

2024 学年第二学期第二次初三数学学科学情调研

(考试时间: 100 分钟, 满分 150 分)

2025.5

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;

2. 除第一、二大题外, 其余各题无特别说明, 都必须写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列计算中, 正确的是 ()

A. $a^2 \cdot a^4 = a^8$

B. $(a^3)^4 = a^7$

C. $(ab)^4 = ab^4$

D. $a^6 \div a^3 = a^3$

【答案】D

【解析】

【分析】直接利用积的乘方、幂的乘方运算法则以及同底数幂的乘除运算法则分别计算得出答案.

【详解】A. $a^2 \cdot a^4 = a^{2+4} = a^6$, 故此选项计算错误,

B. $(a^3)^4 = a^{3 \times 4} = a^{12}$, 故此选项计算错误,

C. $(ab)^4 = a^4 b^4$, 故此选项计算错误,

D. $a^6 \div a^3 = a^{6-3} = a^3$, 故此选项计算正确.

故选 D.

【点睛】此题主要考查了积的乘方、幂的乘方运算以及同底数幂的乘除运算, 正确掌握相关运算法则是解题关键.

2. 单项式 $-2a^2b$ 的系数和次数分别是 ()

A. -2 和 2

B. 2 和 2

C. -2 和 3

D. 2 和 3

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了单项式的系数、次数, 熟练掌握单项式的系数和次数的定义是解题的关键. 根据单项式的系数和次数的定义即可求解.

【详解】解: 单项式 $-2a^2b$ 的系数是 -2, 次数是 3.

故选: C.

3. 下列关于 x 的方程一定有实数解的是 ()

A. $x^2 - mx - 1 = 0$

B. $ax = 3$

C. $\sqrt{x-6} \cdot \sqrt{4-x} = 0$

D. $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据一元二次方程根的判别式、二次根式有意义的条件、分式方程的增根逐一判断即可得.

【详解】A. $x^2 - mx - 1 = 0$ 中 $\Delta = m^2 + 4 > 0$, 一定有两个不相等的实数根, 符合题意;

B. $ax = 3$ 中当 $a = 0$ 时, 方程无解, 不符合题意;

C. 由 $\begin{cases} x-6 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases}$ 可解得不等式组无解, 不符合题意;

D. $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$ 有增根 $x = 1$, 此方程无解, 不符合题意;

故选 A.

【点睛】本题主要考查方程的解, 解题的关键是掌握一元二次方程根的判别式、二次根式有意义的条件、分式方程的增根.

4. 如果正十边形的边长为 a , 那么它的半径是 ()

A. $\frac{a}{\sin 36^\circ}$

B. $\frac{a}{\cos 36^\circ}$

C. $\frac{a}{2\sin 18^\circ}$

D. $\frac{a}{2\cos 18^\circ}$

【答案】C

【解析】

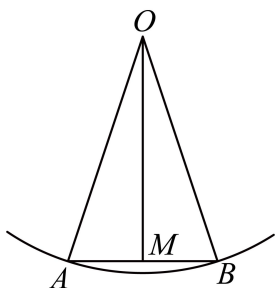
【分析】如图, 画出图形, 在直角三角形 OAM 中, 直接利用三角函数即可得到 OA.

【详解】如图, 正十边形的中心角 $\angle AOB = 360^\circ \div 10 = 36^\circ$, $AB = a$

$\therefore \angle AOM = \angle BOM = 18^\circ$, $AM = MB = \frac{1}{2}a$;

$\therefore OA = \frac{AM}{\sin \angle OAM} = \frac{a}{2\sin 18^\circ}$

故选 C.



【点睛】本题考查三角函数, 能够画出图形, 找到正确的三角函数关系是解题关键.

5. 已知 $\odot O$ 的半径 3cm, 直线 l 上有一点到圆心 O 的距离为 3cm, 那么直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系是 ()

A. 相切

B. 相交

C. 相离或相切

D. 相切或相交

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了判断直线和圆的位置关系，熟练掌握直线和圆的位置关系是解题的关键．比较圆心 O 到直线 l 上的距离与 $\odot O$ 的半径大小关系，即可得出结论．

【详解】解： $\because$ 直线 l 上有一点到圆心 O 的距离为 3cm ，

$\therefore$ 圆心 O 到直线 l 上的距离 $d \leq 3\text{cm}$ ，

$\because \odot O$ 的半径 $r = 3\text{cm}$ ，

$\therefore d \leq r$ ，

当 $d = r$ 时，直线 l 与 $\odot O$ 相切；

当 $d < r$ 时，直线 l 与 $\odot O$ 相交；

$\therefore$ 直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系是相切或相交．

故选：D．

6. 已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ (b, c 为常数) 命题①：该函数的图像经过点 $(-1, 0)$ ；命题②：该函数的图像经过点 $(-3, 0)$ ；命题③：该函数的图像与 y 轴的交点位于 x 轴的下方；命题④：该函数的图像的对称轴为直线 $x = -1$ ．如果这四个命题中只有一个命题是假命题，那么这个假命题是 ()

