

学业水平参考样卷

数学

(时间 100 分钟 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤;
3. 填空题须在对应矩形框内作答, 超出对应边框作答无效.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的】

1. 下列计算正确的是 ()

- A. $x^3 \cdot x^3 = 2x^3$ B. $(x^2)^3 = x^5$ C. $(-xy)^4 = x^4y^4$ D. $x^3 + x^5 = x^8$

【答案】C

【解析】

【详解】解: $x^3 \cdot x^3 = x^{3+3} = x^6 \neq 2x^3$, A 错误.

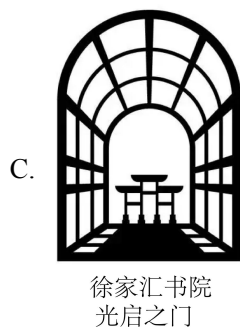
$(x^2)^3 = x^{2 \times 3} = x^6 \neq x^5$, B 错误.

$(-xy)^4 = (-1)^4 x^4 y^4 = x^4 y^4$, C 正确.

$\because x^3$ 与 x^5 不是同类项, 不能合并,

$\therefore x^3 + x^5 \neq x^8$, D 错误.

2. 全民阅读有助于提升国家和民族的精神力量. 上海各区和高校都有开放型图书馆提供给市民, 以下是其中四个图书馆标志, 其图案 (忽略文字部分) 不是轴对称图形的是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合，这个图形就叫做轴对称图形，据此逐一判断即可.

【详解】解：A、是轴对称图形，故此选项不符合题意；

B、是轴对称图形，故此选项不符合题意；

C、是轴对称图形，故此选项不符合题意；

D、不是轴对称图形，故此选项符合题意；

3. 下列函数中，函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小的是 ()

A. $y = \frac{x}{2}$

B. $y = -\frac{x}{2}$

C. $y = \frac{2}{x}$

D. $y = -\frac{2}{x}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据正比例函数的性质及反比例函数性质直接判断即可得到答案；

【详解】解：由题意可得，

A 选项为正比例函数： $\because k = \frac{1}{2} > 0$ ， $\therefore y$ 随自变量 x 的值增大而增大，故 A 选项不符合题意；

B 选项正比例函数： $\because k = -\frac{1}{2} < 0$ ， $\therefore y$ 随自变量 x 的值增大而减小，故 B 选项符合题意；

C 选项反比例函数， $x \neq 0$ ： $\because k = 2 > 0$ ， $\therefore$ 在 $x > 0$ 与 $x < 0$ 上， y 随自变量 x 的值增大而减小，但 $x \neq 0$ ，故 C 选项不符合题意；

D 选项反比例函数， $x \neq 0$ ： $k = -2 < 0$ ， $\therefore$ 在 $x > 0$ 与 $x < 0$ 上， y 随自变量 x 的值增大而增大，故 D 选项不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查正比例函数的性质与反比例函数性质，解题的关键是熟练掌握两种函数的性质.

4. 在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点，下列说法不正确的是 ()

- A. $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{AB}$; B. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$; C. $|\overrightarrow{AE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$; D. $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

【答案】B

【解析】

【分析】结合向量平行、相等、模长的概念，以及三角形中位线的性质，逐一判断选项即可得到答案.

【详解】解: $\because D, E$ 分别是 AB, AC 的中点,

对于选项 A, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 因此 $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{AB}$, A 说法正确;

对于选项 B, $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 模长相等, 但方向相反, 满足 $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BD}$, 因此 $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BD}$, B 说法不正确;

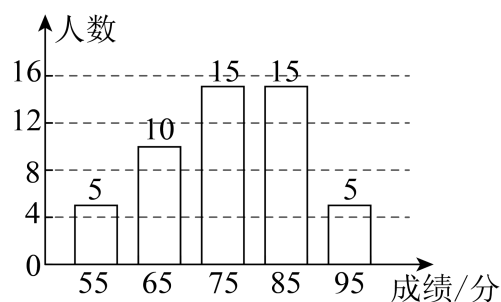
对于选项 C, E 是 AC 中点, $AE = \frac{1}{2}AC$, 因此 $|\overrightarrow{AE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$, C 说法正确;

对于选项 D, DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, $DE \parallel BC$ 且 $DE = \frac{1}{2}BC$, $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BC}$ 方向相同, 因此 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

D 说法正确;

综上, 答案选 B.

5. 某学校组织了一场体能测试, 抽出 50 个人的成绩 (分数) 进行统计, 结果如图所示. 关于这 50 人的分数, 下列说法正确的是 ()



- A. 中位数是 15 B. 众数是 15 C. 中位数是 75 D. 众数是 85

【答案】C

【解析】

【分析】众数是一组数据中出现次数最多的数, 中位数是将一组数据从小到大排列后, 处于中间位置的数, 若数据个数为偶数, 则为中间两个数的平均数.

【详解】解: 由图可知:

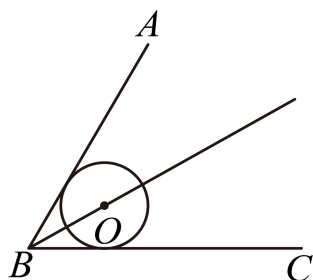
将 50 人的成绩从小到大排序, 第 25、26 位均为 75 分, 因此中位数是 $\frac{75+75}{2} = 75$,

故 A 选项说法错误, 不合题意, C 选项说法正确, 符合题意;

75, 85 均出现了 15 次, 因此众数是 75, 85,

故 B, D 选项说法错误, 不合题意.

6. 如图, 已知 $\angle ABC = 60^\circ$, 半径为 1cm 的 $\odot O$ 与边 BA 、 BC 均相切, 如果 $\odot O_1$ 与 $\angle ABC$ 的两边都相切, 且与 $\odot O$ 相交, 那么 $\odot O_1$ 的半径长可以是 ()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】先证点 O 在 $\angle ABC$ 的角平分线上, 再求出 $\odot O_1$ 与 $\odot O$ 外切时的半径, 进而可得 $\odot O_1$ 半径的取值范围.

