

2010 年上海市初中毕业统一学业考试数学卷

(满分 150 分, 考试时间 100 分钟)

2010-6-20

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列实数中, 是无理数的为 ()

- A. 3.14 B. $\frac{1}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{9}$

2. 在平面直角坐标系中, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 图像的分支分别在 ()

- A. 第一、三象限 B. 第二、四象限 C. 第一、二象限 D. 第三、四

象限

3. 已知一元二次方程 $x^2 + x - 1 = 0$, 下列判断正确的是 ()

- A. 该方程有两个相等的实数根 B. 该方程有两个不相等的实数根
C. 该方程无实数根 D. 该方程根的情况不确定

4. 某市五月份连续五天的日最高气温分别为 23、20、20、21、26 (单位: $^{\circ}\text{C}$), 这组数据的中位数和众数分别是 ()

- A. 22°C , 26°C B. 22°C , 20°C C. 21°C , 26°C D.
 21°C , 20°C

5. 下列命题中, 是真命题的为 ()

- A. 锐角三角形都相似 B. 直角三角形都相似 C. 等腰三角形都相似 D. 等边三角
形都相似

6. 已知圆 O_1 、圆 O_2 的半径不相等, 圆 O_1 的半径长为 3, 若圆 O_2 上的点 A 满足 $AO_1 = 3$, 则圆 O_1 与圆 O_2 的位置关系是 ()

- A. 相交或相切 B. 相切或相离 C. 相交或内含 D. 相切或内
含

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $a^3 \div a^2 =$ _____.

8. 计算: $(x+1)(x-1) =$ _____.

9. 分解因式: $a^2 - ab =$ _____.

10. 不等式 $3x - 2 > 0$ 的解集是_____.

11. 方程 $\sqrt{x+6} = x$ 的根是_____.

12. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, 那么 $f(-1) =$ _____.

13. 将直线 $y = 2x - 4$ 向上平移 5 个单位后, 所得直线的表达式是_____.

14. 若将分别写有“生活”、“城市”的 2 张卡片, 随机放入“让更美好”中的两个内 (每个只放 1 张卡片), 则其中的文字恰好组成“城市让生活更美好”的概率是_____.

15. 如图 1, 平行四边形 ABCD 中, 对角线 AC、BD 交于点 O. 设向量 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, 则向量

$\overrightarrow{AO} =$ _____ (结果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)

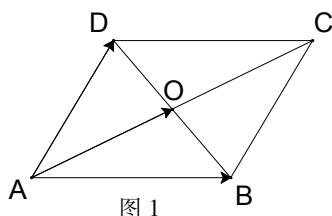


图 1

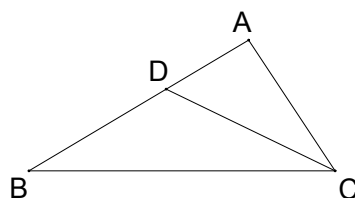


图 2

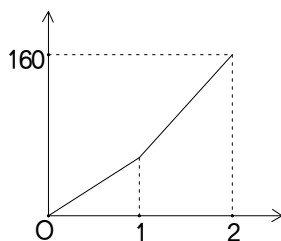


图 3

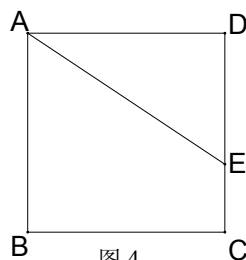


图 4

16. 如图 2, $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, 满足 $\angle ACD = \angle ABC$, 若 $AC = 2$, $AD = 1$, 则 $DB =$ _____.

17. 一辆汽车在行驶过程中, 路程 y (千米) 与时间 x (小时) 之间的函数关系如图 3 所示. 当时 $0 \leq x \leq 1$, y 关于 x 的函数解析式为 $y = 60x$, 那么当 $1 \leq x \leq 2$ 时, y 关于 x 的函数解析式为_____.

18. 已知正方形 ABCD 中, 点 E 在边 DC 上, $DE = 2$, $EC = 1$ (如图 4 所示). 把线段 AE 绕点 A 旋转, 使点 E 落在直线 BC 上的点 F 处, 则 F、C 两点的距离为_____.

三、解答题 (本大题共 7 题, 19~22 题每题 10 分, 23、24 题每题 12 分, 25 题 14 分, 满分 78 分)

19.计算: $27^{\frac{1}{3}} + (\sqrt{3}-1)^2 - (\frac{1}{2})^{-1} + \frac{4}{\sqrt{3}+1}$

20.解方程: $\frac{x}{x-1} - \frac{2x-2}{x} - 1 = 0$

21.机器人“海宝”在某圆形区域表演“按指令行走”，如图5所示，“海宝”从圆心O出发，先沿北偏西 67.4° 方向行走13米至点A处，再沿正南方向行走14米至点B处，最后沿正东方向行走至点C处，点B、C都在圆O上. (1) 求弦BC的长；(2) 求圆O的半径长.