A. 命题①

B. 命题②

C. 命题③

D. 命题④

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了判断命题真假、二次函数的图像与性质、求二次函数的解析式、抛物线与坐标轴的交点，熟练掌握相关知识点是解题的关键．先假设命题①和④都是真命题，得出 $y = x^2 + 2x + 1$ ，分析可得此时命题②和③都是假命题，不符合题意，所以命题①和④中有一个是假命题，则命题②和③都是真命题，再分命题①是真命题、命题④是真命题两种情况讨论，即可得出答案．

【详解】解：假设命题①和④都是真命题，

则二次函数的图像经过点 $(-1, 0)$ ，且对称轴为直线 $x = -1$ ，

$\therefore$ 二次函数的顶点为 $(-1, 0)$ ，

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ，

$\therefore$ 当 $x = -3$ 时， $y = 4 \neq 0$ ；当 $x = 0$ 时， $y = 1$ ；

∴ 该函数的图像不经过点 $(-3, 0)$ ；且该函数的图像与 y 轴的交点位于 x 轴的上方，

∴ 命题②和③都是假命题，不符合题意，

∴ 命题①和④中有一个是假命题，

又∵ 四个命题中只有一个命题是假命题，

∴ 命题②和③都是真命题；

设命题①是真命题，

则该函数的图像经过点 $(-1, 0)$ 和 $(-3, 0)$ ，

代入到 $y = x^2 + bx + c$ ，得 $\begin{cases} 1 - b + c = 0 \\ 9 - 3b + c = 0 \end{cases}$ ，

解得： $\begin{cases} b = 4 \\ c = 3 \end{cases}$ ，

∴ 二次函数的解析式为 $y = x^2 + 4x + 3$ ，

当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，

∴ 该函数的图像与 y 轴的交点位于 x 轴的上方，即命题③为假命题，不符合题意；

设命题④是真命题，

则该函数的图像经过点 $(-3, 0)$ ，且对称轴为直线 $x = -1$ ，

则有 $\begin{cases} -\frac{b}{2} = -1 \\ 9 - 3b + c = 0 \end{cases}$ ，

解得： $\begin{cases} b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$ ，

∴ 二次函数的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$ ，

∴ 当 $x = -1$ 时， $y = -4 \neq 0$ ；当 $x = 0$ 时， $y = -3$ ，

∴ 该函数的图像不经过点 $(-1, 0)$ ；该函数的图像与 y 轴的交点位于 x 轴的下方

∴ 命题①是假命题，命题③是真命题，符合题意；

∴ 综上所述，这个假命题是命题①。

故选：A.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 分解因式： $x^2 - 8x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x(x-8)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，利用提公因式法因式分解即可求解，掌握因式分解的方法是解题的关键.

【详解】 解： $x^2 - 8x = x(x-8)$,

故答案为： $x(x-8)$.

8. 函数 $y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x > 1$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质和分式的意义，被开方数大于或等于0，分母不等于0，可以求出 x 的范围. 本题考查了函数自变量的取值范围. 函数自变量的范围一般从三个方面考虑：(1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；(2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为0；(3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数非负.

【详解】 解：根据题意得： $x-1 > 0$,

解得： $x > 1$.

故答案为： $x > 1$.

9. 方程 $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-2} = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查无理方程，解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解，在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法常用的方法有：乘方法，配方法，因式分解法，设辅助元素法，利用比例性质法等.

两边平方得出关于 x 的整式方程，解之求得 x 的值，再根据二次根式有意义的条件得出符合方程的 x 的值，可得答案.

【详解】 解： $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-2} = 0$

两边平方得 $(x-2)(x-1) = 0$

则 $x-2 = 0$ 或 $x-1 = 0$

解得： $x = 2$ 或 $x = 1$

$$\text{又} \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$$

解得: $x \geq 2$,

$$\therefore x = 2,$$

故答案为: $x = 2$.

10. 一组数据: 2, 2, 5, 5, 6, 那么这组数据的方差是_____.

【答案】 $\frac{14}{5}$

【解析】

【分析】 根据题意先求出这组数的平均数是 4, 再根据方差公式求解即可

【详解】 解: $\because \bar{x} = \frac{1}{5} (2+2+5+5+6) = 4,$

$$\begin{aligned} \therefore S^2 &= \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2] \\ &= \frac{1}{5} [(4-2)^2 + (4-2)^2 + (4-5)^2 + (4-5)^2 + (4-6)^2] \\ &= \frac{14}{5}, \end{aligned}$$

故答案为: $\frac{14}{5}$.

【点睛】 本题考查了方差: 一般地设 n 个数据, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$, 则方差 $S^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$, 它反映了一组数据的波动大小, 方差越大, 波动性越大, 反之也成立.