【详解】解: 标记 $\odot O$ 与边 BA 、 BC 的切点为 E , H ,
则 $OE \perp AB$, $OH \perp BC$,

在 $\text{Rt}\triangle OEB$ 与 $\text{Rt}\triangle OHB$ 中, $\begin{cases} OE = OH = 1 \\ OB = OB \end{cases}$,

$\therefore \text{Rt}\triangle OEB \cong \text{Rt}\triangle OHB (\text{HL})$,

$\therefore \angle OBE = \angle OBH = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$,

即点 O 在 $\angle ABC$ 的角平分线上,

作 $\odot O_1$, $\odot O_1'$ 与 $\odot O$ 外切, 切点为 M , N , 且与边 BA 、 BC 均相切, $\odot O_1$ 与 BA 的切点为点 D , $\odot O_1'$ 与 BA 的切点为点 F ,

同理可得, 点 O_1 与 O_1' 在 $\angle ABC$ 的角平分线上,

设 $\odot O_1$ 的半径为 r ,

$\therefore \angle OBE = 30^\circ$,

$\therefore BO_1 = 2OD = 2r$, $BO = 2OE = 2 \times 1 = 2$,

$$\therefore BO_1 + O_1M + OM = BO,$$

$$\therefore 2r + r + 1 = 2,$$

$$\text{解得 } r = \frac{1}{3},$$

同理可得 $\odot O_1'$ 的半径为 3,

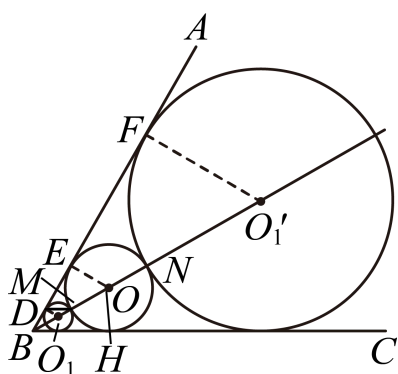
$\therefore \odot O_1$ 与 $\odot O$ 相交,

$$\therefore \frac{1}{3} < r < 3,$$

当 $r = 1$ 时, $\odot O_1$ 与 $\odot O$ 重合, 不合题意,

观察四个选项可知, $\odot O_1$ 的半径长可以是 2.

故选 B.



二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $2^{-1} =$ _____.

【答案】

$$\frac{1}{2}$$

【解析】

【分析】当 $a \neq 0$, p 为正整数时, $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

【详解】解: $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$.

8. 因式分解: $3b - 3b^3 =$ _____.

【答案】 $3b(1+b)(1-b)$

【解析】

【分析】先提公因式，再利用平方差公式法进行因式分解即可.

【详解】解: $3b - 3b^3 = 3b(1 - b^2) = 3b(1 + b)(1 - b)$.

9. 分式方程 $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x} = \frac{3}{x(x + 2)}$ 的解是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】先将分式方程化为整式方程求解，最后检验所得根是否使原分式方程分母不为零.

【详解】解: $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x} = \frac{3}{x(x + 2)}$,

对分母因式分解得 $\frac{x^2 - 1}{x(x + 2)} = \frac{3}{x(x + 2)}$,

方程两边同乘最简公分母 $x(x + 2)$ ，得 $x^2 - 1 = 3$

整理得 $x^2 = 4$

解得 $x_1 = 2, x_2 = -2$

检验: 当 $x = -2$ 时, $x(x + 2) = 0$ ，原分式方程分母为零,

因此 $x = -2$ 是增根, 舍去;

当 $x = 2$ 时, $x(x + 2) = 2 \times 4 = 8 \neq 0$ ，满足原分式方程分母不为零的要求.

因此原分式方程的解为 $x = 2$.

10. 不等式 $\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ -x + 1 \geq 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

【解析】

【分析】先分别解出不等式组中两个一元一次不等式的解集，再取两个解集的公共部分，即可得到原不等式组的解集.

【详解】解: $\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ -x + 1 \geq 0 \end{cases}$,

解不等式 $2x + 1 \geq 0$,

移项得 $2x \geq -1$,

系数化为 1 得 $x \geq -\frac{1}{2}$,

解不等式 $-x+1 \geq 0$,

移项得 $-x \geq -1$,

系数化为 1 得 $x \leq 1$,

取两个解集的公共部分, 可得原不等式组的解集为 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

11. 某科技园区调查发现, 园区每家企业平均每周使用生成式 AI 工具处理文档约 552000 次. 数据 552000 用科学记数法表示为_____.

【答案】 5.52×10^5

【解析】

【详解】解: $552000 = 5.52 \times 10^5$.

12. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x + (m-2) = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < \frac{17}{4}$

【解析】

【分析】根据方程有两个不相等的实数根, 直接得到判别式 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 即可求解本题.

【详解】解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x + (m-2) = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(m-2) > 0,$$

$$\text{解得: } m < \frac{17}{4}.$$

13. 商场抽奖箱里三个完全一样的小球里面装着纸条, 其中两个写着“谢谢参与”, 一个写着“小礼品一份”. 某顾客随机摸出两个小球, 都是“谢谢参与”的概率是_____.

【答案】

$$\frac{1}{3}$$

【解析】

【分析】先列举出随机摸出两个小球的所有等可能结果, 再找出两个都是“谢谢参与”的结果数, 根据概率公式求解即可.

率公式计算即可.

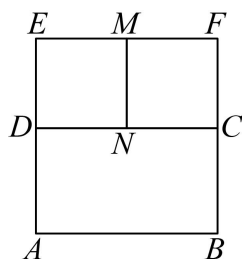
【详解】解: 记两个写有“谢谢参与”的小球为 A_1, A_2 , 写有“小礼品一份”的小球为 B

随机摸出两个小球, 所有等可能的结果为: $(A_1, A_2), (A_1, B), (A_2, B)$, 共 3 种

其中两个都是“谢谢参与”的结果有 1 种, 即 (A_1, A_2)

根据概率公式可得所求概率为 $\frac{1}{3}$.

