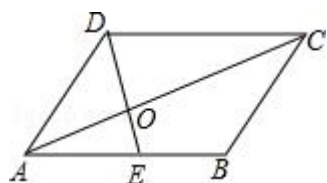
$\therefore C$ 的坐标为 $(1, -1)$.

故答案为 $(1, -1)$.



【点评】此题主要考查了二次函数的性质，也利用了二次函数图象的点的坐标特点及等腰梯形的性质，有一定的综合性.

13. (4分) 如图，已知平行四边形 $ABCD$ ， E 是边 AB 的中点，连接 AC 、 DE 交于点 O . 则 $\frac{AO}{OC}$ 的值为 $\frac{1}{2}$.



【考点】 L5: 平行四边形的性质; S4: 平行线分线段成比例.

【专题】 14: 证明题.

【分析】 由于四边形 $ABCD$ 是平行四边形，那么有 $AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ，于是 $\triangle AOE \sim \triangle COD$ ，那么 $AO:OC = AE:CD$ ，由 E 是 AB 中点，易知 $AE = \frac{1}{2}AB$ ，即可得 $AE = \frac{1}{2}CD$ ，从而可求 $AO:OC$.

【解答】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD, AB = CD,$$

$$\therefore \triangle AOE \sim \triangle COD,$$

$$\therefore AO:OC = AE:CD,$$

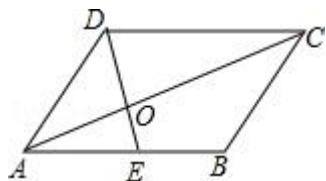
$$\because E \text{ 是 } AB \text{ 中点},$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore AO: OC = \frac{1}{2}.$$

故答案是 $\frac{1}{2}$.



【点评】本题考查了平行线分线段成比例定理的推论、相似三角形的判定和性质，解题的关键是证明 $\triangle AOE \sim \triangle COD$.

14. (4分) 已知一个斜坡的坡角为 α ，坡度为1:3，则 $\cot\alpha$ 的值为3.

【考点】T9: 解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

【分析】根据坡度的定义，它是铅直高度与水平距离的比值，即 $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ ，得出 $\cot\alpha$ 即可.

【解答】解： $\because$ 一个斜坡的坡角为 α ，坡度为1:3，

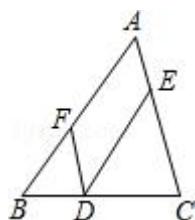
$$\therefore \tan\alpha = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \cot\alpha = 3.$$

故答案为：3.

【点评】此题主要考查了坡度的定义，正确的得出 $\tan\alpha$ 是铅直高度与水平距离的比值是解决问题的关键.

15. (4分) 如图， $\triangle ABC$ 中，点D、E、F分别在边BC、AC、AB上，且 $DE \parallel AB$ ， $DF \parallel AC$ ，若 $BD:DC = 1:2$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 9cm^2 ，则四边形AEDF的面积为4 cm^2 .



【考点】S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】由 $DE \parallel AB$ ， $DF \parallel AC$ 可以得出 $\triangle BDE \sim \triangle BCA$ ， $\triangle CDE \sim \triangle CBA$ ，由 $BD:DC = 1:2$ 可以得出 $BD:BC = 1:3$ ， $CD:BC = 2:3$ ，根据相似三角形的性质求出 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDE$ 的面积，就可以求出四边形AEDF的面积.

【解答】解：∵ $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$,

∴ $\triangle BDE \sim \triangle BCA$, $\triangle CDE \sim \triangle CBA$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BCA}} = \left(\frac{BD}{BC}\right)^2, \quad \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle CBA}} = \left(\frac{DC}{BC}\right)^2.$$

∵ $BD:DC = 1:2$,

∴ $BD:BC = 1:3$, $CD:BC = 2:3$,

∵ $S_{\triangle ABC} = 9\text{cm}^2$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle BDE}}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2, \quad \frac{S_{\triangle CDE}}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

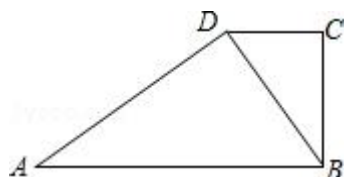
∴ $S_{\triangle BDE} = 1$, $S_{\triangle CDE} = 4$,

∴ 四边形 $AEDF$ 的面积 $= 9 - 1 - 4 = 4$.