(本题参考数据: $\sin 67.4^\circ = \frac{12}{13}$, $\cos 67.4^\circ = \frac{5}{13}$, $\tan 67.4^\circ = \frac{12}{5}$)

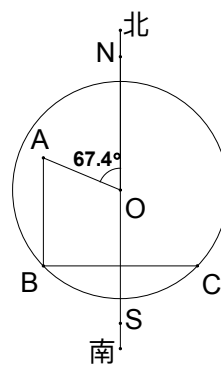


图5

22.某环保小组为了解世博园的游客在园区内购买瓶装饮料数量的情况，一天，他们分别在A、B、C三个出口处，对离开园区的游客进行调查，其中在A出口调查所得的数据整理后绘成图6.

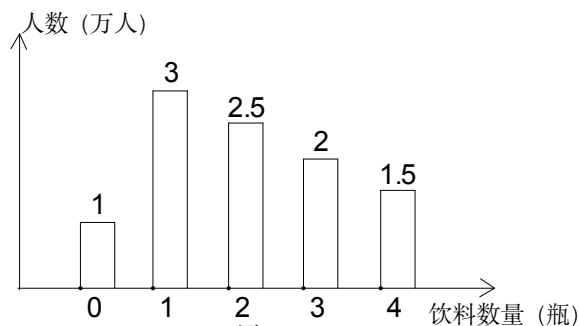


图6

(1) 在A出口的被调查游客中，购买2瓶及2瓶以上饮料的游客人数占A出口的被调查游客人数的_____%.

(2) 试问 A 出口的被调查游客在园区内人均购买了多少瓶饮料?

(3) 已知 B、C 两个出口的被调查游客在园区内人均购买饮料的数量如表一所示 若 C 出口的被调查人数比 B 出口的被调查人数多 2 万, 且 B、C 两个出口的被调查游客在园区内共购买了 49 万瓶饮料, 试问 B 出口的被调查游客人数为多少万?

表 一

出 口	B	C
人均购买饮料数量 (瓶)	3	2

23. 已知梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, $AB=AD$ (如图 7 所示), $\angle BAD$ 的平分线 AE 交 BC 于点 E, 连结 DE.

(1) 在图 7 中, 用尺规作 $\angle BAD$ 的平分线 AE (保留作图痕迹, 不写作法), 并证明四边形 ABED 是菱形;

(2) $\angle ABC = 60^\circ$, $EC=2BE$, 求证: $ED \perp DC$.

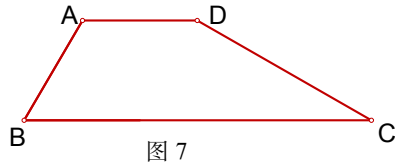


图 7

24. 如图 8, 已知平面直角坐标系 xOy, 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 过点 A(4,0)、B(1,3).

(1) 求该抛物线的表达式, 并写出该抛物线的对称轴和顶点坐标;

(2) 记该抛物线的对称轴为直线 l, 设抛物线上的点 P(m,n) 在第四象限, 点 P 关于直线 l 的对称点为 E, 点 E 关于 y 轴的对称点为 F, 若四边形 OAPF 的面积为 20, 求 m、n 的值.

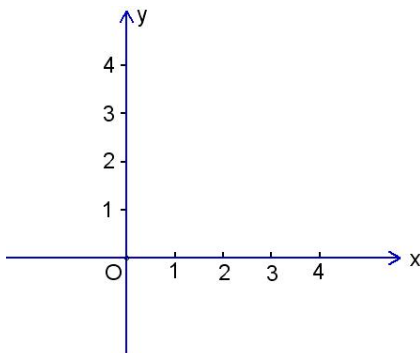


图 8

25. 如图 9, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$. 半径为 1 的圆 A 与边 AB 相交于点 D , 与边 AC 相交于点 E , 连结 DE 并延长, 与线段 BC 的延长线交于点 P .

(1) 当 $\angle B = 30^\circ$ 时, 连结 AP , 若 $\triangle AEP$ 与 $\triangle BDP$ 相似, 求 CE 的长;

(2) 若 $CE=2$, $BD=BC$, 求 $\angle BPD$ 的正切值;

(3) 若 $\tan \angle BPD = \frac{1}{3}$, 设 $CE=x$, $\triangle ABC$ 的周长为 y , 求 y 关于 x 的函数关系式.