14. 如图, 用 24 米铝型线材做成一个窗框 $ABFE$ (含内框 MN, DC), 窗框上方是两个全等的正方形 $DEMN$ 和 $CFMN$, 下方是矩形 $ABCD$. 如果正方形 $DEMN$ 的边长为 x 米, 那么下方矩形 $ABCD$ 的面积为_____平方米. (用含 x 的代数式表示)



【答案】

$$(24x - 9x^2)$$

【解析】

【分析】根据窗框上方是两个全等的正方形 $DEMN$ 和 $CFMN$, 得到 $EM = FM = ED = FC = x$, 求出 $AB = EF = EM + MF = 2x$, $AD = AE - DE = 12 - \frac{9}{2}x$, 即可求出矩形 $ABCD$ 的面积.

【详解】解: $\because$ 窗框上方是两个全等的正方形 $DEMN$ 和 $CFMN$,

$$\therefore EM = FM = ED = FC = x,$$

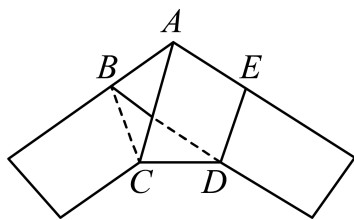
$$\therefore AB = EF = EM + MF = 2x,$$

$$\therefore AE = BF = \frac{1}{2}(24 - 3 \times 2x - x) = 12 - \frac{7}{2}x$$

$$\therefore AD = AE - DE = 12 - \frac{9}{2}x$$

$$\therefore \text{矩形 } ABCD \text{ 的面积为 } 2x \cdot \left(12 - \frac{9}{2}x\right) = 24x - 9x^2.$$

15. 如图, 用一条宽相等的足够长的纸条, 打一个结, 然后轻轻拉紧、压平就可以得到如图所示的正五边形 $ABCDE$, $\angle ABD$ 的度数_____.



【答案】 72° ##72 度

【解析】

【分析】 此题考查的是多边形的内角和及平行线的性质，利用多边形的内角和定理和平行线的性质即可解决问题，掌握计算公式是解题的关键.

【详解】 解：由题意可得，五边形 $ABCDE$ 是正五边形，

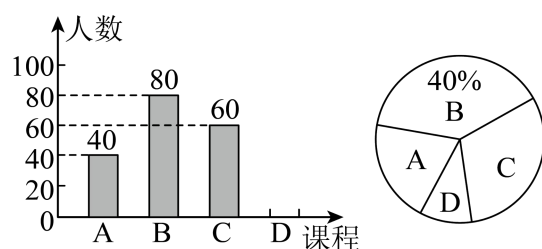
$$\therefore \angle EABC = \frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ,$$

$$\therefore AE \parallel BD,$$

$$\therefore \angle ABD = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ,$$

故答案为： 72° .

16. 某校为了开设学生喜欢的美育课程，随机抽取了部分学生进行调查，要求学生从书法、国画、合唱、水彩画（分别记为 A 、 B 、 C 、 D ）这四个课程中选择一个自己最喜爱的课程，并将调查结果绘制成如下两张不完整的统计图. 已知该校共有 1000 名学生，根据图中信息，请你估计选择“合唱”课程的学生大概有 _____ 人.



【答案】 300

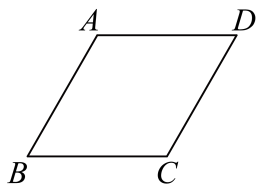
【解析】

【分析】 根据条形统计图可知 B 课程的人数，结合扇形统计图可知 B 课程的百分比，利用频数除以频率求出样本总容量，再计算 C 课程在样本中的频率，最后利用样本估计总体的思想计算全校选择“合唱”课程的学生人数.

【详解】 解：调查人数有： $80 \div 40\% = 200$ 人，

$$\text{选择“合唱”课程的学生大概有 } 1000 \times \frac{60}{200} = 300 \text{ 人.}$$

17. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别在边 AB 、 BC 上, 将菱形 $ABCD$ 沿着 EF 翻折, 使点 B 恰好与 $\triangle ACD$ 的重心 G 重合. 若菱形 $ABCD$ 的面积为 18, 则 $\triangle BEF$ 的面积为_____.



【答案】4

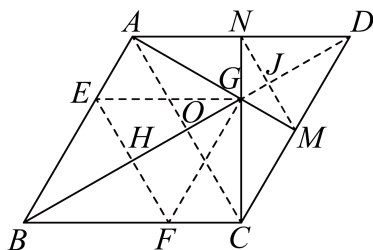
【解析】

【分析】根据相似可知三角形重心满足 $\frac{OG}{OD} = \frac{2}{3}$, 再根据菱形对角线性质, $\frac{BH}{GH} = 1$, 进而可知 $\frac{BH}{BO} = \frac{2}{3}$, 再根据相似三角形即可求解.

【详解】解: 取 AD 的中点 N , 连接 CN , 取 CD 的中点 M , 连接 AM 与 CN 交于点 G , 则点 G 为重心, 在菱形 $ABCD$ 中, 连接 BD ,

$\therefore O$ 为 AC 的中点,

$\therefore$ 点 G 在 BD 的线段上,



$$\therefore MN \parallel AC, \quad MN = \frac{1}{2} AC,$$

$$\therefore \angle ACG = \angle MNG, \angle NMG = \angle CAG, \quad DJ = \frac{1}{2} DO,$$

$\therefore \triangle NMG \sim \triangle CAG$, J 是 OD 的中点,

$$\therefore \frac{MN}{AC} = \frac{GJ}{OG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{OG}{OD} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{DG}{BD} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$$

$\therefore B$ 关于 EF 的对称点是 G ,

$$\therefore \frac{BH}{GH} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\therefore \frac{BH}{BO} = \frac{2}{3},$$

∵ 菱形 $ABCD$ 的面积为 18,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 18 = 9,$$

∵ $EF \parallel AC$,

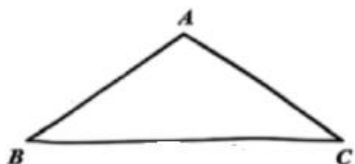
∴ $\angle BAO = \angle BEF, \angle BCA = \angle BFE$,

∴ $\triangle BEF \sim \triangle BAC$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BEF}} = \frac{BO^2}{BH^2} = \frac{9}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle BEF} = 4.$$

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5, BC = 8$, 点 O 在边 AB 上, 如果 $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的一边所在的直线相切, 且经过 $\triangle ABC$ 的一个顶点, 那么 OB 的长是_____.