故答案为：4

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，本题的关键是利用相似三角形的面积比与相似比的关系解答有关三角形的面积问题.

16. (4分) 如图，已知梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$, $AB \perp BC$, 且 $AD \perp BD$, 若 $AB = 3$, $CD = 1$, 那么 $\angle A$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



【考点】J3: 垂线; KQ: 勾股定理; LI: 直角梯形; T1: 锐角三角函数的定义.

【专题】11: 计算题.

【分析】由于 $AB \perp BC$, $AD \perp BD$, 那么 $\angle BCD = \angle ADB = 90^\circ$, 而 $AB \parallel CD$, 于是 $\angle BDC = \angle ABD$, 从而可证 $\triangle BCD \sim \triangle ADB$, 再利用比例线段, 可求 x , 进而可求 $\angle A$ 的正弦值.

【解答】解：设 $BD = x$,

∵ $AB \perp BC$, $AD \perp BD$,

∴ $\angle BCD = \angle ADB = 90^\circ$,

又 ∵ $AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle BDC = \angle ABD,$$

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle ADB,$$

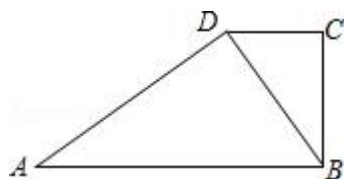
$$\therefore CD:BD = BD:AB,$$

$$\therefore 1:x = x:3,$$

$$\text{解得 } x = \sqrt{3},$$

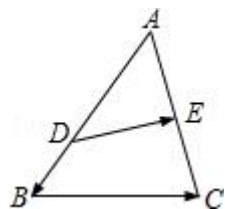
$$\text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中, } \sin \angle A = \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{故答案是 } \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质、锐角三角函数，解题的关键是证明 $\triangle BCD \sim \triangle ADB$ 。

17. (4分) 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，且 $AD = 2DB$ ， $AE = EC$ 。若设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，则 $\overrightarrow{DE} = \underline{-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}}$ 。（用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示）



【考点】 LM：*平面向量。

【专题】 31：数形结合。

【分析】 先表示出 $\overrightarrow{AE}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ ，然后利用向量的减法 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$ ，代入运算即可得出答案。

【解答】 解： $\because AD = 2DB$ ， $AE = EC$ ， $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\vec{a}, \quad \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

【点评】 此题考查了平面向量的知识，属于基础题，解答本题的关键是正确表示

出 $\overrightarrow{AE}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ ，根据 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$ ，进行运算，难度一般．

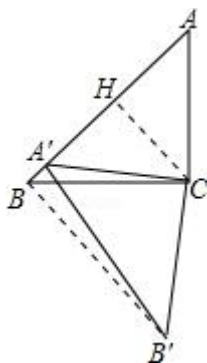
18. (4分) 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 9$ ， $\cos A = \frac{2}{3}$ ，把 $\triangle ABC$ 绕着点 C 旋转，使得点 A 落在点 A' ，点 B 落在点 B' ．若点 A' 在边 AB 上，则点 B 、 B' 的距离为 $4\sqrt{5}$ ．

【考点】KQ：勾股定理；KW：等腰直角三角形；R2：旋转的性质；S9：相似三角形的判定与性质；T7：解直角三角形．

【专题】31：数形结合．

【分析】过点 C 作 $CH \perp AB$ 于 H ，利用解直角三角形的知识，分别求出 AH 、 AC 、 BC 的值，进而利用三线合一的性质得出 AA' 的值，然后利用旋转的性质可判定 $\triangle ACA' \sim \triangle BCB'$ ，继而利用相似三角形的对应边成比例的性质可得出 BB' 的值．

【解答】解：过点 C 作 $CH \perp AB$ 于 H ，



$\because$ 在 $RT\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90$ ， $\cos A = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore AC = AB \cos A = 6$ ， $BC = 3\sqrt{5}$ ，

在 $RT\triangle ACH$ 中， $AC = 6$ ， $\cos A = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore AH = AC \cos A = 4$ ，

由旋转的性质得， $AC = A'C$ ， $BC = B'C$ ，

$\therefore \triangle ACA'$ 是等腰三角形，因此 H 也是 AA' 中点，

$\therefore AA' = 2AH = 8$ ，

又 $\because \triangle BCB'$ 和 $\triangle ACA'$ 都为等腰三角形，且顶角 $\angle ACA'$ 和 $\angle BCB'$ 都是旋转角，

$\therefore \angle ACA' = \angle BCB'$ ，

$\therefore \triangle ACA' \sim \triangle BCB'$ ，

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{AA'}{BB'}, \text{ 即 } \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{8}{BB'},$$

解得: $BB' = 4\sqrt{5}$.