11. 布袋中有五个大小一样的球, 分别写有 $2.\dot{2}\dot{7}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{27}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{29}{11}$ 这五个实数, 从布袋中任意摸出一个球, 那么摸出写有无理数的球的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】 先判断无理数的个数, 在用无理数的个数除以总个数

【详解】 解: $\because$ 无理数有 $\sqrt{3}$, $\frac{\pi}{3}$

由总数是 5, 无理数可能出现的情况有 2 种

$$\therefore P(\text{摸出写有无理数的球}) = \frac{2}{5}$$

故答案为: $\frac{2}{5}$

【点睛】 本题考查古典概率. 熟练识别无理数是关键. 常见的无理数有: 带 π 的数是无理数, 开方开不尽的数是无理数.

12. 已知方程 $\frac{x}{x^2-1} - \frac{1-x^2}{2x} = 3$, 如果设 $y = \frac{x}{x^2-1}$, 那么原方程转化为关于 y 的整式方程为_____.

【答案】 $2y^2 - 6y + 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程、换元法解一元二次方程, 熟练掌握换元法是解题的关键. 设 $y = \frac{x}{x^2-1}$, 将原方程转化为关于 y 的方程, 再对关于 y 的方程去分母整理即可得出答案.

【详解】 解: $\because y = \frac{x}{x^2-1}$,

$$\therefore -\frac{1-x^2}{2x} = \frac{x^2-1}{2x} = \frac{1}{2y},$$

$$\because \text{方程 } \frac{x}{x^2-1} - \frac{1-x^2}{2x} = 3,$$

$$\therefore \text{方程转化为关于 } y \text{ 的方程为 } y + \frac{1}{2y} = 3,$$

$$\text{整理得: } 2y^2 - 6y + 1 = 0,$$

$$\therefore \text{原方程转化为关于 } y \text{ 的整式方程为 } 2y^2 - 6y + 1 = 0.$$

$$\text{故答案为: } 2y^2 - 6y + 1 = 0.$$

13. 如果抛物线 $y = (a-1)x^2 - 1$ (a 为常数) 不经过第二象限, 那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < 1$

【解析】

【分析】 根据二次函数图像位置与系数的关系可知知道此函数图像开口向下, 即可得到答案.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y = (a-1)x^2 - 1$ (a 为常数) 不经过第二象限,

又由表达式知其顶点坐标为 $(0, -1)$,

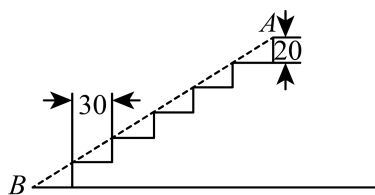
$\therefore$ 此图像开口向下, 即 $a-1 < 0$,

$$\therefore a < 1,$$

故答案为: $a < 1$.

【点睛】 此题考查二次函数图像位置与系数的关系, 难度一般.

14. 如图，某幢楼的楼梯每一级台阶的高度为 20 厘米，宽度为 30 厘米，那么斜面 AB 的坡度为_____.



【答案】 1: 1.5

【解析】

【分析】 根据坡度的概念计算，得到答案.

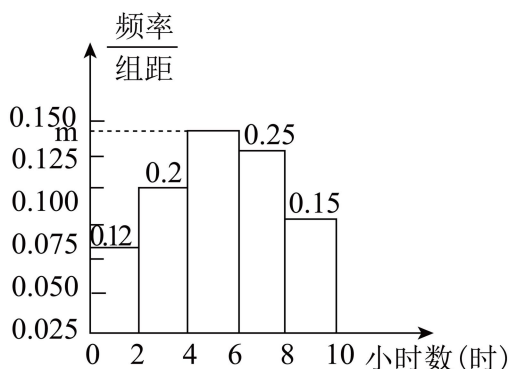
【详解】 解: $\because \tan \angle B = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 斜面 AB 的坡度为 $2: 3=1: 1.5$,

故答案为: 1: 1.5.

【点睛】 本题考查的是解直角三角形的应用-坡度坡角问题，掌握坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比是解题的关键.

15. 某校为了解本校学生每周阅读课外书籍的时间，对本校全体学生进行了调查，并绘制如图所示的频率分布直方图，那么图中 m 的值为_____.



【答案】 0.140

【解析】

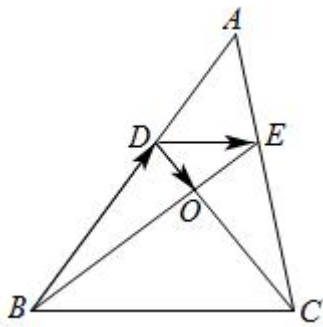
【分析】 根据题意和直方图中的数据，可以计算出 m 的值，本题得以解决.

【详解】 解: $m = (1 - 0.12 - 0.2 - 0.25 - 0.15) \div 2 = 0.28 \div 2 = 0.140$,

故答案为: 0.140.

【点睛】 本题考查频数分布直方图，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

16. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ， DC 、 BE 交于点 O ， $AB = 3AD$ ，设 $\overrightarrow{BD} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{DE} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{DO}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示是_____.



