

九年级数学学科练习

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列实数中, 无理数是 ()

A. $\sqrt{16}$

B. $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

C. $(\pi + 2)^0$

D. $\frac{8}{7}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 先根据二次根式的性质和零指数幂进行化简, 再根据无理数的定义逐项进行判断即可.

【详解】 A. $\sqrt{16} = 4$, 是整数, 是有理数, 不是无理数, 故不符合题意;

B. $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ 是无理数, 故符合题意;

C. $(\pi + 2)^0 = 1$, 是整数, 是有理数, 不是无理数, 故不符合题意;

D. $\frac{8}{7}$, 是分数, 是有理数, 不是无理数, 故不符合题意;

故选: B.

【点睛】 本题考查了二次根式的性质, 零指数幂及无理数的定义, 熟练掌握无限不循环小数为无理数是解题的关键.

2. 计算 $x^3 \cdot x^2$ 的结果是 ()

A. x

B. x^5

C. x^6

D. x^9

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据同底数的幂相乘的法则即可求解.

【详解】 解: $x^3 \cdot x^2 = x^5$.

故选：B.

【点睛】本题主要考查了同底数幂相乘的计算法则，正确理解法则是关键.

3. 如果非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 互为相反向量，那么下列结论中错误的是 ()

A. $\vec{a} \parallel \vec{b}$

B. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

C. $\vec{a} + \vec{b} = 0$

D. $\vec{a} = -\vec{b}$

【答案】C

【解析】

【分析】非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 互为相反向量，则非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 大小相等，方向相反，据此分析即可.

【详解】 $\because$ 非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 互为相反向量，

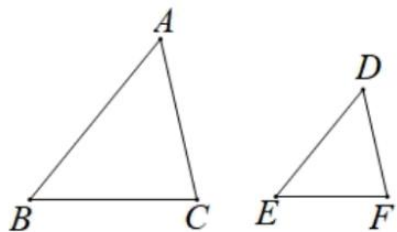
$$\therefore \vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{a} = -\vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|,$$

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}, \text{ 则 C 选项错误,}$$

故选：C.

【点睛】本题考查相反向量的概念，属基础题，正确理解定义是解决问题的关键.

4. 如图，已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ ，下列条件一定能推得它们相似的是 ()



A. $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$

B. $\angle A = \angle D$ 且 $\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{EF}$

C. $\angle A = \angle B, \angle D = \angle E$

D. $\angle A = \angle E$ 且 $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

【答案】A

【解析】

【分析】三角形相似的判定方法有 (1) 平行于三角形一边的直线和其他两边或两边的延长线相交，所构成的三角形与原三角形相似；

(2) 如果两个三角形对应边的比相等且夹角相等，这 2 个三角形也可以说明相似 (简叙为：两边对应成比

例且夹角相等，两个三角形相似.);

(3) 如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例,那么这两个三角形相似 (简叙为:三边对应成比例，两个三角形相似.);

(4) 如果两个三角形的两个角分别对应相等 (或三个角分别对应相等)，则有两个三角形相似 (简叙为两角对应相等，两个三角形相似)。

【详解】A 选项符合判定方法 (4)，符合题意.

B 选项相等的角不是对应边的夹角，不符合题意.

C 选项相等的角不是对应角，不符合题意.

D 选项相等的角不是对应角，不符合题意.

【点睛】 本题考查的是三角形相似的判定方法，解题的关键是牢记判定方法.

5. 如果 $0^\circ < \angle A < 45^\circ$ ，那么 $\sin A$ 与 $\cos A$ 的差 ()

- A. 大于 0 B. 小于 0 C. 等于 0 D. 不能确定

【答案】 B

【解析】

【分析】 $\cos A = \sin(90^\circ - \angle A)$ ，再根据正弦函数随着角的增大而增大进行分析即可.

【详解】 $\because \cos A = \sin(90^\circ - \angle A)$ ，正弦函数随着角的增大而增大，

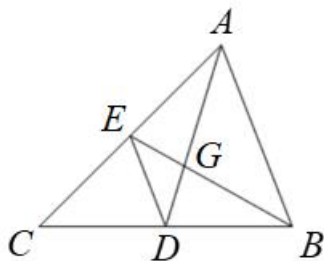
$\therefore$ 当 $0^\circ < \angle A < 45^\circ$ 时， $45^\circ < 90^\circ - \angle A < 90^\circ$ ，

$\therefore \sin A < \cos A = \sin(90^\circ - \angle A)$ ，即 $\sin A - \cos A < 0$ ，

故选 B.