故答案为: $4\sqrt{5}$.

【点评】此题考查了解直角三角形、旋转的性质、勾股定理、等腰三角形的性质、相似三角形的判定与性质, 综合考察的知识点较多, 难度较大, 解答本题的关键是得出 $\triangle ACA' \sim \triangle BCB'$, 有一定难度.

三、(本大题共 6 题, 第 19--22 题, 每题 8 分; 第 23、24 题, 每题 10 分. 满分 52 分)

19. (8 分) 先化简, 再求值: $(\frac{a+2}{a^2-1} - \frac{1}{a-1}) \div (\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1})$, 其中 $a = \sqrt{2}$.

【考点】6D: 分式的化简求值.

【分析】先通分, 再把除法转化成乘法, 然后约分, 最后将 a 的值代入即可.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= \frac{1}{(a+1)(a-1)} \div \frac{1}{a(a+1)} \\ &= \frac{a}{a-1} \end{aligned}$$

当 $a = \sqrt{2}$ 时,

$$\text{原式} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2 + \sqrt{2}.$$

【点评】此题考查了分式的化简求值; 解答此题的关键是把分式化到最简, 然后代入计算.

20. (8 分) 已知 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$, (1) 求 $\frac{x-2y}{z}$ 的值; (2) 若 $\sqrt{x+3} = z-y$, 求 x 值.

【考点】73: 二次根式的性质与化简; S1: 比例的性质.

【专题】11: 计算题.

【分析】(1) 设 $x = 2k$, $y = 3k$, $z = 4k$, 代入后化简即可;

(2) 把 $x = 2k$, $y = 3k$, $z = 4k$ 代入得出 $2k+3 = k^2$, 求出方程的解, 注意无理方程要进行检验.

【解答】解 由 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$, 设 $x = 2k$, $y = 3k$, $z = 4k$,

$$(1) \frac{x-2y}{z} = \frac{2k-6k}{4k} = -1,$$

$$(2) \sqrt{x+3} = z-y \text{ 化为 } \sqrt{2k+3} = k,$$

$$\therefore 2k+3 = k^2, \text{ 即 } k^2 - 2k - 3 = 0,$$

$$\therefore k = 3 \text{ 或 } k = -1,$$

经检验, $k = -1$ 不符合题意,

$$\therefore k = 3, \text{ 从而 } x = 2k = 6,$$

即 $x = 6$.

【点评】 本题考查了比例的性质, 二次根式的性质, 解一元二次方程等知识点的应用, 注意解 (1) 小题的方法, 解 (2) 小题求出 k 的值要进行检验.

21. (8 分) 已知一个二次函数的图象经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(0, 3)$, 且对称轴为直线 $x = 1$,

(1) 求这个函数的解析式;

(2) 指出该函数图象的开口方向和顶点坐标, 并说明图象的变化情况.

【考点】 H3: 二次函数的性质; H8: 待定系数法求二次函数解析式.

【分析】 (1) 利用待定系数法直接就可以求出抛物线的解析式.

(2) 将 (1) 的解析式化为顶点式, 由 a 的值就可以确定开口方向, 由顶点式就可以确定顶点坐标, 根据对称轴就可以说出图象的变化情况.

【解答】 解 (1) 设函数的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$$\text{由题意得} \begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = 3 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases}, \text{ 解得} \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \text{函数解析式为 } y = -x^2 + 2x + 3$$

$$(2) \because \text{函数解析式为 } y = -x^2 + 2x + 3$$

$$\therefore y = -(x - 1)^2 + 4$$

$$\because a = -1 < 0,$$

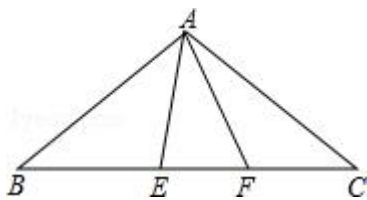
$\therefore$ 函数图象开口向下, 顶点为 $(1, 4)$,

$\therefore$ 直线的对称轴为 $x = 1$,

$\therefore$ 在对称轴的左侧, 图象上升, y 随 x 的增大而增大, 在直线 $x = 1$ 的右侧, 图象下降, y 随 x 的增大而减小.