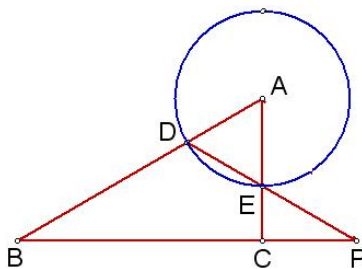


图 9

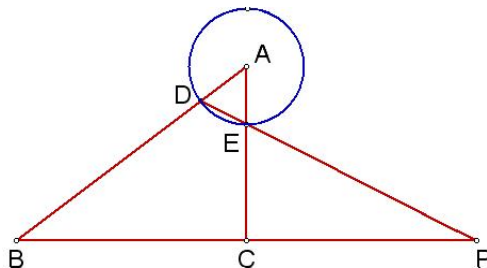


图 10(备用)

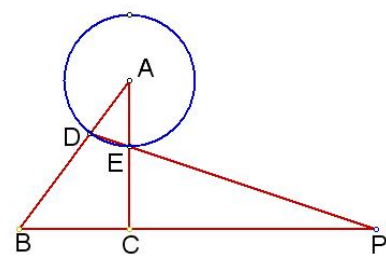


图 11(备用)

2010 年上海市初中毕业统一学业考试数学卷

(满分 150 分, 考试时间 100 分钟)

2010-6-20

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列实数中, 是无理数的为 (C)

A. 3.14

B. $\frac{1}{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{9}$

【解析】无理数即为无限不循环小数, 则选 C.

2. 在平面直角坐标系中, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 图像的两支分别在 (B)

A. 第一、三象限

B. 第二、四象限

C. 第一、二象限

D. 第三、四象限

象限

【解析】设 $K=-1$, 则 $x=2$ 时, $y=-\frac{1}{2}$, 点在第四象限; 当 $x=-2$ 时, $y=\frac{1}{2}$, 在第二象限,

所以图像过第二、四象限, 即使选 B

3. 已知一元二次方程 $x^2 + x - 1 = 0$, 下列判断正确的是 (B)

A. 该方程有两个相等的实数根

B. 该方程有两个不相等的实数根

C. 该方程无实数根

D. 该方程根的情况不确定

【解析】根据二次方程的根的判别式: $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$, 所以方程

有两个不相等的实数根，所以选 B

4.某市五月份连续五天的日最高气温分别为 23、20、20、21、26 (单位: $^{\circ}\text{C}$), 这组数据的中位数和众数分别是 (D)

- A. 22°C , 26°C B. 22°C , 20°C C. 21°C , 26°C D. 21°C , 20°C

【解析】**中位数定义**: 将所有数字按从小到大顺序排列后, 当数字个数为奇数时即中间那个数为中位数, 当数字的个数为偶数时即中间那两个数的平均数为中位数。

众数: 出现次数最多的数字即为众数

所以选择 D。

5.下列命题中, 是真命题的为 (D)

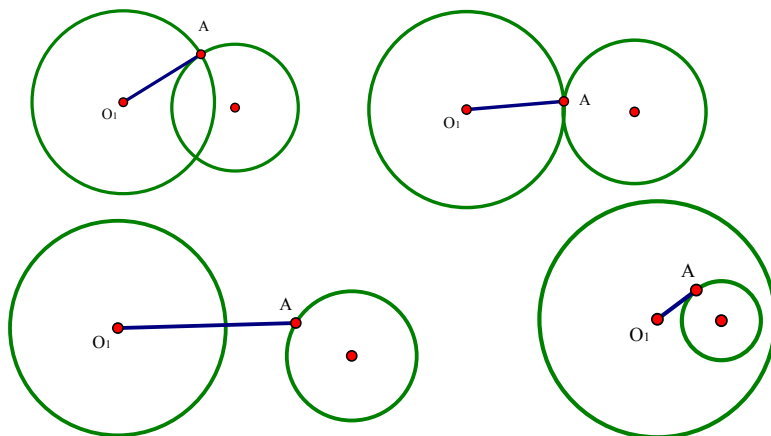
- A. 锐角三角形都相似 B. 直角三角形都相似 C. 等腰三角形都相似 D. 等边三角形都相似

【解析】两个相似三角形的要求是对应角相等, A、B、C 中的类型三角形都不能保证两个三角形对应角相等, 即选 D。

6.已知圆 O_1 、圆 O_2 的半径不相等, 圆 O_1 的半径长为 3, 若圆 O_2 上的点 A 满足 $AO_1 = 3$, 则圆 O_1 与圆 O_2 的位置关系是 (A)

- A. 相交或相切 B. 相切或相离 C. 相交或内含 D. 相切或内含

【解析】如图所示, 所以选择 A



二、填空题

(本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7.计算: $a^3 \div a^2 = \underline{a}$.