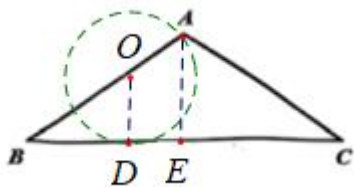


【答案】 $\frac{25}{8}$ 或 $\frac{120}{49}$

【解析】

【分析】分两种情况讨论, 当 $\odot O$ 与 BC 相切于点 D 时, 则 $OD \perp BC$, 设 $OB = x$, 则 $OA = OD = 5 - x$. 根据 $\sin \angle ABC = \frac{OD}{OB} = \frac{AE}{AB}$ 列出比例式, 求得 x 的值; 当 $\odot O$ 与 AC 相切于点 F 时, 则 $OF \perp AC$, 过点 B 作 $BG \perp AC$ 于点 G , 证明 $\triangle AOF \sim \triangle ABG$, 进而求得 x 的值, 即可求解.

【详解】解: 如图, 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E ,
当 $\odot O$ 与 BC 相切于点 D 时, 则 $OD \perp BC$



$$\therefore AB = AC = 5, BC = 8$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2} BC = 4$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

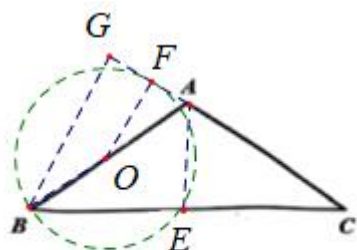
设 $OB = x$ ，则 $OA = OD = 5 - x$

$\because OD \perp BC, AE \perp BC$

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{OD}{OB} = \frac{AE}{AB}, \text{ 即 } \frac{5-x}{x} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore x = \frac{25}{8}$$

当 $\odot O$ 与 AC 相切于点 F 时，则 $OF \perp AC$ ，过点 B 作 $BG \perp AC$ 于点 G ，



$\because AB = AC$

$\therefore \angle ABC = \angle C$

$$\therefore BG = BC \cdot \sin C = 8 \times \frac{3}{5} = \frac{24}{5}$$

设 $OB = x$ ，则 $OF = OB = x$ ， $OA = AB - OB = 5 - x$ ，

$\because OF \parallel BG$

$\therefore \triangle AOF \sim \triangle ABG$

$$\therefore \frac{OF}{BG} = \frac{OA}{AB}$$

$$\therefore \frac{x}{\frac{24}{5}} = \frac{5-x}{5}$$

$$\text{解得: } x = \frac{120}{49}$$

综上所述， OB 的长是 $\frac{25}{8}$ 或 $\frac{120}{49}$

三. (本大题共 6 题，满分 78 分)

19. 先化简，再求值：已知代数式 $\left(1 + \frac{1}{m-2}\right) \div \frac{m^2 - 2m + 1}{2m - 4}$ ，其中 $m = \sqrt{3}$ 。

【答案】 $\frac{2}{m-1}, \sqrt{3}+1$

【解析】

【分析】先将括号内式子通分，变分式除法为分式乘法，约分化简，最后将 $m = \sqrt{3}$ 代入求值。

【详解】解：原式 $= \frac{m-2+1}{m-2} \div \frac{(m-1)^2}{2(m-2)}$

$$= \frac{m-1}{m-2} \cdot \frac{2(m-2)}{(m-1)^2}$$

$$= \frac{2}{m-1},$$

将 $m = \sqrt{3}$ 代入，得：

$$\text{原式} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1.$$

20. 已知函数 $y = \sqrt{2-x}$ ，请解决下列问题：

- (1) 请按照列表、描点、连线的步骤，在平面直角坐标系 xOy 中画出函数的大致图像；
- (2) 如果一条直线与坐标轴的交点和函数 $y = \sqrt{2-x}$ 图象与坐标轴的两个交点完全相同，那么这条直线的表达式是_____.
- (3) $A(m, n)$ 是函数 $y = \sqrt{2-x}$ 图象上的点，如果 $n < 2$ ，那么 m 的取值范围是_____.

【答案】(1) 见解析 (2) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$

(3) $-2 < m \leq 2$

【解析】

【分析】(1) 先列表，再描点，最后连线画出函数图象即可；

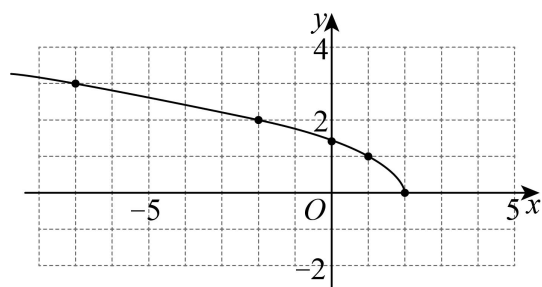
(2) 根据题意可得所求的直线经过点 $(2, 0)$ 和 $(0, \sqrt{2})$ ，据此利用待定系数法求解即可；

(3) 根据函数图象可得答案.

【小问 1 详解】

解：列表如下：

x	...	-7	-2	0	1	2	...
$y = \sqrt{2-x}$	...	3	2	$\sqrt{2}$	1	0	...