【点评】 本题考查了待定系数法求二次函数的解析式, 二次函数的性质, 顶点坐标, 对称轴的运用.

22. (8 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 E 、 F 在边 BC 上, 满足 $\angle EAF = \angle C$, 求证: $BF \cdot CE = AB^2$.



【考点】KH：等腰三角形的性质；S9：相似三角形的判定与性质．

【专题】31：数形结合．

【分析】利用两角对应成比例可得 $\triangle ABF \sim \triangle ECA$ ，对应边成比例可得相应的比例式，整理可得所求的乘积式．

【解答】证明： $\because \angle AFB = \angle C + \angle FAC = \angle EAF + \angle FAC = \angle EAC$ ，

又 $\because AB = AC$ ，

$\therefore \angle B = \angle C$ ，即 $\angle ABF = \angle ECA$ ，

$\therefore \triangle ABF \sim \triangle ECA$ ，

$\therefore \frac{AB}{EC} = \frac{BF}{AC}$ ，

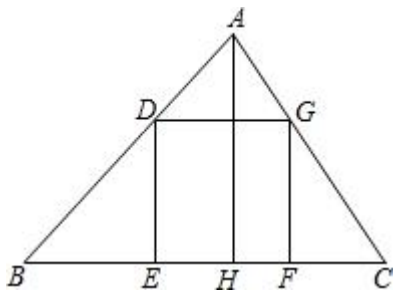
$\therefore BF \cdot EC = AB \cdot AC = AB^2$ ．

【点评】考查相似三角形的判定与性质的应用；利用所给乘积式判断出应证明哪两个三角形相似是解决本题的突破点．

23. (10分) 如图，已知 $\triangle ABC$ 的边 BC 长15厘米，高 AH 为10厘米，长方形 $DEFG$ 内接于 $\triangle ABC$ ，点 E 、 F 在边 BC 上，点 D 、 G 分别在边 AB 、 AC 上．

(1) 设 $DG = x$ ，长方形 $DEFG$ 的面积为 y ，试求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域；

(2) 若长方形 $DEFG$ 的面积为36，试求这时 $\frac{AD}{AB}$ 的值．



【考点】HE：二次函数的应用；LB：矩形的性质；SA：相似三角形的应用．

【分析】(1) 易证得 $\triangle ADG \sim \triangle ABC$ ，那么它们的对应边和对应高的比相等，可据此求出 AP 的表达式，进而可求出 PH 即 DE 、 GF 的长，已知矩形的长和宽，即可根据矩形的面积公式得到 y 、 x 的函数关系式；

(2) 根据(1)题所得函数的性质及自变量的取值范围, 即可求出这时 $\frac{AD}{AB}$ 的值.

【解答】(1) 解: 设 AH 与 DG 交于点 P ,

$\because$ 矩形 $DEFG$,

$\therefore DG \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADG \sim \triangle ABC$, 且 $AP \perp DG$,

$$\therefore \frac{AP}{AH} = \frac{DG}{BC},$$

$$\text{即 } \frac{AP}{10} = \frac{x}{15},$$

$$\therefore AP = \frac{2}{3}x, \text{ 从而 } PH = 10 - \frac{2}{3}x$$

$$\therefore y = DG \cdot DE = x(10 - \frac{2}{3}x) = -\frac{2}{3}x^2 + 10x,$$

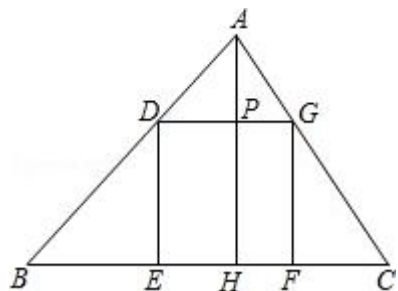
定义域为 $0 < x < 15$;

$$(2) \text{ 由已知, } y = -\frac{2}{3}x^2 + 10x = 36,$$

解得 $x = 6$ 或 $x = 9$,

$$\text{当 } x = 6 \text{ 时, } \frac{AD}{AB} = \frac{DG}{BC} = \frac{2}{5};$$

$$\text{当 } x = 9 \text{ 时, } \frac{AD}{AB} = \frac{DG}{BC} = \frac{3}{5}.$$



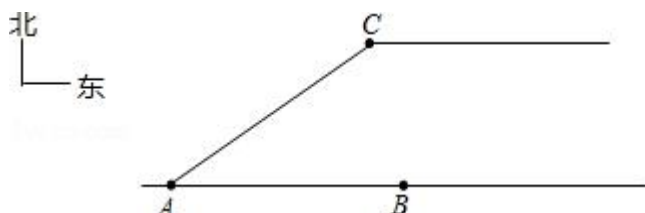
【点评】此题主要考查了矩形的性质、相似三角形的判定和性质以及二次函数的应用等知识, 能够根据相似三角形求出矩形的宽是解答此题的关键.