【答案】 $-\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

【解析】

【分析】利用平行线分线段成比例定理求出 $\frac{AD}{AB}$ ，根据三角形法则求出 $\vec{DO}$ ，证明 $DO = \frac{1}{4}DC$ 即可．

【详解】解： $\because DE \parallel BC$,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BC = 3DE,$$

$$\therefore \vec{DE} = \frac{1}{3}\vec{BC},$$

$$\therefore \vec{BC} = 3\vec{DE},$$

$$\because \triangle DOE \sim \triangle COB,$$

$$\therefore \frac{OD}{OC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore OD = \frac{1}{3}OC = \frac{1}{4}CD,$$

$$\therefore \vec{DO} = \vec{DB} + \vec{BO},$$

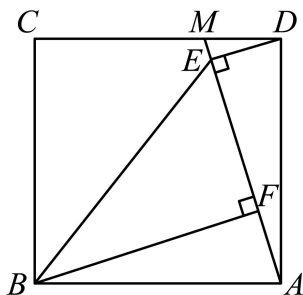
$$\therefore \vec{DO} = -\vec{a} + 3\vec{DE},$$

$$\therefore \vec{DO} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b},$$

故答案为： $-\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例和平面向量的知识点

17. 如图，点 M 是正方形 $ABCD$ 边 CD 上一点，连接 AM ，作 $DE \perp AM$ 于点 E ， $BF \perp AM$ 于点 F ，连接 BE ．已知 $AF = 2$ ，四边形 $ABED$ 的面积为 24，则 $\angle EBF$ 的正弦值为_____．



【答案】 $\frac{2\sqrt{13}}{13}$

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质、全等三角形的性质与判定、一元二次方程的应用、求角的正弦值，熟练掌握相关知识点是解题的关键。根据正方形的性质得到 $AB = AD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，通过证明

$\triangle ABF \cong \triangle DAE$ 得到 $BF = AE$ ， $DE = AF = 2$ ，设 $BF = AE = a$ ，利用 $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADE} = S_{\text{四边形}ABED}$ 列出方程，解出 a 的值，在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中利用正弦的定义即可求解。

【详解】 解： $\because$ 正方形 $ABCD$ ，

$$\therefore AB = AD, \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF + \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\because DE \perp AM, BF \perp AM,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle DEA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF + \angle ABF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle DAE,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DAE (\text{AAS}),$$

$$\therefore BF = AE, DE = AF = 2,$$

$$\text{设 } BF = AE = a,$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AE \cdot BF = \frac{1}{2} a^2, S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AE \cdot DE = a,$$

$$\because S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADE} = S_{\text{四边形}ABED},$$

$$\therefore \frac{1}{2} a^2 + a = 24,$$

$$\text{解得: } a_1 = 6, a_2 = -8 \text{ (舍去负值)},$$

$$\therefore BF = AE = 6,$$

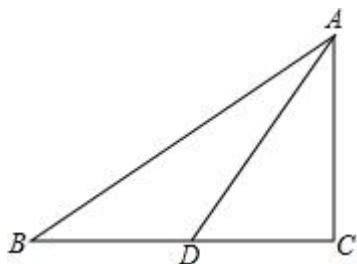
$$\therefore EF = AE - AF = 6 - 2 = 4,$$

$$\therefore BE = \sqrt{BF^2 + EF^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BEF \text{ 中, } \sin \angle EBF = \frac{EF}{BE} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

故答案为: $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

18. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 2$, 点 D 是边 BC 的中点, $\angle ABC = \angle CAD$, 将 $\triangle ACD$ 沿直线 AD 翻折, 点 C 落在点 E 处, 连结 BE , 那么线段 BE 的长为_____.

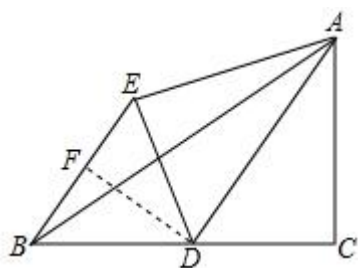


【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】证 $\triangle ABC \sim \triangle DAC$, 得出 $AC^2 = BC \times CD = 2$, $AC = \sqrt{2}$, 由勾股定理得出 $AD = \sqrt{3}$, 由折叠的性质得 $ED = CD = 1$, $\angle ADE = \angle ADC$, 得出 $BD = ED$, 作 $DF \perp BE$ 于 F , 则 $BF = EF$, $\angle BDF = \angle EDF$, 证 $\triangle BDF \sim \triangle DAC$, 求出 $BF = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即可得出答案.