【点睛】 本题考查了锐角三角函数的增减性，正弦函数值随着角的增大而增大.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，中线 AD 与中线 BE 相交于点 G ，联结 DE . 下列结论成立的是 ()



- A. $DG = \frac{1}{3} AG$ B. $\frac{BG}{EG} = \frac{DE}{AB}$ C. $\frac{S_{\triangle DEG}}{S_{\triangle AGB}} = \frac{1}{4}$ D. $\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle AGB}} = \frac{1}{2}$

【答案】 C

【解析】

【分析】由中线 AD 与中线 BE 得出 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，推出 $\triangle DEG \sim \triangle ABG$ ， $\triangle CDE \sim \triangle CBA$ ，由相似三角形的性质即可解决问题.

【详解】 $\because$ 中线 AD 与中线 BE 相交于点 G ,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore DE \parallel AB, DE = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore \angle DEG = \angle ABG, \angle DGE = \angle AGB, \angle CDE = \angle CBA,$$

$$\therefore \triangle DEG \sim \triangle ABG,$$

$$\therefore \frac{DG}{AG} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}, \frac{BG}{EG} = \frac{AB}{DE},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DEG}}{S_{\triangle AGB}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad DG = \frac{1}{2} AG, \quad \frac{GB}{BE} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AGB}}{S_{\triangle AEB}} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AE = EC,$$

$$\therefore S_{\triangle AEB} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle AGB} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore DE \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABG}} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{结论正确的是 } \frac{S_{\triangle DEG}}{S_{\triangle AGB}} = \frac{1}{4},$$

故选: C.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质, 熟练掌握知识点是解题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. $\frac{1}{3}$ 的倒数是_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据乘积是 1 的两个数叫做互为倒数，求解.

【详解】 解： $\because \frac{1}{3} \times 3 = 1$,

$\therefore \frac{1}{3}$ 的倒数是 3.

故答案为： 3.

【点睛】 本题考查倒数的概念，掌握定义正确计算是关键.

8. 计算： $\frac{2a}{a+2} + \frac{4}{a+2} =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 分式分母相同，直接加减，最后约分.

【详解】 解： $\frac{2a}{a+2} + \frac{4}{a+2}$
 $= \frac{2a+4}{a+2}$
 $= \frac{2(a+2)}{a+2}$

$= 2$

【点睛】 本题考查了分式的加减，掌握同分母分式的加减法法则是解决本题的关键.

9. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ，则 $\frac{a}{a+b}$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$ ## 0.4

【解析】

【分析】 根据 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ，设 $a = 2t$ ， $b = 3t$ ，代入即可得出答案.

【详解】 解： $\because \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 设 $a = 2t$ ， $b = 3t$

$\therefore \frac{a}{a+b} = \frac{2t}{2t+3t} = \frac{2}{5}$,

故答案为： $\frac{2}{5}$.

【点睛】 本题考查了比例的计算，设未知数是本题的关键.

10. 抛物线 $y = (x+1)^2 - 2$ 与 y 轴的交点坐标是_____.

【答案】 $(0, -1)$

【解析】

【分析】 求出 $x=0$ 时 y 的值即可得到抛物线与 y 轴的交点坐标.

【详解】 解：当 $x=0$ 时， $y = (x+1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$,

所以抛物线与 y 轴的交点坐标是 $(0, -1)$,

故答案为： $(0, -1)$.

【点睛】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，根据 y 轴上点的横坐标为 0 求出交点的纵坐标是解题的关键.

11. 请写出一个以直线 $x=3$ 为对称轴，且在对称轴左侧部分是下降的抛物线，这条抛物线的表达式可以是_____. (只要写出一个符合条件的抛物线表达式)

【答案】 $y = (x-3)^2 + 1$ ，答案不唯一

【解析】

【分析】 本题答案不唯一，根据顶点式写抛物线的解析式，只需要对称轴为 $x=3$ ，开口向上即可.

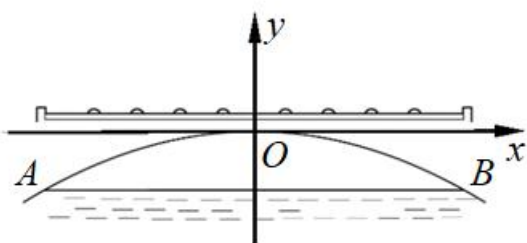
【详解】 解：根据题意可得满足条件抛物线解析式可为：

$$y = (x-3)^2 + 1$$

故答案为： $y = (x-3)^2 + 1$ ，答案不唯一

【点睛】 此题考查了二次函数的性质，当抛物线开口向上时，在对称轴左侧， y 随 x 增大而减小，根据二次函数性质解答是关键.

12. 有一座拱桥的截面图是抛物线形状，在正常水位时，桥下水面 AB 宽 20 米，拱桥的最高点 O 距离水面 AB 为 3 米，如图建立直角坐标平面 xOy ，那么此抛物线的表达式为_____.