24. (10分) 据新华社12月13日电, 参加湄公河联合巡逻执法的中国巡逻船顺利返航. 已知在巡逻过程中, 某一天上午, 我巡逻船正在由西向东匀速行驶, 10:00 巡逻船在 A 处发现北偏东 53.1° 方向, 相距 10 海里的 C 处有一个不明物体正在向正东方向移动, 10:15 巡逻船在 B 处又测得该物体位于北偏东 18.4° 方向的 D 处. 若巡逻船的速度是每小时 36 海里,

(1) 试在图中画出点 D 的大致位置, 并求不明物体移动的速度;

(2) 假设该不明物体移动的方向和速度保持不变，巡逻船航行的方向和速度也不变，试问什么时间该物体与我巡逻船之间的距离最近？

[备用数据： $\sin 53.1^\circ = 0.8$ ， $\cos 53.1^\circ = 0.6$ ， $\cot 53.1^\circ = 0.75$ ； $\sin 18.4^\circ = 0.32$ ， $\cos 18.4^\circ = 0.95$ ， $\cot 18.4^\circ = 3$ ；]。

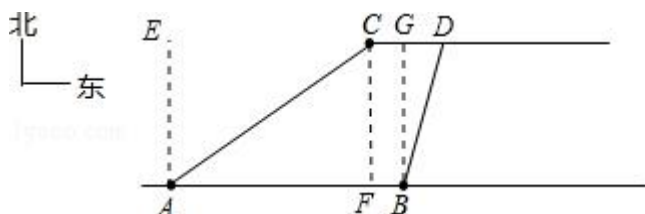


【考点】 TB：解直角三角形的应用 - 方向角问题。

【分析】 (1) 设 10:15 时，巡逻船在 B 处，作北偏东 18.4° 方向，交过点 C 的水平线于点 D 即可；利用 53.1° 的三角函数值求得 AF ， CF 长，进而求得 FB 即 CG 的长，进而利用 18.4° 的正切值可得 GD 长，也就求得了 CD 长，除以时间即为移动的速度；

(2) 两者之间的最近距离为直线 CD 与 AB 的距离，根据 GD 和 BQ 相等可得相应的关系式。

【解答】 解：(1) 作 $AE \perp AB$ ， $CF \perp AB$ 于点 F ， $BG \perp CD$ 于点 G ，由题意， $\angle EAC = 53.1^\circ$ ， $\angle GBD = 18.4^\circ$ ，



在 $\triangle CAF$ 中， $CF \perp AB$ ， $\angle ACF = \angle EAC = 53.1^\circ$

$$\therefore AF = AC \cdot \sin 53.1^\circ = 10 \times 0.8 = 8, \quad CF = AC \cdot \cos 53.1^\circ = 10 \times 0.6 = 6,$$

$$\therefore BG = CF = 6$$

$$\text{又 } AB = \frac{36}{60} \times 15 = 9,$$

$$\therefore FB = AB - AF = 9 - 8 = 1, \text{ 从而 } CG = BF = 1$$

在 $\triangle BDG$ 中， $BG \perp CD$ ， $\angle GBD = 18.4^\circ$

$$\therefore \cot 18.4^\circ = 3,$$

$$\therefore \tan 18.4^\circ = \frac{1}{3}$$

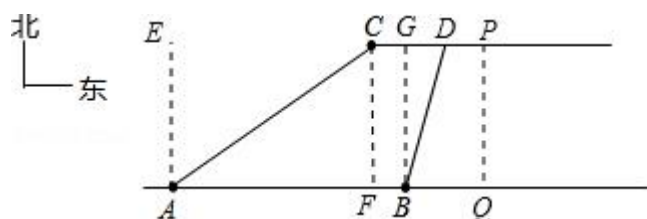
$$\therefore GD = BG \cdot \tan 18.4^\circ = 6 \times \frac{1}{3} = 2,$$

$$\therefore CD = CG + GD = 1 + 2 = 3, \quad 3 \div \frac{15}{60} = 12 \text{ (海里/小时)},$$

(2) 由题意, 不明物体沿 CD 移动, 我巡逻船沿 AB 运动, 且 $CD \parallel AB$,

$\therefore$ 两者之间的最近距离为直线 CD 与 AB 的距离.