【详解】解: 如图所示:



$\because BC = 2$, 点 D 是边 BC 的中点,

$\therefore BD = CD = 1$,

$\because \angle ABC = \angle CAD$, $\angle C = \angle C$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DAC$,

$\therefore AC : CD = BC : AC$,

$\therefore AC^2 = BC \times CD = 2 \times 1 = 2$,

$$\therefore AC = \sqrt{2},$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3},$$

由折叠的性质得: $ED = CD = 1$, $\angle ADE = \angle ADC$,

$$\therefore BD = ED,$$

作 $DF \perp BE$ 于 F , 则 $BF = EF$, $\angle BDF = \angle EDF$,

$$\therefore \angle BDF + \angle ADC = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

$$\because \angle ADC + \angle DAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDF = \angle DAC,$$

又 $\because \angle DFB = \angle C = 90^\circ$,

$$\therefore \triangle BDF \sim \triangle DAC,$$

$$\therefore \frac{BF}{CD} = \frac{BD}{AD}, \text{ 即 } \frac{BF}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore BF = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore BE = 2BF = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

故答案为: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】 本题考查了翻折变换的性质、相似三角形的判定与性质、勾股定理、等腰三角形的性质等知识; 熟练掌握翻折变换和等腰三角形的性质, 证明三角形相似是解题的关键.

三. 解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\frac{\sqrt{3}}{\tan 60^\circ - \cos 30^\circ} - 27^{\frac{1}{3}} + |1 - \sqrt{3}| - (\sqrt{2025})^0$.

【答案】 $-3 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了特殊角三角函数值的混合运算、分数指数幂、零指数幂、实数的混合运算, 熟练掌握相关知识点是解题的关键. 代入特殊角的三角函数值, 再利用二次根式、分数指数幂、绝对值、零指数幂的性质化简, 再合并即可.

【详解】 解: $\frac{\sqrt{3}}{\tan 60^\circ - \cos 30^\circ} - 27^{\frac{1}{3}} + |1 - \sqrt{3}| - (\sqrt{2025})^0$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}} - 3 + \sqrt{3} - 1 - 1$$

$$= 2 - 3 + \sqrt{3} - 1 - 1$$

$$= -3 + \sqrt{3}.$$

20. 解方程: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$

【答案】 $x = -5$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程和解一元二次方程，解题的关键是熟练掌握解分式方程和解一元二次方程的方法和步骤. 先去分母，将分式方程化为整式方程，再进行求解即可.

【详解】 解: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2},$

$$(x+2)^2 - 16 = x - 2,$$

$$x^2 + 4x + 4 - 16 = x - 2,$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0,$$

$$(x+5)(x-2) = 0,$$

$$x+5=0, x-2=0,$$

$$x_1 = -5, x_2 = 2,$$

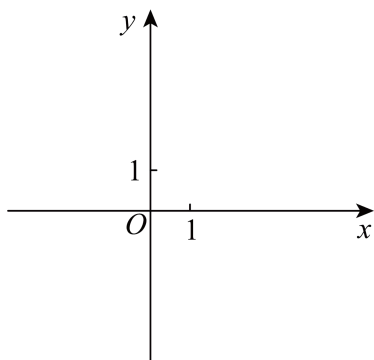
检验，当 $x = -5$ 时， $x^2 - 4 \neq 0$ ，

$\therefore x = -5$ 是原方程的解，

当 $x = 2$ 时， $x^2 - 4 = 0$ ，

$\therefore x = 2$ 不是原方程的解.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图)，已知一次函数 $y = 2x + m$ 与 $y = -\frac{1}{2}x + n$ 的图象都经过点 $A (-2, 0)$ ，且分别与 y 轴交于点 B 和点 C .



(1) 求 B 、 C 两点的坐标；

(2) 设点 D 在直线 $y = -\frac{1}{2}x + n$ 上，且在 y 轴右侧，当 $\triangle ABD$ 的面积为 15 时，求点 D 的坐标.

【答案】 (1) $B(0, 4)$, $C(0, -1)$; (2) $D(4, -3)$

【解析】

【分析】 (1) 依据一次函数 $y = 2x + m$ 与 $y = -\frac{1}{2}x + n$ 的图象都经过点 $A(-2, 0)$ ，即可得到 m 和 n 的值，进而得出 B 、 C 两点的坐标；

(2) 依据 $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD} = 15$ ，即可得到点 D 的横坐标，进而得出点 D 的坐标.

【详解】 解：(1) 将 $A(-2, 0)$ 代入 $y = 2x + m$ ，解得 $m = 4$ ，

$$\therefore y = 2x + 4,$$

令 $x = 0$ ，则 $y = 4$ ，即 $B(0, 4)$ ，

将 $A(-2, 0)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + n$ ，解得 $n = -1$ ，

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x - 1,$$

令 $x = 0$ ，则 $y = -1$ ，即 $C(0, -1)$ ，

(2) 如图，过 D 作 $DE \perp BC$ 于 E ，

当 $\triangle ABD$ 的面积为 15 时， $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD} = 15$ ，

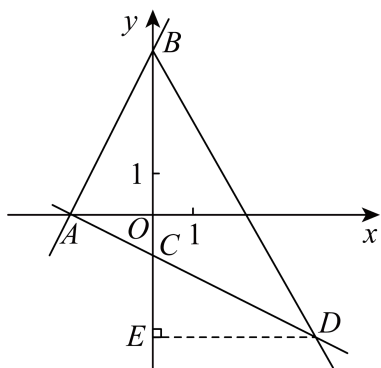
$$\text{即 } \frac{1}{2}AO \times BC + \frac{1}{2}DE \times BC = 15,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times 5 + \frac{1}{2} \times DE \times 5 = 15,$$

$$\therefore DE = 4,$$

$y = -\frac{1}{2}x - 1$ 中，令 $x = 4$ ，则 $y = -3$ ，

$$\therefore D(4, -3).$$



【点睛】本题主要考查了一次函数的交点问题，解决问题的关键是掌握一次函数图象上点的坐标特征.