【解析】 $a^3 \div a^2 = a^{3-2} = a^1 = a$

8.计算: $(x+1)(x-1) = \underline{x^2-1}$.

【解析】根据平方差公式得: $(x+1)(x-1) = \underline{x^2-1}$

9.分解因式: $a^2 - ab = \underline{a(a-b)}$.

【解析】提取公因式 a, 得: $a^2 - ab = a(a-b)$

10.不等式 $3x - 2 > 0$ 的解集是 $\underline{x > 2/3}$.

【解析】 $3x - 2 > 0$

$$3x > 2$$

$$x > \frac{2}{3}$$

11.方程 $\sqrt{x+6} = x$ 的根是 $\underline{x=3}$.

【解析】由题意得： $x > 0$

两边平方得： $x + 6 = x^2$ ，解之得 $x = 3$ 或 $x = -2$ （舍去）

12. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ，那么 $f(-1) = \underline{\underline{1/2}}$ 。

【解析】把 $x = -1$ 代入函数解析式得： $f(-1) = \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{(-1)^2 + 1} = \frac{1}{2}$

13. 将直线 $y = 2x - 4$ 向上平移 5 个单位后，所得直线的表达式是 $\underline{\underline{y = 2x + 1}}$ 。

【解析】直线 $y = 2x - 4$ 与 y 轴的交点坐标为 $(0, -4)$ ，则向上平移 5 个单位后交点坐标为 $(0, 1)$ ，则所得直线方程为 $y = 2x + 1$

14. 若将分别写有“生活”、“城市”的 2 张卡片，随机放入“让更美好”中的两个内（每个只放 1 张卡片），则其中的文字恰好组成“城市让生活更美好”的概率是 $\underline{\underline{1/2}}$ 。

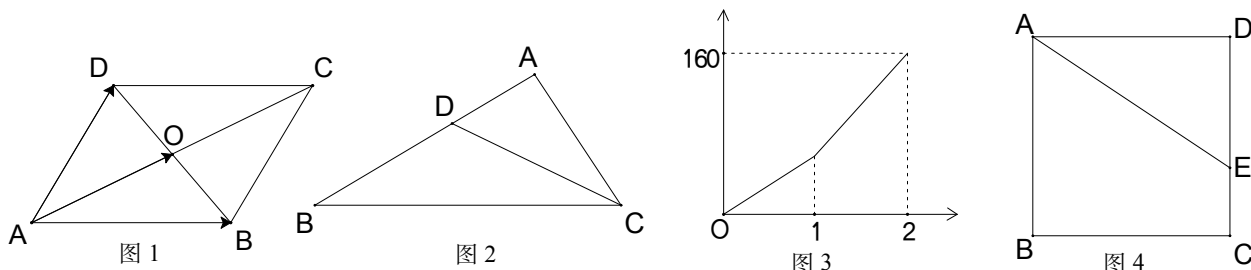
【解析】“生活”、“城市”放入后有两种可能性，即为：生活让城市更美好、城市让生活更美好。

则组成“城市让生活更美好”的可能性占所有可能性的 $1/2$ 。

15. 如图 1，平行四边形 ABCD 中，对角线 AC、BD 交于点 O 设向量 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ，则向量

$\overrightarrow{AO} = \underline{\underline{\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})}}$ 。（结果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示）

【解析】 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ，则 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \vec{a} = 2\overrightarrow{AO}$ ，所以 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a})$



16. 如图 2， $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，满足 $\angle ACD = \angle ABC$ ，若 $AC = 2$ ， $AD = 1$ ，则 $DB = \underline{\underline{3}}$ 。

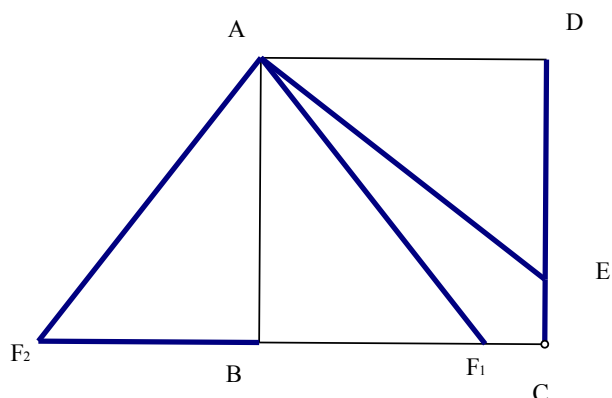
【解析】由于 $\angle ACD = \angle ABC$ ， $\angle BAC = \angle CAD$ ，所以 $\triangle ADC \sim \triangle ACB$ ，即： $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$ ，所