【小问 2 详解】

解：由 (1) 可知函数 $y = \sqrt{2-x}$ 与 x 轴交于点 $(2, 0)$ ，与 y 轴交于点 $(0, \sqrt{2})$ ，

设经过点 $(2, 0)$ 和 $(0, \sqrt{2})$ 的直线的表达式为 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 2k + b = 0 \\ b = \sqrt{2} \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \sqrt{2} \end{cases},$$

$\therefore$ 经过点 $(2, 0)$ 和 $(0, \sqrt{2})$ 的直线的表达式为 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$ ，

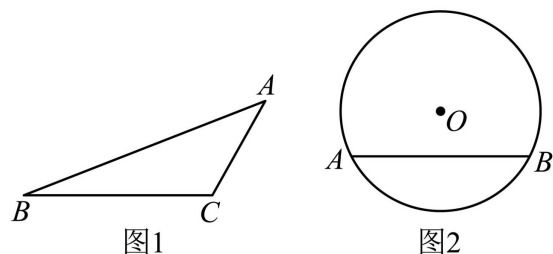
即所求的直线的表达式为 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$ ；

【小问 3 详解】

解：由函数图象可知，当 $y = \sqrt{2-x} < 2$ 时， $-2 < x \leq 2$ ，

$\therefore$ 如果 $n < 2$ ，那么 m 的取值范围是 $-2 < m \leq 2$ 。

21. 如果一个三角形一条边上的高等于这条边的一半，那么这个三角形叫做“半高底”三角形，这条边叫做这个三角形的“半底”。



(1) 如图 1， $\triangle ABC$ 是以 BC 为“半底”的“半高底”三角形，已知 $AC = 2\sqrt{29}$ ， $\tan B = \frac{5}{12}$ ，求 BC 的长；

(2) 如图 2， AB 是 $\odot O$ 的一条弦，用无刻度直尺和圆规作图，在圆上确定一个点 C ，使得 $\triangle ABC$ 是以 AB

为“半底”的“半高底”三角形（保留作图痕迹，无需写作法）.

【答案】(1) $BC = 20$

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D ，设 $BC = 2x$ ，则 $AD = x$ ，根据正切的定义，得出 BD ，进而求得 CD ，在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，勾股定理建立方程，即可求解；

(2) 作 AB 的垂直平分线交 AB 于点 E ，在 AB 的垂直平分线上截取 $DE = AE$ ，过点 D 作 $DC \parallel AB$ 交 $\odot O$ 于点 C ，则 ABC 是以 AB 为“半底”的“半高底”三角形.

【小问 1 详解】

解：如图，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D ，

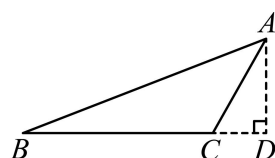


图1

依题意 $AD = \frac{1}{2}BC$

设 $BC = 2x$ ，则 $AD = x$

$$\because \tan B = \frac{AD}{BD} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore BD = \frac{12AD}{5} = \frac{12}{5}x$$

$$\therefore CD = BD - BC = \frac{12}{5}x - 2x = \frac{2}{5}x,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $AC^2 = CD^2 + AD^2$

$$\therefore \left(\frac{2}{5}x\right)^2 + x^2 = (2\sqrt{29})^2$$

解得： $x = 10$ （负值舍去）

$$\therefore BC = 20$$

【小问 2 详解】

解：如图所示，作 AB 的垂直平分线交 AB 于点 E ，在 AB 的垂直平分线上截取 $DE = AE$ ，过点 D 作 $DC \parallel AB$ 交 $\odot O$ 于点 C ，则点 C ， ABC 即为所求

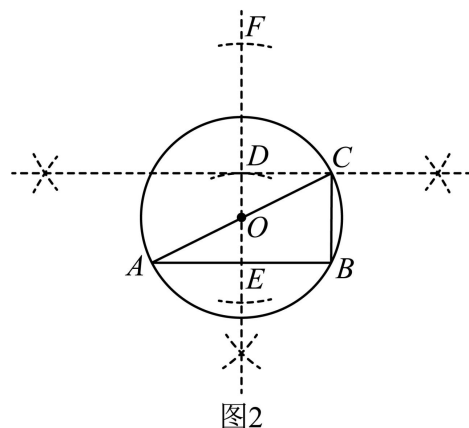
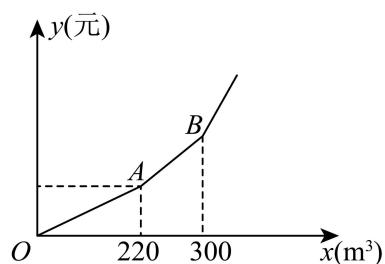


图2

22. 上海市居民自来水水费由供水费和污水处理费两部分组成，污水处理量由于损耗按照用水量的90%核定计算，污水处理费统一单价为2元/ m^3 。小户型家庭供水费按年用水量分三档计费，收费标准如下表，每户每年应缴自来水水费 y （元）与用水量 x （ m^3 ）关系如图所示。

分类	第1档	第2档	第3档
用水量 x （ m^3 ）	不超过220	超过220不超过300的部分	超过300的部分
供水费单价（元/ m^3 ）	2.25	n	6.99
污水处理费（元/ m^3 ）	2.00		

根据上述信息，解答下列问题：



- 第1档的自来水水费 1m^3 的单价为_____元；图中点A的纵坐标为_____；
- 小华家去年的年用水量为 250m^3 ，共缴纳水费1065元。通过计算推出 n 的值为_____元；
- 已知小明家去年共缴水费2234元，求小明家去年的年用水量。

【答案】（1）4.25，891

（2）4

（3） 400m^3

【解析】

【分析】(1) 根据水费的单价=供水费单价+污水处理费单价求解即可；求出用水量为 220m^3 的水费即可；

(2) 根据共缴水费1065元列出方程求解即可；

(3) 先判断 $x > 300$ ，然后根据共缴水费 2234 元列出方程求解即可。

【小问1 详解】

解：第1档的自来水水费 1m^3 的单价为 $2.25 + 2.00 = 4.25$ 元，

$$\therefore 220 \times 2.25 + 220 \times 90\% \times 2 = 891,$$

$\therefore$ 图中点 A 的纵坐标为 891；

【小问2 详解】

解：根据题意，得 $220 \times 2.25 + (250 - 220)n + 250 \times 90\% \times 2 = 1065$ ，

解得 $n = 4$ ；

【小问3 详解】

解：当 $x = 300$ 时， $y = 220 \times 2.25 + (300 - 220) \times 4 + 300 \times 90\% \times 2 = 1355$ ，

$$\therefore 2234 > 1355,$$

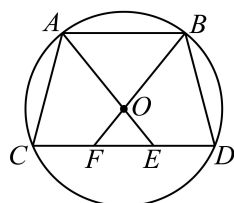
$$\therefore x > 300,$$

$$\therefore 1355 + 6.99(x - 300) + 2 \times 90\%(x - 300) = 2234,$$

解得 $x = 400$ ，

答：小明家去年的年用水量 400m^3 。

23. 如图，已知 AB 、 CD 为 $\odot O$ 的两条弦， $AB < CD$ ，连接 AO 、 BO 并延长交弦 CD 于点 E 、 F ，且 $CF = DE$ 。