22. 综合与实践

在学习特殊四边形的过程中，我们积累了一定的研究经验，请运用已有经验，对“邻等对补四边形”进行研究

定义：至少有一组邻边相等且对角互补的四边形叫做邻等对补四边形.

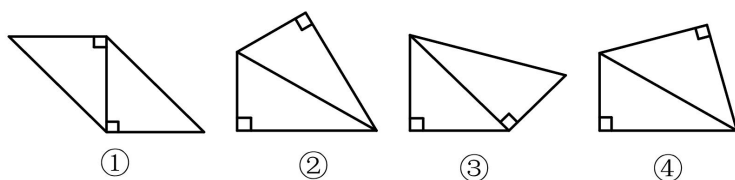


图1

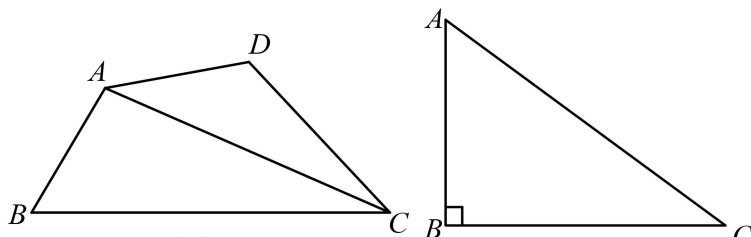


图2

图3

(1) 操作判断

用分别含有 30° 和 45° 角的直角三角形纸板拼出如图 1 所示的 4 个四边形，其中是邻等对补四边形的有 _____ (填序号).

(2) 性质探究

根据定义可得出邻等对补四边形的边、角的性质. 下面研究与对角线相关的性质.

如图 2，四边形 $ABCD$ 是邻等对补四边形， $AB = AD$ ， AC 是它的一条对角线.

①写出图中相等的角，并说明理由；

②若 $BC = m$ ， $DC = n$ ， $\angle BCD = 2\theta$ ，求 AC 的长 (用含 m ， n ， θ 的式子表示).

(3) 拓展应用

如图 3，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，分别在边 BC ， AC 上取点 M ， N ，使四边形 $ABMN$ 是邻等对补四边形. 当该邻等对补四边形仅有一组邻边相等时，请直接写出 BN 的长.

【答案】(1) ②④ (2) ① $\angle ACD = \angle ACB$. 理由见解析; ② $\frac{m+n}{2\cos\theta}$

(3) $\frac{12\sqrt{2}}{5}$ 或 $\frac{12\sqrt{2}}{7}$

【解析】

【分析】(1) 根据邻等对补四边形的定义判断即可;

(2) ①延长 CB 至点 E , 使 $BE = DC$, 连接 AE , 根据邻等对补四边形定义、补角的性质可得出 $\angle ABE = \angle D$, 证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADC$ (SAS), 得出 $\angle E = \angle ACD$, $AE = AC$, 根据等边对等角得出 $\angle E = \angle ACB$, 即可得出结论;

②过 A 作 $AF \perp EC$ 于 F , 根据三线合一性质可求出 $CF = \frac{m+n}{2}$, 由①可得 $\angle ACD = \angle ACB = \theta$, 在

$\text{Rt}\triangle AFC$ 中, 根据余弦的定义求解即可;

(3) 分 $AB = BM$, $AN = AB$, $MN = AN$, $BM = MN$ 四种情况讨论即可.

【小问 1 详解】

解: 观察图知, 图①和图③中不存在对角互补, 图 2 和图 4 中存在对角互补且邻边相等,

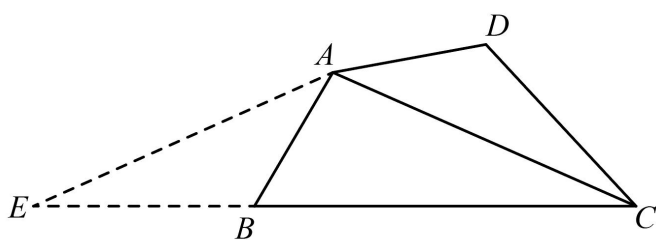
故图②和图④中四边形是邻等对补四边形,

故答案为: ②④;

【小问 2 详解】

解: ① $\angle ACD = \angle ACB$, 理由:

延长 CB 至点 E , 使 $BE = DC$, 连接 AE ,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是邻等对补四边形,

$$\therefore \angle ABC + \angle D = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ABE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle D,$$

$$\therefore AB = AD,$$

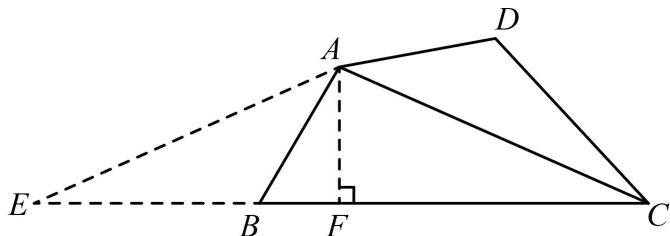
$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADC (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle E = \angle ACD, \quad AE = AC,$$

$$\therefore \angle E = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ACB;$$

②过 A 作 $AF \perp EC$ 于 F ,



$$\therefore AE = AC,$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}(BC + BE) = \frac{1}{2}(BC + DC) = \frac{m+n}{2},$$

$$\therefore \angle BCD = 2\theta,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ACB = \theta,$$

在 $\text{Rt}\triangle AFC$ 中, $\cos \theta = \frac{CF}{AC},$

$$\therefore AC = \frac{CF}{\cos \theta} = \frac{m+n}{2\cos \theta};$$

【小问 3 详解】

解: $\because \angle B = 90^\circ, \quad AB = 3, \quad BC = 4,$

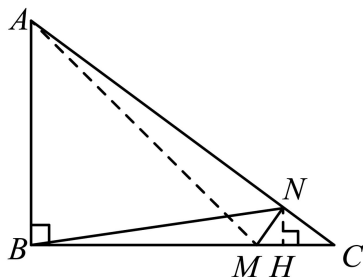
$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5,$$

$\therefore$ 四边形 $ABMN$ 是邻等对补四边形,

$$\therefore \angle ANM + \angle B = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ANM = 90^\circ,$$

当 $AB = BM$ 时, 如图, 连接 AM , 过 N 作 $NH \perp BC$ 于 H ,



$$\therefore AM^2 = AB^2 + BM^2 = 18,$$

在 $\text{Rt}\triangle AMN$ 中 $MN^2 = AM^2 - AN^2 = 18 - AN^2$,

在 $\text{Rt}\triangle CMN$ 中 $MN^2 = CM^2 - CN^2 = (4-3)^2 - (5-AN)^2$,

$$\therefore 18 - AN^2 = (4-3)^2 - (5-AN)^2,$$

解得 $AN = 4.2$,

$$\therefore CN = \frac{4}{5},$$

$$\because \angle NHC = \angle ABC = 90^\circ, \quad \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle NHC \sim \triangle ABC,$$

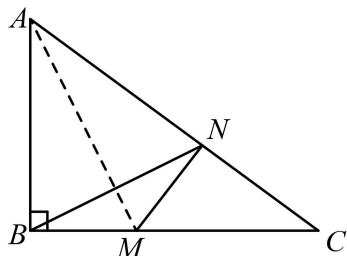
$$\therefore \frac{NC}{AC} = \frac{NH}{AB} = \frac{CH}{CB}, \quad \text{即} \quad \frac{\frac{4}{5}}{5} = \frac{NH}{3} = \frac{CH}{4},$$

$$\therefore NH = \frac{12}{25}, \quad CH = \frac{16}{25},$$

$$\therefore BH = \frac{84}{25},$$

$$\therefore BN = \sqrt{BH^2 + NH^2} = \frac{12}{5}\sqrt{2};$$

当 $AN = AB$ 时, 如图, 连接 AM ,

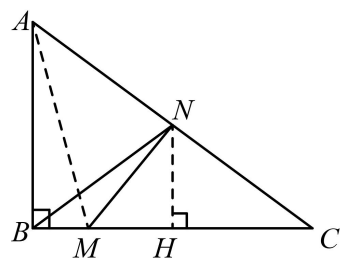


$$\therefore AM = AM,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ANM,$$

$$\therefore BM = NM, \quad \text{故不符合题意, 舍去;}$$

当 $AN = MN$ 时, 连接 AM , 过 N 作 $NH \perp BC$ 于 H ,



$$\because \angle MNC = \angle ABC = 90^\circ, \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle CMN \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{CN}{BC} = \frac{MN}{AB}, \text{ 即 } \frac{CN}{4} = \frac{5-CN}{3},$$

$$\text{解得 } CN = \frac{20}{7},$$

$$\because \angle NHC = \angle ABC = 90^\circ, \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle NHC \sim \triangle ABC,$$