【答案】 $y = -\frac{3}{100}x^2$ ## $y = -0.03x^2$

【解析】

【分析】 设抛物线解析式为 $y = ax^2$ ，由图象可知，点 B 的坐标 $(10, -3)$ ，利用待定系数法求解即可.

【详解】 设抛物线解析式为 $y = ax^2$ ，

由图象可知，点 B 的坐标为 $(10, -3)$ ，

代入解析式得 $-3 = 100a$ ，

解得 $a = -\frac{3}{100}$ ，

$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y = -\frac{3}{100}x^2$ ，

故答案为： $y = -\frac{3}{100}x^2$.

【点睛】 本题考查了二次函数的应用，准确理解题意，并能够用待定系数法求二次函数解析式是解题的关键.

13. 一水库的大坝横断面是梯形，坝顶、坝底分别记作 BC 、 AD ，且迎水坡 AB 的坡度为 $1:2.5$ ，背水坡 CD 的坡度为 $1:3$ ，则迎水坡 AB 的坡角_____背水坡 CD 的坡角. (填“大于”或“小于”)

【答案】 大于

【解析】

【分析】 先根据迎水坡 AB 的坡度为 $1:2.5$ ，背水坡 CD 的坡度为 $1:3$ ，得出 $\tan A = \frac{1}{2.5}$ ， $\tan D = \frac{1}{3}$ ，根据 $\frac{1}{2.5} > \frac{1}{3}$ ，即可得出 $\angle A > \angle D$.

【详解】 解： $\because$ 迎水坡 AB 的坡度为 $1:2.5$ ，背水坡 CD 的坡度为 $1:3$ ，

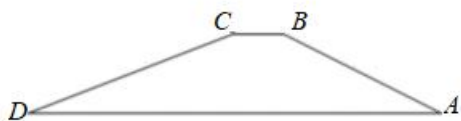
$\therefore \tan A = \frac{1}{2.5}$ ， $\tan D = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore \frac{1}{2.5} > \frac{1}{3}$ ，

$\therefore \angle A > \angle D$ ，

即迎水坡 AB 的坡角大于背水坡 CD 的坡角.

故答案为： 大于.



【点睛】 本题主要考查了三角函数的应用，解题的关键是熟练掌握三角形函数正切值与角度的关系.

14. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的相似比为 $\frac{1}{5}$, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 的相似比为 $\frac{2}{3}$, 那么 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 的相似比为_____.

【答案】 $\frac{10}{3}$

【解析】

【分析】 设 $AB = m$, 根据相似三角形的对应边成比例分别表示出 $A_1B_1 = 5m, A_2B_2 = \frac{3}{2}m$, 继而求解即可.

【详解】 设 $AB = m$,

$$\because \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2,$$

$$\therefore \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{1}{5}, \frac{AB}{A_2B_2} = \frac{2}{3},$$

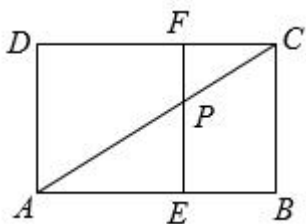
$$\therefore A_1B_1 = 5m, A_2B_2 = \frac{3}{2}m,$$

$$\therefore \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{5m}{\frac{3}{2}m} = \frac{10}{3},$$

故答案为: $\frac{10}{3}$.

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质，能够用同一个字母表示 A_1B_1, A_2B_2 的长度是解题的关键.

15. 在矩形 $ABCD$ 内作正方形 $AEFD$ (如图所示), 矩形的对角线 AC 交正方形的边 EF 于点 P . 如果点 F 恰好是边 CD 的黄金分割点 ($DF > FC$), 且 $PE = 2$, 那么 $PF =$ _____.



【答案】 $\sqrt{5}-1$

【解析】

【分析】 结合已知条件易证得 $\triangle PFC \sim \triangle PEA$, $DF = AE$, 则 $\frac{PF}{PE} = \frac{CF}{AE} = \frac{CF}{DF}$, 根据点 F 恰好是边 CD

的黄金分割点可得 $\frac{PF}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 求解即可.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，四边形 $AEFD$ 为正方形，

$$\therefore \angle PFC = \angle PEA = 90^\circ, DF = AE,$$

$$\therefore \angle CPF = \angle APE,$$

$$\therefore \triangle PFC \sim \triangle PEA,$$

$$\therefore \frac{PF}{PE} = \frac{CF}{AE} = \frac{CF}{DF},$$

$\therefore$ 点 F 恰好是边 CD 的黄金分割点 ($DF > FC$), $PE = 2$,

$$\therefore \frac{PF}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore PF = \sqrt{5} - 1.$$

【点睛】 本题考查了正方形的性质，相似三角形的判定和性质，黄金分割，熟练掌握黄金分割比的值是解题的关键.

16. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 6, AC = 5$ ，点 D, E 分别在边 AB, AC 上，当 $AD = 4, \angle ADE = \angle C$ 时，

$$\frac{DE}{BC} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】 根据两角分别相等的两个三角形相似可证明 $\triangle ABC \sim \triangle AED$ ，再根据相似三角形的对应边成比例可得 $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$ ，代入求解即可.

【详解】 在 $\triangle ABC$ 中， $\therefore \angle A = \angle A, \angle ADE = \angle C$ ，

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC},$$

$$\therefore AD = 4, AC = 5,$$

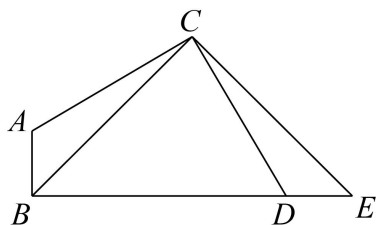
$$\therefore \frac{4}{5} = \frac{DE}{BC},$$

故答案为: $\frac{4}{5}$.

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质，熟练掌握知识点是解题的关键.

17. 如图， $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 后得 $\triangle DEC$ ，如果点 B, D, E 在一直线上，且 $\angle BDC = 60^\circ, BE = 3$ ，

那么 A, D 两点间的距离是_____.

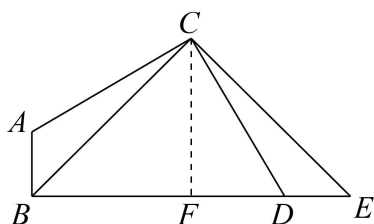


【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 过点 C 作 $CF \perp BE$ 交于点 F ，由旋转的性质得出 $\triangle ACD, \triangle BCE$ 是等腰直角三角形，再求出 $\angle FCD = 30^\circ$ ，利用含 30° 角的直角三角形的性质和等腰直角三角形的性质进行求解即可。

【详解】 过点 C 作 $CF \perp BE$ 交于点 F ，



$$\therefore \angle CFD = 90^\circ,$$

$\because \triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 后得 $\triangle DEC$,

$\therefore \angle ACD = \angle BCE = 90^\circ, AC = CD, BC = CE$ ，即 $\triangle ACD, \triangle BCE$ 是等腰直角三角形，

$$\because BE = 3,$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}BE = \frac{3}{2},$$

$$\because \angle BDC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FCD = 30^\circ,$$

$$\therefore DF = \frac{\sqrt{3}}{3}CF = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore CD = 2DF = \sqrt{3},$$

$$\therefore AD = \sqrt{2}CD = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6},$$

故答案为： $\sqrt{6}$.

【点睛】 本题考查了旋转的性质，等腰直角三角形的性质，含 30° 角的直角三角形的性质，熟练掌握知识点是解题的关键.

18. 定义：把二次函数 $y = a(x+m)^2 + n$ 与 $y = -a(x-m)^2 - n$ ($a \neq 0, m, n$ 是常数) 称作互为“旋转函数”. 如

果二次函数 $y = x^2 + \frac{3}{2}bx - 2$ 与 $y = -x^2 - \frac{1}{4}cx + c$ (b, c 是常数) 互为“旋转函数”, 写出点 $P(b, c)$ 的坐标_____.

【答案】 $(-\frac{1}{3}, 2)$

【解析】

【分析】 根据题意, 把所给的两个二次函数转化成旋转函数即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } y &= x^2 + \frac{3}{2}bx - 2 \\ &= (x + \frac{3}{4}b)^2 - 2 - \frac{9}{16}b^2 \\ y &= -x^2 - \frac{1}{4}cx + c \\ &= -(x^2 + \frac{1}{4}cx) + c \\ &= -(x + \frac{1}{8}c)^2 + c + \frac{1}{64}c^2 \\ \therefore \begin{cases} \frac{3}{4}b = -\frac{1}{8}c \\ -2 - \frac{9}{16}b^2 + c + \frac{1}{64}c^2 = 0 \end{cases} \\ \therefore \text{解得: } \begin{cases} b = -\frac{1}{3} \\ c = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

故答案为: $(-\frac{1}{3}, 2)$

【点睛】 本题考查的是学生对二次函数解析式的变形能力, 解题的关键是根据题意去变换形式, 细心谨慎.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\sqrt{\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ} + \left(\frac{\cot 45^\circ - \sin 45^\circ}{\tan 45^\circ} \right)^2$.