(1) 求证： $AB \parallel CD$ ；

(2) 如果 $AC^2 = OA \cdot AE$ ，求证： $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

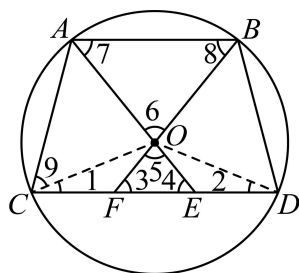
【解析】

【分析】(1) 连接 OC, OD ，先证明 $\triangle CFO \cong \triangle DEO$ (SAS)，则 $OE = OF$ ，然后根据等边对等角以及三角形内角和定理证明 $\angle 4 = \angle 7$ ，即可证明平行；

(2) 先证明 $\triangle CAO \sim \triangle EAC$ ，再证明 $\triangle OAC \cong \triangle OAB$ (AAS) 即可.

【小问 1 详解】

证明：连接 OC, OD



$$\because OC = OD$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2$$

$$\because CF = DE$$

$$\therefore \triangle CFO \cong \triangle DEO \text{ (SAS)}$$

$$\therefore OE = OF$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 = \frac{180^\circ - \angle 5}{2},$$

$$\because OA = OB$$

$$\therefore \angle 7 = \angle 8 = \frac{180^\circ - \angle 6}{2}$$

$$\because \angle 5 = \angle 6$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 7$$

$$\therefore AB \parallel CD;$$

【小问 2 详解】

证明： $\because AC^2 = OA \cdot AE$

$$\therefore \frac{AC}{OA} = \frac{AE}{AC}$$

$$\because \angle CAO = \angle EAC$$

$$\therefore \triangle CAO \sim \triangle EAC$$

$$\therefore \angle 9 = \angle 4,$$

$$\because \angle 4 = \angle 7 = \angle 8$$

$$\therefore \angle 9 = \angle 7 = \angle 8$$

$$\therefore OA = OC$$

$$\therefore \angle 9 = \angle OAC = \angle 7 = \angle 8,$$

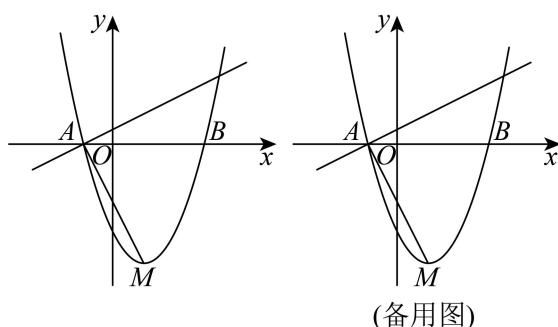
$$\therefore OA = OA$$

$$\therefore \triangle OAC \cong \triangle OAB (\text{AAS})$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{AC}.$$

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $C_1: y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(3, 0)$, 顶点为 M . 直线 l 经过点 A , 且 $l \perp AM$.



(1) 求直线 l 的表达式;

(2) 已知抛物线 $C_2: y = ax^2 + mx + n$ 也经过 A 、 B 两点, 且开口向下, 顶点为 N . 设 D 为抛物线 C_2 与直线 l 的交点, 连接 AN 、 DN 、 DM , 当四边形 $ANDM$ 是梯形时, 求抛物线 C_2 的表达式.

【答案】(1) 直线 l 的表达式 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

(2) 抛物线 $C_2: y = \frac{-7-3\sqrt{5}}{8}(x^2 - 2x - 3)$ 或 $y = -\frac{5}{4}(x^2 - 2x - 3)$

【解析】

【分析】本题主要考查二次函数与几何的结合, 涉及待定系数法求解析式, 求一次函数的解析式, 相似三角形的判定和性质, 两点之间的距离, 以及梯形的性质, 解题的关键是应用分类讨论思想.

(1) 根据待定系数法求得抛物线 $C_1: y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$, 即可知点 $M(1, -4)$, 过点 M 作 $MC \perp x$ 轴, 交 x 轴于点 C , 交直线 l 于点 N , 可证明 $\triangle NAC \sim \triangle AMC$, 有 $\frac{NC}{AC} = \frac{AC}{MC}$, 结合两点之间距离求得 $NC = 1$, 利用待定系数法即可求得直线 l 的表达式;

(2) 根据题意的 $a < 0$ ，利用待定系数法求得抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3a$ ，则点 $N(1, -4a)$ ，联立方程求得点 $D\left(\frac{6a+1}{2a}, \frac{8a+1}{4a}\right)$ ，结合梯形的性质若 $AN \parallel DM$ ，过点 N 作 $NC \perp x$ 轴于点 C ，过点 M 作平行于 x 轴的直线与过点 D 作 $DE \perp ME$ 轴于点 E ，线段 DM 与 x 轴交于点 F ，则点 $E\left(\frac{6a+1}{2a}, -4\right)$ ，且 $\triangle NAC \sim \triangle DME$ ，有 $\frac{AC}{NC} = \frac{ME}{DE}$ ，两点之间距离公式求得 a （当 a 值接近 0 时不满足题干要求的梯形字母顺序，故舍去）；若 $ND \parallel AM$ ，过点 M 作 $MG \perp x$ 轴于点 G ，过点 D 作平行于 x 轴的直线与过点 N 作 $NH \perp DH$ 轴于点 H ，同理可得 $\triangle NHD \sim \triangle MGA$ ，点 $H\left(1, \frac{8a+1}{4a}\right)$ ，求得 a 即可。

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $C_1: y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(3, 0)$ ，