设又过了 t 分钟, 不明物体移动到点 P , 我巡逻船到达点 Q , 这时 $PQ \perp AB$,



$$\text{则 } DP = \frac{12}{60}t = \frac{1}{5}t, \quad BQ = \frac{36}{60}t = \frac{3}{5}t,$$

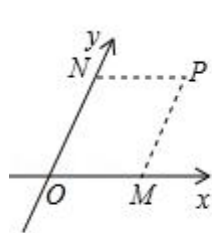
$$\therefore \frac{1}{5}t + 2 = \frac{3}{5}t, \text{ 解得 } t = 5.$$

$\therefore$ 10:20 两者之间距离最近.

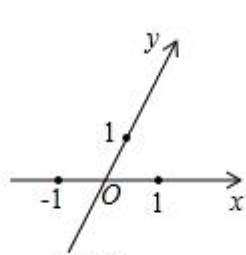
【点评】 考查解直角三角形的应用; 利用所给角的度数作出相应辅助线, 得到直角三角形是解决本题的突破点; 利用相应的锐角三角函数求得相关线段长是解决本题的关键.

四、(本大题共 2 题, 第 25 题 12 分, 第 26 题 14 分, 满分 26 分)

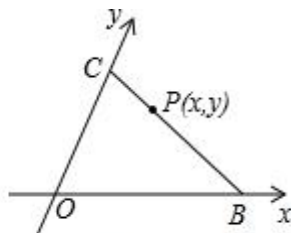
25. (12 分) 我们知道, 互相垂直且有公共原点的两条数轴构成平面直角坐标系. 如果坐标系中两条坐标轴不垂直, 那么这样的坐标系称为“斜坐标系”.



(图1)



(图2)



(图3)

如图 1, P 是斜坐标系 xOy 中的任意一点, 与直角坐标系相类似, 过点 P 分别作两坐标轴的平行线, 与 x 轴、 y 轴交于点 M 、 N , 若 M 、 N 在 x 轴、 y 轴上分别对应实数 a 、 b , 则有序数对 (a, b) 叫做点 P 在斜坐标系 xOy 中的坐标.

(1) 如图 2, 已知斜坐标系 xOy 中, $\angle xOy = 60^\circ$, 试在该坐标系中作出点 $A(-2, 2)$, 并求点 O 、 A 之间的距离;

(2) 如图 3, 在斜坐标系 xOy 中, 已知点 $B(4, 0)$ 、点 $C(0, 3)$, $P(x, y)$

是线段 BC 上的任意一点，试求 x 、 y 之间一定满足的一个等量关系式；

(3) 若问题(2)中的点 P 在线段 BC 的延长线上，其它条件都不变，试判断上述 x 、 y 之间的等量关系是否仍然成立，并说明理由。

【考点】 KM：等边三角形的判定与性质； L7：平行四边形的判定与性质； S4：平行线分线段成比例。

【分析】 (1) 作 $AM \parallel y$ 轴， AM 与 x 轴交于点 M ， $AN \parallel x$ 轴， AN 与 y 轴交于点 N ，构建菱形 $AMON$ ，然后根据菱形的性质以及等边三角形的判定与性质来求 OA 的长度；

(2) 过点 P 分别作两坐标轴的平行线，与 x 轴、 y 轴交于点 M 、 N ，则 $PN = x$ ， $PM = y$ ；根据平行线截线段成比例分别列出关于 x 、 y 的比例式 $\frac{PN}{OB} = \frac{CP}{CB}$ 、 $\frac{PM}{OC} = \frac{BP}{BC}$ ；再由线段间的和差关系求得 $PC + BP = BC$ 知 $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \frac{CP}{CB} + \frac{BP}{BC} = 1$ ；

(3) 当点 P 在线段 BC 的延长线上时，上述结论仍然成立。理由如下：这时 $PN = -x$ ， $PM = y$ ，证明过程同(2)。

【解答】 解：(1) 作 $AM \parallel y$ 轴， AM 与 x 轴交于点 M ， $AN \parallel x$ 轴， AN 与 y 轴交于点 N ，