【答案】 $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$

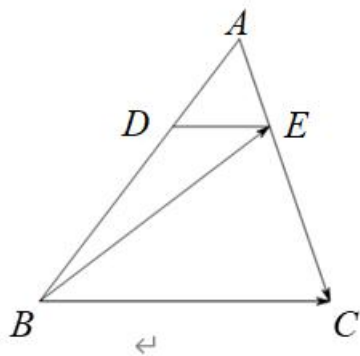
【解析】

【分析】 把特殊角的三角函数值代入进行计算即可.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】解：原式} &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1}\right)^2 \\
 &= \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} + 1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \\
 &= \frac{3 - \sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

【点睛】本题考查了特殊角的三角函数值的混合运算，熟练掌握特殊角的三角函数值是解题的关键.

20. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，且 $BD = 2AD$ ， $AE = \frac{1}{2}EC$.



(1) 求证： $DE \parallel BC$ ；

(2) 设 $\overrightarrow{BE} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，试用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$ 。

【答案】(1) 见解析.

$$(2) \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$$

【解析】

【分析】(1) 由平行线分线段成比例进行证明.

(2) 由三角形法则求得 $\overrightarrow{EC}$ ，然后由 AE 与 EC 的比例关系求得向量 $\overrightarrow{AC}$ 。

【小问 1 详解】

证明： $BD = 2AD$ ， $AE = \frac{1}{2}EC$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore DE \parallel BC$$

【小问 2 详解】

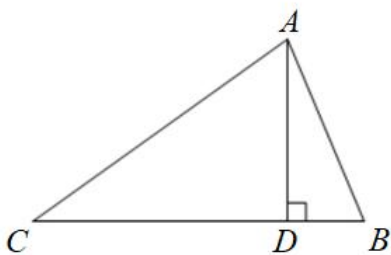
$$\because \overrightarrow{BE} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BE} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$$

【点睛】 本题主要考查了平面向量，解题的关键在于掌握平行线的判定和三角形法则.

21. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B$ 为锐角， AD 是 BC 边上的高， $\cos B = \frac{5}{13}$ ， $AB = 13, BC = 21$.



(1) 求 AC 的长;

(2) 求 $\angle BAC$ 的正弦值.

【答案】 (1) AC 长为 20.

(2) $\angle BAC$ 的正弦 $\frac{63}{65}$.

【解析】

【分析】 (1) 由 $\angle B$ 的余弦求出 BD 的长，得到 DC 长，由勾股定理即可解决问题.

(2) 过 C 作 $CH \perp AB$ 于 H ，由三角形的面积公式求出 CH 的长即可解决问题.

【小问 1 详解】

$$\because \cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{13}, AB = 13,$$

$$\therefore BD = 13 \times \frac{5}{13} = 5,$$

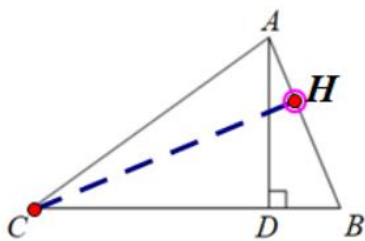
$$\therefore CD = BC - BD = 21 - 5 = 16$$

$$\because AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$$

【小问 2 详解】

作 $CH \perp AB$ 于 H



$$\because \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} BC \cdot AD$$

$$\therefore 13CH = 21 \times 12$$

$$\therefore CH = \frac{252}{13}$$

$$\therefore \angle BAC \text{ 的正弦值是 } \frac{CH}{AC} = \frac{\frac{252}{13}}{20} = \frac{63}{65}$$

【点睛】 本题考查的是解直角三角形，关键是作出恰当的辅助线.

22. 有一把长为 6 米的梯子 AB ，将它的上端 A 靠着墙面，下端 B 放在地面上，梯子与地面所成的角记为 α ，地面与墙面互相垂直（如图 1 所示），一般满足 $50^\circ \leq \alpha \leq 75^\circ$ 时，人才能安全地使用这架梯子.

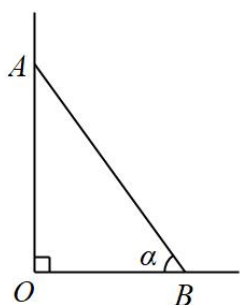


图1

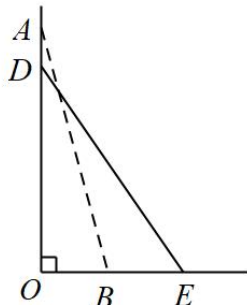


图2

- (1) 当梯子底端 B 距离墙面 2.5 米时，求 α 的度数（结果取整数），此时人是否能安全地使用这架梯子？
- (2) 当人能安全地使用这架梯子，且梯子顶端 A 离开地面最高时，梯子开始下滑，如果梯子顶端 A 沿着墙面下滑 1.5 米到墙面上的 D 点处停止，梯子底端 B 也随之向后平移到地面上的点 E 处（如图 2 所示），此时人是否能安全使用这架梯子？请说明理由.