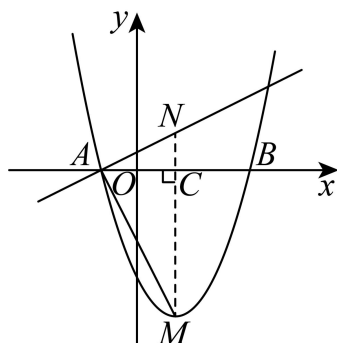
$$\therefore \begin{cases} (-1)^2 - b + c = 0 \\ 3^2 + 3b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = -2 \\ c = -3 \end{cases},$$

则抛物线 $C_1: y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ ，

∴ 点 $M(1, -4)$ ，

如图，过点 M 作 $MC \perp x$ 轴，交 x 轴于点 C ，交直线 l 于点 N ，



则 $\angle ACM = \angle ACN = 90^\circ$ ， $\angle MAC + \angle AMC = 90^\circ$ ，

∴ $l \perp AM$ ，

∴ $\angle NAC + \angle CAM = 90^\circ$ ，

∴ $\angle NAC = \angle AMC$ ，

则 $\triangle NAC \sim \triangle AMC$,

$$\therefore \frac{NC}{AC} = \frac{AC}{MC},$$

$\therefore$ 点 $M(1, -4)$ 和点 $A(-1, 0)$,

$$\therefore CM = 4, \quad AC = 2,$$

$$\text{则 } \frac{NC}{2} = \frac{2}{4}, \text{ 解得 } NC = 1,$$

$\therefore$ 点 $N(1, 1)$

$\therefore$ 设直线 l 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$\therefore$ 直线 l 经过点 A 和点 N ,

$$\therefore \begin{cases} -k + b = 0 \\ k + b = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

则直线 l 的表达式 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$;

【小问 2 详解】

解: $\therefore$ 抛物线 $C_2: y = ax^2 + mx + n$ 开口向下,

$$\therefore a < 0,$$

$\therefore$ 抛物线 $C_2: y = ax^2 + mx + n$ 经过 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 两点,

$$\therefore \begin{cases} a \times (-1)^2 + m \times (-1) + n = 0 \\ a \times 3^2 + 3m + n = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m = -2a \\ n = -3a \end{cases},$$

则抛物线 $C_2: y = ax^2 - 2ax - 3a = a(x-1)^2 - 4a$,

$\therefore$ 抛物线 $C_2: y = ax^2 + mx + n$ 顶点为 N ,

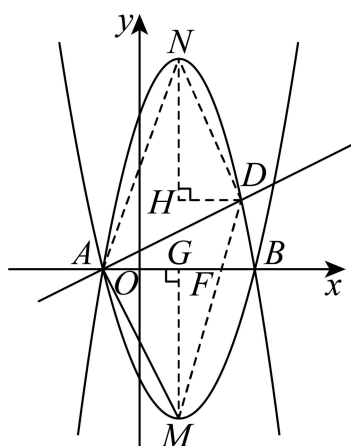
$$\therefore N(1, -4a),$$

$$\text{则 } \frac{2}{-4a} = \frac{\frac{4a+1}{2a}}{6 + \frac{1}{4a}},$$

$$\text{解得 } a_1 = \frac{-7-3\sqrt{5}}{8}, \quad a_2 = \frac{-7+3\sqrt{5}}{8} \quad (\text{构不成梯形, 舍去}),$$

$$\text{那么, 抛物线 } C_2: y = \frac{-7-3\sqrt{5}}{8}(x^2 - 2x - 3);$$

②若 $ND \parallel AM$, 过点 M 作 $MG \perp x$ 轴于点 G , 过点 D 作平行于 x 轴的直线与过点 N 作 $NH \perp DH$ 轴于点 H ,



同理可得 $\triangle NHD \sim \triangle MGA$, 点 $H\left(1, \frac{8a+1}{4a}\right)$, 点 $M(1, -4)$,

$$\therefore \frac{NH}{MG} = \frac{HD}{GA}, \quad AG = 2, \quad MG = 4, \quad NH = -4a - \frac{8a+1}{4a} = -\frac{16a^2 + 8a + 1}{4a}, \quad DH = \frac{6a+1}{2a} - 1 = \frac{4a+1}{2a},$$

$$\text{则 } \frac{-\frac{16a^2 + 8a + 1}{4a}}{4} = \frac{\frac{4a+1}{2a}}{2},$$

$$\text{解得 } a_1 = -\frac{5}{4}, \quad a_2 = -\frac{1}{4} \quad (\text{构不成梯形, 舍去}),$$

$$\text{那么, 抛物线 } C_2: y = -\frac{5}{4}(x^2 - 2x - 3).$$

25. 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 在边 CD 上, 且 $CE = 3DE$, $AB = 2AE$, 连接 AE 、 BE .

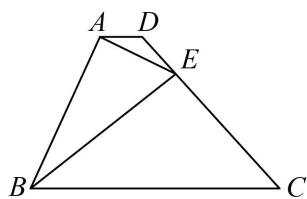


图1

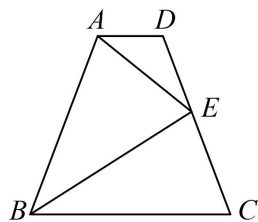


图2

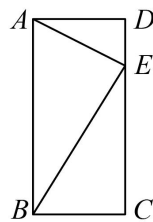


图3

(1) 如图 1, 求证: $\angle AEB = \angle ABC$;

(2) 如图 2, 当 $AB = CD = BE$ 时, 求 $\frac{AD}{BC}$ 的值;

(3) 如图 3, 当四边形 $ABCD$ 为矩形且 $AB = 8$ 时, 点 O 在线段 BE 上, 且 $\odot O$ 截 AB 、 CD 两边所得的两条弦相等. 如果 $\odot O$ 与 $\odot C$ 的公共弦所在直线恰好经过点 B , $\odot C$ 的半径为 3, 求此公共弦的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{3}{7}$