则四边形 $AMON$ 为平行四边形，且 $OM = ON$ ，

$\therefore AMON$ 是菱形， $OM = AM$

$\therefore OA$ 平分 $\angle MON$ ，

又 $\because \angle xOy = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle MOA = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle MOA$ 是等边三角形，

$\therefore OA = OM = 2$ ；

(2) 过点 P 分别作两坐标轴的平行线，与 x 轴、 y 轴交于点 M 、 N ，

则 $PN = x$ ， $PM = y$ ，

由 $PN \parallel OB$ ，得 $\frac{PN}{OB} = \frac{CP}{CB}$ ，即 $\frac{x}{4} = \frac{CP}{CB}$ ；

由 $PM \parallel OC$ ，得 $\frac{PM}{OC} = \frac{BP}{BC}$ ，即 $\frac{y}{3} = \frac{BP}{BC}$ ；

$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \frac{CP}{CB} + \frac{BP}{BC} = 1$ ，

即 $3x+4y=12$.

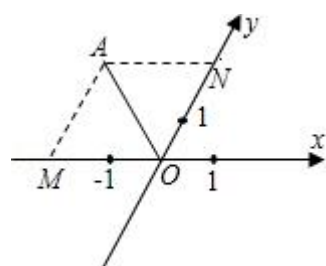
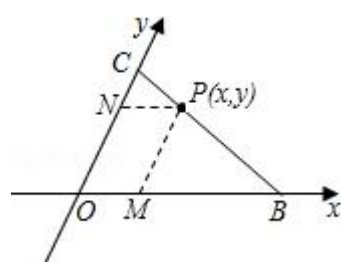
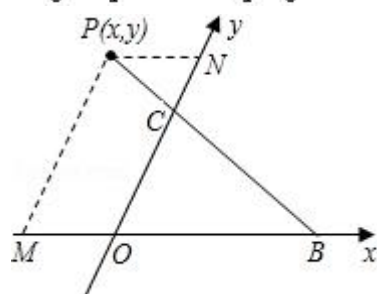
(3) 当点 P 在线段 BC 的延长线上时, 上述结论仍然成立. 理由如下: 这时 PN

$$= -x, PM=y,$$

与 (2) 类似, $\frac{-x}{4} = \frac{CP}{CB}, \frac{y}{3} = \frac{BP}{BC}$.

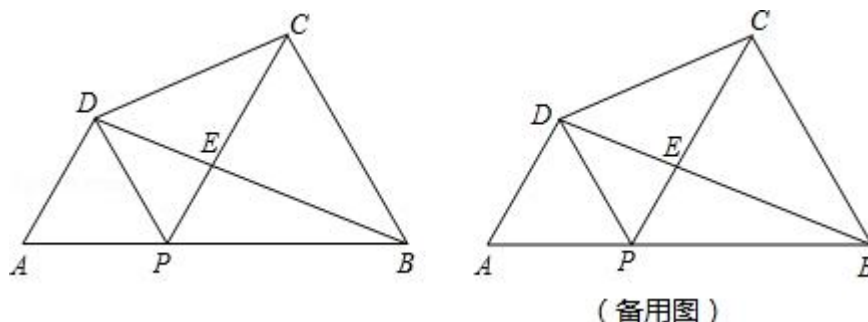
$$\text{又} \because \frac{BP}{BC} - \frac{CP}{BC} = 1.$$

$$\therefore \frac{y}{3} - \frac{-x}{4} = 1, \text{ 即 } \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1.$$



【点评】 本题综合考查了平行线截线段成比例、平行四边形的判定与性质以及等边三角形的判定与性质. 解答本题时, 是通过作辅助线构建平行四边形 (或菱形) 解答问题的.

26. (14 分) 如图, 已知线段 AB , P 是线段 AB 上任意一点 (不与点 A 、 B 重合), 分别以 AP 、 BP 为边, 在 AB 的同侧作等边 $\triangle APD$ 和 $\triangle BPC$, 连接 BD 与 PC 交于点 E , 连接 CD .



(1) 当 $BC \perp CD$ 时, 试求 $\angle DBC$ 的正切值;

(2) 若线段 CD 是线段 DE 和 DB 的比例中项, 试求这时 $\frac{AP}{PB}$ 的值;

(3) 记四边形 $ABCD$ 的面积为 S , 当 P 在线段 AB 上运动时, S 与 BD^2 是否成正比例, 若成正比例, 试求出比例系数; 若不成正比例, 试说明理由.