【答案】 (1) 人能安全地使用这架梯子，理由见解析

(2) 不能安全地使用这架梯子，理由见解析

【解析】

【分析】 (1) 先求出 $\angle B$ 的余弦值，再根据锐角三角函数关系求出 α 的度数即可；

(2) 由题意得 $\angle ABO = 75^\circ$ ， $\angle O = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ，先利用正弦值求出 AO 的长度，继而求出 DO 的长度，再根据锐角三角函数关系求出 α 的度数，判断即可.

【小问 1 详解】

由题意得 $\angle O = 90^\circ$, $OB = 2.5$, $AB = 6$,

$$\therefore \cos \angle B = \frac{OB}{AB} = \frac{2.5}{6} = \frac{5}{12},$$

查表得 $\angle \alpha = 65^\circ$,

一般满足 $50^\circ \leq \alpha \leq 75^\circ$ 时, 人才能安全地使用这架梯子,

$\therefore$ 人能安全地使用这架梯子;

【小问 2 详解】

不能安全地使用这架梯子, 理由如下:

由题意得 $\angle ABO = 75^\circ$, $\angle O = 90^\circ$, $AB = 6$,

$$\sin 75^\circ = \frac{AO}{AB} = \frac{AO}{6} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

$$\therefore AO = \frac{3}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \approx 5.80 \text{ 米},$$

$$\therefore AD = 1.5,$$

$$\therefore OD = 4.3 \text{ 米},$$

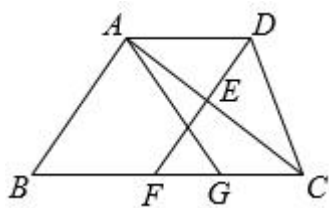
$$\therefore \sin \angle DEO = \frac{OD}{DE} = \frac{4.3}{6} \approx 0.72,$$

查表得 $\angle DEO \approx 46^\circ$,

$\therefore$ 不在安全范围之内.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用, 准确理解题意, 熟练掌握知识点是解题的关键.

23. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, DF 分别交对角线 AC 、底边 BC 于点 E 、 F , 且 $AD \cdot AC = AE \cdot BC$.



(1) 求证: $AB \parallel FD$;

(2) 点 G 在底边 BC 上, $BC=10$, $CG=3$, 连接 AG , 如果 $\triangle AGC$ 与 $\triangle EFC$ 的面积相等, 求 FC 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\sqrt{30}$

【解析】

【分析】 (1) 根据题意及平行线的性质可证明 $\triangle AED \sim \triangle CAB$, 再根据相似三角形的性质及平行线的判定

即可得证;

(2) 根据三角形的面积公式及相似三角形的性质即可得出结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because AD \cdot AC = AE \cdot BC$

$$\therefore AD : AE = BC : AC$$

$$\because AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle DAE = \angle ACB$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle CAB$$

$$\therefore \angle AED = \angle CAB$$

$$\therefore AB \parallel FD$$

【小问 2 详解】

$$\text{根据题意得, } \frac{S_{\triangle AGC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{GC}{BC} = \frac{3}{10}$$

$$\because EF \parallel AB$$

$$\therefore \triangle EFC \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle EFC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{CF}{BC}\right)^2 = \frac{CF^2}{100}$$

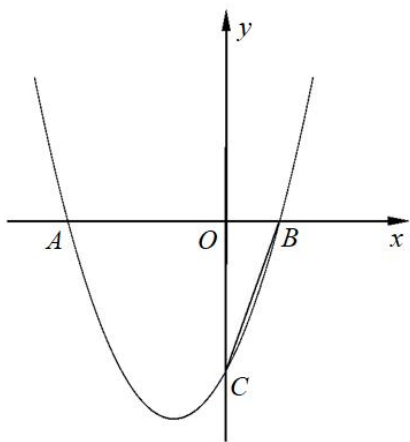
$\because \triangle AGC$ 和 $\triangle EFC$ 面积相等

$$\therefore \frac{3}{10} = \frac{CF^2}{100}$$

$$\text{解得: } CF = \sqrt{30}$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质及判定, 三角形面积公式等相关知识, 根据题意表达三角形的面积比, 得出方程是解题的关键.

24. 如图所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 6$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 A 、 B (点 A 在点 B 的左侧), 交 y 轴于点 C , 联结 BC , $\angle ABC$ 的余切值为 $\frac{1}{3}$, $AB = 8$, 点 P 在抛物线上, 且 $PO = PB$.