以 $AB \cdot AD = AC^2$ ，则 $AB = 4$ ，所以 $BD = AB - AD = 3$

17. 一辆汽车在行驶过程中，路程 y （千米）与时间 x （小时）之间的函数关系如图 3 所示 当时 $0 \leq x \leq 1$ ， y 关于 x 的函数解析式为 $y = 60x$ ，那么当 $1 \leq x \leq 2$ 时， y 关于 x 的函数解析式为 $\underline{\underline{y = 100x - 40}}$ 。

【解析】在 $0 \leq x \leq 1$ 时，把 $x = 1$ 代入 $y = 60x$ ，则 $y = 60$ ，那么当 $1 \leq x \leq 2$ 时由两点坐标 $(1, 60)$ 与 $(2, 160)$ 得当 $1 \leq x \leq 2$ 时的函数解析式为 $y = 100x - 40$

18. 已知正方形 ABCD 中，点 E 在边 DC 上， $DE = 2$ ， $EC = 1$ （如图 4 所示）把线段 AE 绕点 A 旋转，使点 E



落在直线 BC 上的点 F 处，则 F、C 两点的距离为 1 或 5 .

【解析】题目里只说“旋转”，并没有说顺时针还是逆时针，而且说的是“直线 BC 上的点”，

所以有两种情况如图所示：

顺时针旋转得到 F_1 点，则 $F_1C=1$

逆时针旋转得到 F_2 点，则 $F_2B = DE = 2$, $F_2C = F_2B + BC = 5$

三、解答题（本大题共 7 题，19~22 题每题 10 分，23、24 题每题 12 分，25 题 14 分，满分 78 分）

19. 计算： $27^{\frac{1}{3}} + (\sqrt{3}-1)^2 - (\frac{1}{2})^{-1} + \frac{4}{\sqrt{3}+1}$

解：原式 = $\sqrt[3]{27} + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{4(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$$= 3 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 - 2 + \frac{4\sqrt{3}-4}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$

$$= 5 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2$$

$$= 3$$

20. 解方程： $\frac{x}{x-1} - \frac{2x-2}{x} - 1 = 0$

解： $x \bullet x - (2x-2)(x-1) - 1 \bullet x \bullet (x-1) = 0$

$$x^2 - 2(x-1)^2 - x(x-1) = 0$$

$$x^2 - 2(x^2 - 2x + 1) - x^2 + x = 0$$

$$-2x^2 + 4x - 2 + x = 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$(2x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 或 } x = 2$$

代入检验得符合要求

21. 机器人“海宝”在某圆形区域表演“按指令行走”，如图 5 所示，“海宝”从圆心 O 出发，先沿北偏西 67.4° 方向行走 13 米至点 A 处，再沿正南方向行走 14 米至点 B 处，最后沿正东方向行走至点 C 处，点 B、C 都在圆 O 上. (1) 求弦 BC 的长；(2) 求圆 O 的半径长.

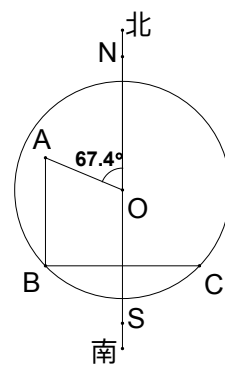


图 5

(本题参考数据: $\sin 67.4^\circ = \frac{12}{13}$, $\cos 67.4^\circ = \frac{5}{13}$, $\tan 67.4^\circ = \frac{12}{5}$)

(1) 解: 过点 O 作 $OD \perp AB$, 则 $\angle AOD + \angle AON = 90^\circ$, 即: $\sin \angle AOD = \cos \angle AON = \frac{5}{13}$

$$\text{即: } AD = AO \times \frac{5}{13} = 5, OD = AO \times \sin 67.4^\circ = AO \times \frac{12}{13} = 12$$

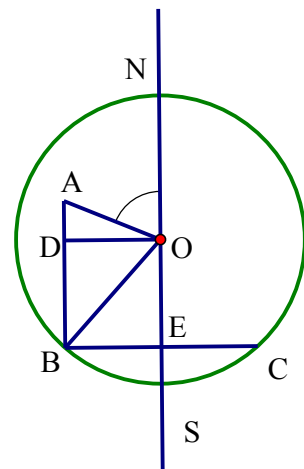
又沿正南方向行走 14 米至点 B 处, 最后沿正东方向行走至点 C 处
所以 $AB \parallel NS, AB \perp BC$, 所以 E 点为 BC 的中点, 且 $BE = DO = 12$
所以 $BC = 24$