【考点】 KK: 等边三角形的性质; KQ: 勾股定理; S2: 比例线段; S3: 黄金分割; S4: 平行线分线段成比例; S9: 相似三角形的判定与性质; T1: 锐角三角函数的定义.

【专题】 2C: 存在型.

【分析】 (1) 根据等边三角形的性质得出 $PC = BC$, $\angle CPD = 60^\circ$, $PD \parallel BC$, 进而得出 $\angle DBC$ 的正切值等于 $\frac{CD}{BC} = \frac{CD}{PC}$, 即可得出答案;

(2) 利用线段 CD 是线段 DE 和 DB 的比例中项得出 $\triangle DCE \sim \triangle DBC$, 再利用相似三角形的性质得出即可;

(3) 由 $AD \parallel PC$, $PD \parallel BC$, 得出 $\frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle PDC}} = \frac{AD}{PC}$, $\frac{S_{\triangle PDC}}{S_{\triangle BPC}} = \frac{PD}{BC}$, 进而得出

$$\frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle PDC}} = \frac{S_{\triangle PDC}}{S_{\triangle BPC}}, \text{ 以及 } \frac{S}{BD^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 即可得出比例系数.}$$

【解答】 解: (1) $\because$ 等边 $\triangle APD$ 和 $\triangle BPC$,

$$\therefore PC = BC, \angle CPD = 60^\circ, \angle DPA = \angle CBP = 60^\circ,$$

$$\therefore PD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DPC = \angle PCB = 60^\circ,$$

$$\because BC \perp CD,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle PDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCP = 30^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle DBC = \frac{CD}{BC} = \frac{CD}{PC} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

(2) 由已知, $CD^2 = DE \cdot DB$,

$$\text{即 } \frac{DE}{CD} = \frac{CD}{DB},$$

又 $\because \angle CDE = \angle CDE$,

$$\therefore \triangle DCE \sim \triangle DBC,$$

$$\therefore \frac{DE}{CD} = \frac{CD}{DB} = \frac{CE}{BC},$$

$$\text{又 } \because CP = BC, \frac{CE}{BC} = \frac{CE}{CP},$$

$$\therefore PD \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{CE}{CP} = \frac{BE}{BD},$$

$$\therefore \frac{CD}{DB} = \frac{CE}{CP} = \frac{BE}{BD},$$

$$\therefore CD = BE,$$

$$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{BE}{DB}, \text{ 即点 } E \text{ 是线段 } BD \text{ 的黄金分割点.}$$

$$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{BE}{DB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

又 $\because PC \parallel AD$,

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{DE}{BE} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

(3) 设 $AP = a$, $PB = b$,

$$\therefore S_{\triangle APD} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, S_{\triangle BPC} = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2,$$

因为 $AD \parallel PC$, $PD \parallel BC$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle PDC}} = \frac{AD}{PC}, \frac{S_{\triangle PDC}}{S_{\triangle BPC}} = \frac{PD}{BC},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle PDC}} = \frac{S_{\triangle PDC}}{S_{\triangle BPC}},$$

$$\therefore S_{\triangle PDC} = \sqrt{S_{\triangle APD} \cdot S_{\triangle BPC}} = \frac{\sqrt{3}}{4} ab,$$

$$\therefore S = \frac{\sqrt{3}}{4} (a^2 + ab + b^2),$$

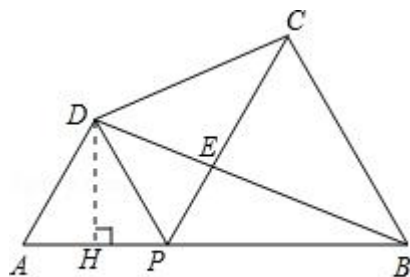
作 $DH \perp AB$,

$$\text{则 } DH = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad BH = \frac{1}{2}a + b,$$

$$\therefore BD^2 = DH^2 + BH^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a + b\right)^2 = a^2 + ab + b^2,$$

$$\therefore \frac{S}{BD^2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$\therefore S$ 与 BD^2 成正比例, 比例系数为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



(备用图)

【点评】 此题主要考查了相似三角形的判定与性质, 熟练利用相似三角形的性质得出对应边之间关系是解题关键.