(1) 求上述抛物线的表达式;

(2) 平移上述抛物线, 所得新抛物线过点 O 和点 P , 新抛物线的对称轴与 x 轴交于点 E .

①求新抛物线的对称轴;

②点 F 在新抛物线对称轴上, 且 $\angle EOF = \angle PCO$, 求点 F 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

(2) ①对称轴为直线 $x = 4$; ② $F_1\left(4, \frac{8}{5}\right), F_2\left(-4, \frac{8}{5}\right)$

【解析】

【分析】 (1) 先通过解直角三角形求出点 A 、 B 的坐标, 直接利用待定系数法求函数解析式即可;

(2) ①设平移后的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + mx + n$, 求出点 $P\left(1, -\frac{7}{2}\right)$, 再利用待定系数法求函数解析式即可;

②过点 P 作 $PN \perp y$ 轴于 N , 则 $ON = \frac{7}{2}, PN = 1$, 通过证明 $\triangle PNC \sim \triangle FEO$, 利用相似三角形的性质计算即可.

【小问 1 详解】

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 6$ ($a \neq 0$), 当 $x = 0$ 时, $y = -6$,

$\therefore C(0, -6)$, 即 $OC = 6$,

在 $\text{Rt}\triangle OBC$ 中, $\cot \angle ABC = \frac{OB}{OC} = \frac{1}{3}$,

$\therefore OB = 2$,

$\therefore B(2, 0)$,

$\therefore AB = 8$,

$\therefore OA = 6$,

$$\therefore A(-6, 0),$$

$$\text{把 } A、B \text{ 的坐标代入 } y = ax^2 + bx - 6, \text{ 得 } \begin{cases} 0 = 4a + 2b - 6 \\ 0 = 36a - 6b - 6 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6;$$

【小问 2 详解】

$$\text{①设平移后的解析式为 } y = \frac{1}{2}x^2 + mx + n,$$

$$\therefore PO = PB,$$

$\therefore P$ 在 BO 的中垂线上,

$$\therefore P\left(1, -\frac{7}{2}\right),$$

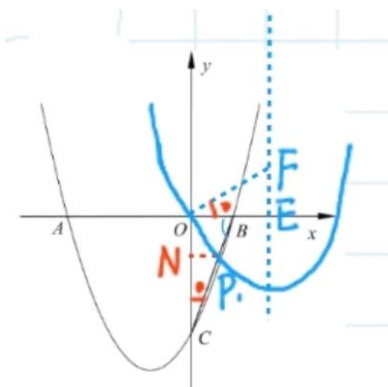
$$\text{将 } O(0, 0), P \text{ 坐标代入 } y = \frac{1}{2}x^2 + mx + n, \text{ 得 } \begin{cases} n = 0 \\ \frac{1}{2} + m + n = -\frac{7}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m = -4 \\ n = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \text{新的抛物线的解析式为 } y = \frac{1}{2}x^2 - 4x,$$

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = 4$;

$$\text{②过点 } P \text{ 作 } PN \perp y \text{ 轴于 } N, \text{ 则 } ON = \frac{7}{2}, PN = 1,$$



$$\therefore CN = 6 - \frac{7}{2} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore E(4,0),$$

$$\therefore OE = 4,$$

$$\therefore \angle EOF = \angle PCN, \angle OEF = \angle CNP,$$

$$\therefore \triangle PNC \sim \triangle FEO,$$

$$\therefore \frac{EF}{OE} = \frac{PN}{CN}, \text{ 即 } \frac{EF}{4} = \frac{1}{\frac{5}{2}},$$

$$\therefore EF = \frac{8}{5},$$

$$\therefore F_1\left(4, \frac{8}{5}\right), F_2\left(-4, \frac{8}{5}\right).$$

【点睛】 本题考查了二次函数图象与性质，二次函数图象的平移，二次函数与角相等的问题，相似三角形的判定和性质，熟练掌握知识点，准确作出辅助线是解题的关键.

25. 在等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$ ，点 D 为射线 CB 上一动点 (点 D 不与点 B 、 C 重合)，以 AD 为腰且在 AD 的右侧作等腰直角 $\triangle ADF$ ， $\angle ADF = 90^\circ$ ，射线 AB 与射线 FD 交于点 E ，联结 BF 。

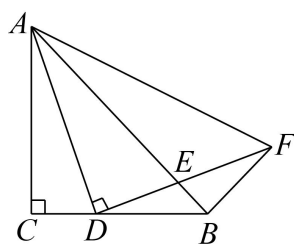
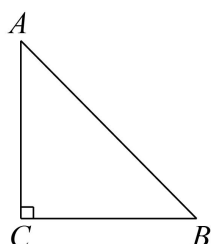


图 1



备用图

(1) 如图 1 所示，当点 D 在线段 CB 上时，

①求证： $\triangle ACD \sim \triangle ABF$ ；

②设 $CD = x$, $\tan \angle BFD = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出 x 的取值范围；

(2) 当 $AB = 2BE$ 时，求 CD 的长.