(2) 解: 连接 OB, 则 $OE = BD = AB - AD = 14 - 5 = 9$

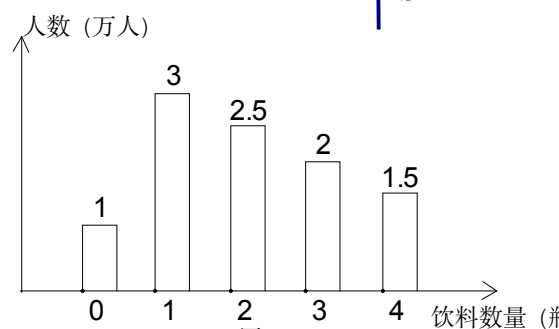
又在 $RT\triangle BOE$ 中, $BE = 12$,

$$\text{所以 } BO = \sqrt{OE^2 + BE^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$$

即圆 O 的半径长为 15



22. 某环保小组为了解世博园的游客在园区内购买瓶装饮料数量的情况, 一天, 他们分别在 A、B、C 三个出口处, 对离开园区的游客进行调查, 其中在 A 出口调查所得的数据整理后绘成图 6.



(1) 在 A 出口的被调查游客中, 购买 2 瓶及 2 瓶以上饮料的游客人数占 A 出口的被调查游客人数的 60 %.

(2) 试问 A 出口的被调查游客在园区内人均购买了多少瓶饮料?

(3) 已知 B、C 两个出口的被调查游客在园区内人均购买饮料的数量如表一所示 若 C 出口的被调查人数比 B 出口的被调查人数多 2 万, 且 B、C 两个出口的被调查游客在园区

出 口	B	C
人均购买饮料数量 (瓶)	3	2

表 一

内共购买了 49 万瓶饮料, 试问 B 出口的被调查游客人数

为多少万?

9 万

解: (1) 由图 6 知, 购买 2 瓶及 2 瓶以上饮料的游客人数为 $2.5 + 2 + 1.5 = 6$ (万人)

而总人数为: $1 + 3 + 2.5 + 2 + 1.5 = 10$ (万人)

所以购买 2 瓶及 2 瓶以上饮料的游客人数占 A 出口的被调查游客人数的 $\frac{6}{10} \times 100\% = 60\%$

(2) 购买饮料总数位: $3 \times 1 + 2.5 \times 2 + 2 \times 3 + 1.5 \times 4 = 3 + 5 + 6 + 6 = 20$ (万瓶)

$$\text{人均购买} = \frac{\text{购买饮料总数}}{\text{总人数}} = \frac{20 \text{ 万瓶}}{10 \text{ 万人}} = 2 \text{ 瓶}$$

(3) 设 B 出口人数为 x 万人, 则 C 出口人数为 $(x+2)$ 万人

则有 $3x + 2(x+2) = 49$

解之得 $x = 9$

所以设 B 出口游客人数为 9 万人

23. 已知梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, $AB = AD$ (如图 7 所示), $\angle BAD$ 的平分线 AE 交 BC 于点 E, 连结 DE.

(1) 在图 7 中, 用尺规作 $\angle BAD$ 的平分线 AE (保留作图痕迹, 不写作法), 并证明四边形 ABED 是菱形;

(2) $\angle ABC = 60^\circ$, $EC = 2BE$, 求证: $ED \perp DC$.

(1) 解: 分别以点 B、D 为圆心, 以大于 AB 的长度为半径, 分别作弧, 且两弧交于一点 P, 则连接 AP, 即 AP 即为 $\angle BAD$ 的平分线, 且 AP 交 BC 于点 E,

$$\because AB=AD, \therefore \triangle ABO \cong \triangle ADO \quad \therefore BO=OD$$

$$\because AD \parallel BC, \therefore \angle OBE = \angle ODA, \angle OAD = \angle OEB$$