(3) $2\sqrt{6}$

【解析】

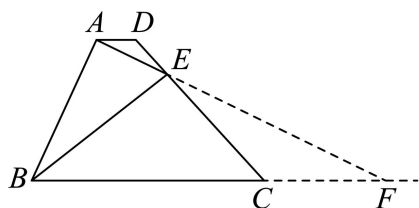
【分析】(1) 延长 AE 交 BC 延长线于点 F , 由 $AD \parallel BC$, 可得 $\triangle ADE \sim \triangle FCE$, 再证明 $\triangle BAE \sim \triangle FAB$, 即可证明结论;

(2) 延长 AE 交 BC 延长线于点 G , 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H , 过点 D 作 $DM \perp BC$ 于点 M , 过点 E 作 $EN \perp BC$ 于点 N , 同理 (1) 可得 $CG = 3AD$, $BG = 2BE$, 设 $AD = x$, $AB = CD = BE = 4a$, 则 $CG = 3x$, $BG = 8a$, $DE = a$, $CE = 3a$, 求出 BN , NE , 在 $Rt\triangle BNE$ 中, 利用勾股定理即可求解;

(3) 过点 O 作 $OH \perp CD$ 于点 H , 连接 OC , CF , 设 FG 与 OC 交于点 P , 由条件先可得 $AD = BC = 2\sqrt{3}$, $BE = 4\sqrt{3}$, 再由 $\odot O$ 截 AB 、 CD 两边所得的两条弦相等, 可得 $OH = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = \sqrt{3}$, 再证明 $\triangle OBC$ 是等边三角形, 可得 $\angle OCB = 60^\circ$, 再由 FG 中 $\odot O$, $\odot C$ 的公共弦, 可得 CE 垂直平分 FG , 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: 如图, 延长 AE 交 BC 延长线于点 F ,



$\therefore AD \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle FCE,$$

$$\therefore \frac{DE}{CE} = \frac{AE}{FE},$$

$$\therefore CE = 3DE,$$

$$\therefore \frac{AE}{FE} = \frac{DE}{CE} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore FE = 3AE,$$

$$\therefore AF = AE + EF = 4AE,$$

$$\therefore AB = 2AE,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}, \quad \frac{AB}{AF} = \frac{2AE}{4AE} = \frac{1}{2}, \quad \text{即} \quad \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF},$$

$$\therefore \angle BAE = \angle FAB,$$

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle FAB,$$

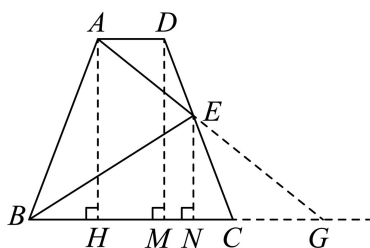
$$\therefore \angle ABE = \angle AFB,$$

$$\therefore \angle AEB = 180^\circ - \angle ABE - \angle BAE, \quad \angle ABF = 180^\circ - \angle AFB - \angle FAB,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle ABC.$$

【小问 2 详解】

解：如图，延长 AE 交 BC 延长线于点 G ，过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H ，过点 D 作 $DM \perp BC$ 于点 M ，过点 E 作 $EN \perp BC$ 于点 N ，



同理 (1) 可得， $\triangle ADE \sim \triangle GCE$ ，

$$\therefore CE = 3DE,$$

$$\therefore \frac{AD}{CG} = \frac{DE}{CE} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore CG = 3AD,$$

同理 (1) 可得， $\triangle BAE \sim \triangle GAB$ ，

$$\therefore \frac{BE}{BG} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BG = 2BE,$$

设 $AD = x$, $AB = CD = BE = 4a$, 则 $CG = 3x$, $BG = 8a$, $DE = a$, $CE = 3a$,

$\therefore AD \parallel BC$, $AH \perp BC$, $DM \perp BC$,

$\therefore$ 四边形 $AHMD$ 是矩形,

$\therefore HM = AD = x$, $DM = AH$,

在 $Rt\triangle ABH$ 和 $Rt\triangle DCM$ 中

$$\begin{cases} AB = DC \\ AH = DM \end{cases},$$

$\therefore Rt\triangle ABH \cong Rt\triangle DCM$ (直角三角形全等的判定定理),

$\therefore BH = CM$,

$\therefore BH + CM = BG - CG - HM = 8a - 3x - x = 8a - 4x$,

$\therefore CM = BH = \frac{1}{2}(8a - 4x) = 4a - 2x$,

在 $Rt\triangle ABH$ 中, $DM^2 = AH^2 = AB^2 - BH^2 = (4a)^2 - (4a - 2x)^2 = 16xa - 4x^2$,

$\therefore DM \perp BC$, $EN \perp BC$,

$\therefore \triangle CEN \sim \triangle CDM$,

$$\therefore \frac{CE}{CD} = \frac{EN}{DM} = \frac{CN}{CM},$$

$$\therefore \frac{CE^2}{CD^2} = \frac{EN^2}{DM^2} = \frac{CN^2}{CM^2}, \text{ 即 } \frac{(3a)^2}{(4a)^2} = \frac{EN^2}{16xa - 4x^2} = \frac{CN^2}{(4a - 2x)^2},$$

$$\therefore EN^2 = 9xa - \frac{9}{4}x^2, \quad CN = 3a - \frac{3}{2}x,$$

$$\therefore BN = BG - CG - CN = 8a - 3x - \left(3a - \frac{3}{2}x\right) = 5a - \frac{3}{2}x,$$

在 $Rt\triangle BNE$ 中, $BN^2 + NE^2 = BE^2$,

$$\therefore \left(5a - \frac{3}{2}x\right)^2 + 9xa - \frac{9}{4}x^2 = (4a)^2,$$

解得 $a = \frac{2}{3}x$,

$$\therefore BC = BG - CG = 8a - 3x = 8 \times \frac{2}{3}x - 3x = \frac{7}{3}x,$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{x}{\frac{7}{3}x} = \frac{3}{7}.$$

$$\therefore \angle BPC = 90^\circ, \quad FG = 2FP,$$

$$\therefore \angle PBC = 90^\circ - \angle OCB = 30^\circ,$$

$$\therefore CP = \frac{1}{2}BC = \sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle PCF$ 中, $FP = \sqrt{CF^2 - CP^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6},$

$$\therefore FG = 2FP = 2\sqrt{6}.$$