【答案】 (1) ①见解析； ② $y = \frac{4-x}{4+x} (0 < x < 4)$

(2) $CD = 3 + \sqrt{17}$

【解析】

【分析】 (1) ①由 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADF$ 是等腰直角三角形，证明 $\triangle ACB \sim \triangle ADF$ ，由相似三角形的性质和角相等直接证明即可； ②过点 D 作 $DH \perp AE$ 于点 H ，通过证明 $\triangle DHB$ 是等腰直角三角形和相似三角形的性质求出 $\tan \angle DAE = \tan \angle BFD = y = \frac{DH}{AH}$ ，设 $CD = x$ ，则 $DB = 4 - x$ ，根据等腰直角三角形的性质

表示出 DH, AH 的长度，代入整理即可；

(2) 分两种情况：当点 D 在线段 BC 上时，当点 D 在线段 CB 的延长线上时，利用相似三角形的性质和正切函数建立方程，进行求解即可。

【小问 1 详解】

① $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADF$ 是等腰直角三角形，

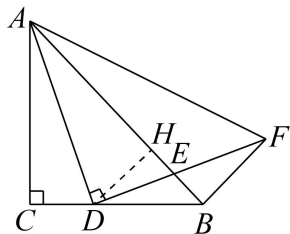
$\therefore \triangle ACB \sim \triangle ADF$ ， $\angle CAB = \angle DAF$ ，

$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AF}$ ， $\angle CAB - \angle DAB = \angle DAF - \angle DAB$ ，

$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AF}$ ， $\angle CAD = \angle BAF$ ，

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABF$ ；

② 过点 D 作 $DH \perp AE$ 于点 H ，如图，



$\because \angle ABC = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle DHB$ 是等腰直角三角形，

$\because \triangle ACD \sim \triangle ABF$ ，

$\therefore \angle C = \angle ABF = 90^\circ$ ，

$\because \angle ADF = 90^\circ$ ， $\angle AED = \angle FEB$ ，

$\therefore \angle DAE = \angle BFE$ ，

$\therefore \tan \angle DAE = \tan \angle BFD = y = \frac{DH}{AH}$ ，

设 $CD = x$ ，则 $DB = 4 - x$ ，

$\therefore DH = \frac{\sqrt{2}}{2}(4 - x) = BH$ ，

$\because AC = BC = 4$ ，

$\therefore AB = 4\sqrt{2}$ ，

$\therefore AH = AB - BH = 4\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(4 - x) = 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，

$$\therefore y = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(4-x)}{2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x} = \frac{4-x}{4+x} (0 < x < 4);$$

【小问 2 详解】

①当点 D 在线段 BC 上时,

$$\because AB = 2BE = \sqrt{2}AC = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore BE = 2\sqrt{2},$$

$$\because \triangle ACD \sim \triangle ABF,$$

$$\therefore \frac{CD}{BF} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore CD = x,$$

$$\therefore BF = \sqrt{2}x,$$

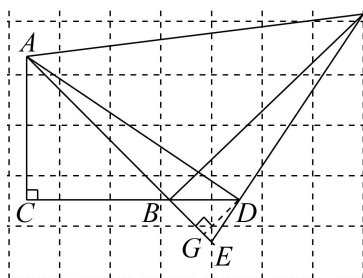
$$\therefore \tan \angle BFD = y = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}x} = \frac{2}{x} = \frac{4-x}{4+x},$$

$$\text{整理得 } x^2 - 2x + 8 = 0,$$

$$\because \Delta < 0, \text{ 方程无解,}$$

$\therefore$ 这种情况无意义;

②当点 D 在线段 CB 的延长线上时, 如图,



$$\because BE = 2\sqrt{2}, \quad \tan \angle DFB = \frac{2}{x},$$

过点 D 作 $DG \perp AB$ 于 G ,

$$\therefore BG = DG = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 2\sqrt{2}, \quad AG = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \tan \angle BAD = \frac{DG}{AG} = \frac{x-4}{x+4} = \frac{2}{x},$$

$$\text{整理得 } x^2 - 6x - 8 = 0, \text{ 解得 } x = 3 + \sqrt{17} \text{ (负舍),}$$

$$\therefore CD = 3 + \sqrt{17}.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质，解直角三角形，解一元二次方程，能够准确添加辅助线进行分析是解题的关键.