$$\therefore \triangle BOE \cong \triangle DOA$$

$$\therefore BE=AD \text{ (平行且相等)}$$

$$\therefore \text{四边形 ABDE 为平行四边形, 另 } AB=AD,$$

$$\therefore \text{四边形 ADBE 为菱形}$$

(2) 设 $DE=2a$, 则 $CE=4a$, 过点 D 作 $DF \perp BC$

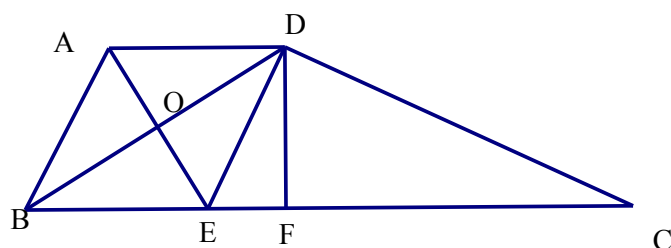
$$\because \angle ABC = 60^\circ, \therefore \angle DEF = 60^\circ, \therefore \angle EDF = 30^\circ, \therefore EF = \frac{1}{2} DE = a, \text{ 则 } DF = \sqrt{3}a,$$

$$CF = CE - EF = 4a - a = 3a,$$

$$\therefore CD = \sqrt{DF^2 + CF^2} = \sqrt{3a^2 + 9a^2} = 2\sqrt{3}a$$

$$\therefore DE=2a, EC=4a, CD=2\sqrt{3}a, \text{ 构成一组勾股数,}$$

$$\therefore \triangle EDC \text{ 为直角三角形, 则 } ED \perp DC$$



24. 如图 8, 已知平面直角坐标系 xOy, 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 过点 A(4,0)、B(1,3).

(1) 求该抛物线的表达式, 并写出该抛物线的对称轴和顶点坐标;

(2) 记该抛物线的对称轴为直线 l, 设抛物线上的点 P(m,n) 在第四象限, 点 P 关于直线 l 的对称点为 E, 点 E 关于 y 轴的对称点为 F, 若四边形 OAPF 的面积为 20, 求 m、n 的值.

(1) 解: 将 A(4,0)、B(1,3) 两点坐标代入抛物线的方程得:

$$\begin{cases} -4^2 + 4b + c = 0 \\ -1^2 + b + c = 3 \end{cases}$$

$$\text{解之得: } b=4, c=0$$

$$\text{所以抛物线的表达式为: } y = -x^2 + 4x$$

$$\text{将抛物线的表达式配方得: } y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$$

$$\text{所以对称轴为 } x=2, \text{ 顶点坐标为 } (2, 4)$$

(2) 点 p (m, n) 关于直线 $x=2$ 的对称点坐标为点 E (4-m, n), 则点 E 关于 y 轴对称点为点 F 坐标为 (4-m, -n),

则四边形 OAPF 可以分为: 三角形 OFA 与三角形 OAP, 则

$$S_{OFAP} = S_{\triangle OFA} + S_{\triangle OPA} = S_{\triangle OFA} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot |n| + S_{\triangle OPA} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot |n| = 4|n| = 20$$

所以 $|n|=5$, 因为点 P 为第四象限的点, 所以 $n < 0$, 所以 $n = -5$

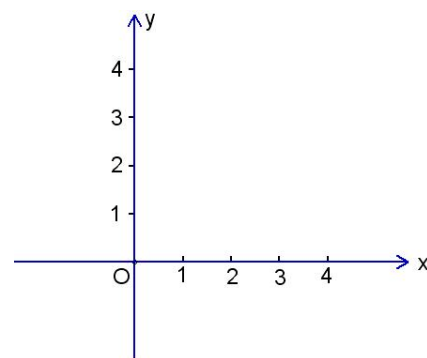


图 8

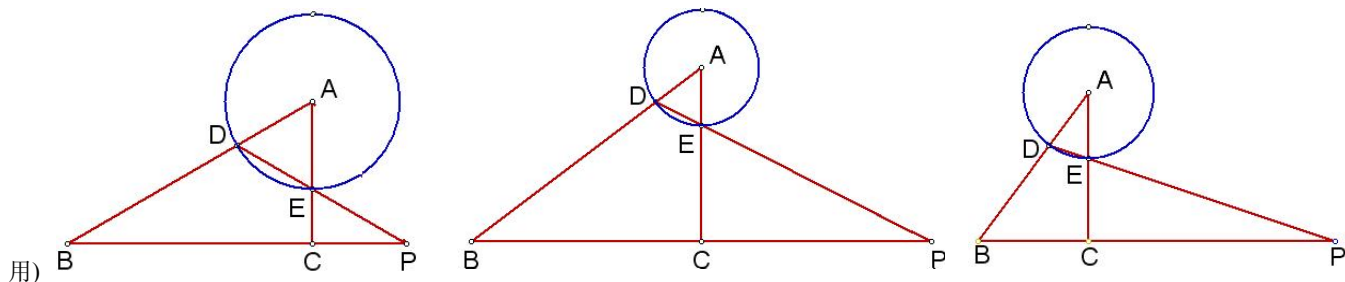
代入抛物线方程得 $m=5$

25. 如图 9, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$. 半径为 1 的圆 A 与边 AB 相交于点 D, 与边 AC 相交于点 E, 连结 DE 并延长, 与线段 BC 的延长线交于点 P.

(1) 当 $\angle B = 30^\circ$ 时, 连结 AP, 若 $\triangle AEP$ 与 $\triangle BDP$ 相似, 求 CE 的长;

(2) 若 $CE=2$, $BD=BC$, 求 $\angle BPD$ 的正切值;

(3) 若 $\tan \angle BPD = \frac{1}{3}$, 设 $CE=x$, $\triangle ABC$ 的周长为 y , 求 y 关于 x 的函数关系式.



(1) 解: $\because \angle B = 30^\circ \angle ACB = 90^\circ \therefore \angle BAC = 60^\circ$

$\because AD=AE \therefore \angle AED = 60^\circ = \angle CEP$

$\therefore \angle EPC = 30^\circ$

$\therefore$ 三角形 BDP 为等腰三角形

$\because \triangle AEP$ 与 $\triangle BDP$ 相似

$\therefore \angle EAP = \angle EPA = \angle DBP = \angle DPB = 30^\circ$

$\therefore AE=EP=1$

$\therefore$ 在 $\text{RT}\triangle ECP$ 中, $EC = \frac{1}{2} EP = \frac{1}{2}$

(2) 过点 D 作 $DQ \perp AC$ 于点 Q, 且设 $AQ=a$, $BD=x$

$\because AE=1, EC=2$

$\therefore QC=3-a$

$\because \angle ACB = 90^\circ$

$\therefore \triangle ADQ$ 与 $\triangle ABC$ 相似

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AQ}{AC}$

即 $\frac{1}{x+1} = \frac{a}{3}, \therefore a = \frac{3}{x+1}$

$\because$ 在 $\text{RT}\triangle ADQ$ 中 $DQ = \sqrt{AD^2 - AQ^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{x+1}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}{x+1}$

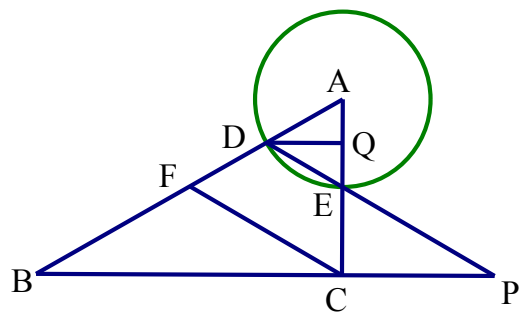
$\therefore \frac{DQ}{BC} = \frac{AD}{AB}$

$\therefore \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}{x+1}}{x} = \frac{1}{x+1}$

解之得 $x=4$, 即 $BC=4$

过点 C 作 $CF \parallel DP$

$\therefore \triangle ADE$ 与 $\triangle AFC$ 相似,



$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AF}, \text{ 即 } AF=AC, \text{ 即 } DF=EC=2,$$

$$\therefore BF=DF=2$$

$\therefore \triangle BFC$ 与 $\triangle BDP$ 相似

$$\therefore \frac{BF}{BD} = \frac{BC}{BP} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \text{ 即: } BC=CP=4$$

$$\therefore \tan \angle BPD = \frac{EC}{CP} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(3) 过 D 点作 $DQ \perp AC$ 于点 Q, 则 $\triangle DQE$ 与 $\triangle PCE$ 相似, 设 $AQ=a$, 则 $QE=1-a$

$$\therefore \frac{QE}{EC} = \frac{DQ}{CP} \text{ 且 } \tan \angle BPD = \frac{1}{3}$$

$$\therefore DQ = 3(1-a)$$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ADQ$ 中, 据勾股定理得: $AD^2 = AQ^2 + DQ^2$

$$\text{即: } 1^2 = a^2 + [3(1-a)]^2, \text{ 解之得 } a=1(\text{舍去}) a = \frac{4}{5}$$

$\therefore \triangle ADQ$ 与 $\triangle ABC$ 相似

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DQ}{BC} = \frac{AQ}{AC} = \frac{\frac{4}{5}}{1+x} = \frac{4}{5+5x}$$

$$\therefore AB = \frac{5+5x}{4}, BC = \frac{3+3x}{4}$$

$$\therefore \text{三角形 } ABC \text{ 的周长 } y = AB + BC + AC = \frac{5+5x}{4} + \frac{3+3x}{4} + 1+x = 3+3x$$

即: $y = 3+3x$, 其中 $x>0$