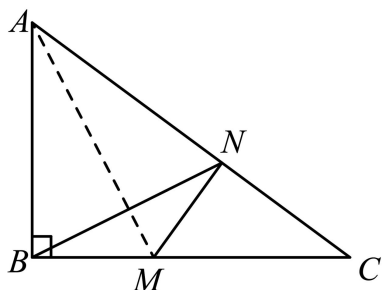
$$\therefore \frac{NC}{AC} = \frac{NH}{AB} = \frac{CH}{CB}, \text{ 即 } \frac{\frac{20}{7}}{5} = \frac{NH}{3} = \frac{CH}{4},$$

$$\therefore NH = \frac{12}{7}, \quad CH = \frac{16}{7},$$

$$\therefore BH = \frac{12}{7},$$

$$\therefore BN = \sqrt{BH^2 + NH^2} = \frac{12}{7}\sqrt{2};$$

当 $BM = MN$ 时, 如图, 连接 AM ,



$$\because AM = AM,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ANM,$$

$$\therefore AN = AB, \text{ 故不符合题意, 舍去;}$$

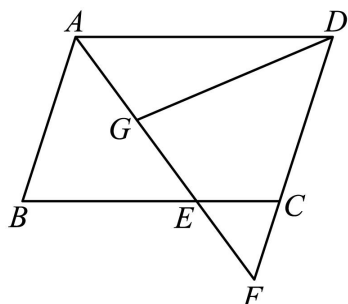
$$\text{综上, } BN \text{ 的长为 } \frac{12\sqrt{2}}{5} \text{ 或 } \frac{12\sqrt{2}}{7}.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定与性质, 等腰三角形的性质, 全等三角形的判定与性质, 解直角三角形, 勾股定理等知识, 明确题意, 理解新定义, 添加合适辅助线, 构造全等三角形、相似三角形是解题的关键.

23. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle BAD$ 的平分线交边 BC 于点 E , 交 DC 的延长线于点 F , 点 G 在 AE 上, 联结 GD , $\angle GDF = \angle F$.

(1) 求证: $AD^2 = DG \cdot AF$;

(2) 联结 BG , 如果 $BG \perp AE$, 且 $AB = 6$, $AD = 9$, 求 AF 的长.



【答案】 (1) 见解析; (2) $AF = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 根据四边形 $ABCD$ 是平行四边形, AE 平分 $\angle BAD$, 证明 $\triangle GDF \sim \triangle DAF$, 对应边成比例即可得结论;

(2) 根据已知条件可得 $BA = BE = 6$, $EC = CF = 3$, $DF = AD = 9$, 得 $AG = GE = EF$, 结合(1) $AD^2 = DG \cdot AF$, 即可求出 AF 的长.

【详解】 (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel DF, AD \parallel BC,$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle DAF = \angle F,$$

$$\therefore AD = DF,$$

$$\because \angle GDF = \angle F,$$

$$\therefore \triangle GDF \sim \triangle DAF,$$

$$\therefore \frac{DG}{AD} = \frac{DF}{AF},$$

$$\therefore AD^2 = DG \cdot AF;$$

(2) 解: $\because AF$ 平分 $\angle BAD$,

$$\therefore \angle BAE = \angle DAF,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BEA = \angle DAF,$$

$$\therefore \angle BEA = \angle BAE,$$

$$\because BG \perp AE, AB = 6, AD = 9,$$

$$\therefore BA = BE = 6,$$

$$\because \angle BEA = \angle CEF,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle F,$$

$$\therefore EC = CF = 3, DF = AD = 9,$$

$$\therefore \frac{FE}{FA} = \frac{CE}{AD} = \frac{1}{3},$$

$$\text{即 } AG = GE = EF,$$

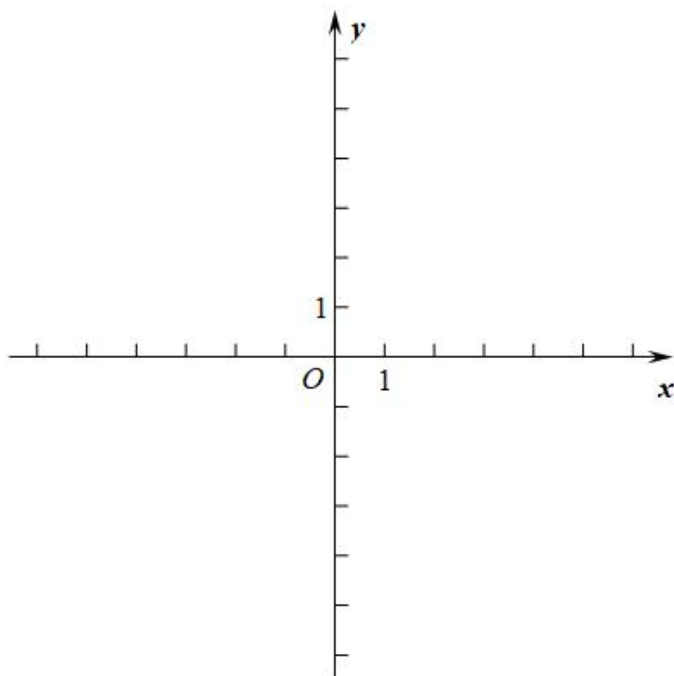
$$\because AD^2 = DG \cdot AF,$$

$$\therefore \frac{2}{3} AF^2 = 81,$$

$$\therefore AF = \frac{9\sqrt{6}}{2}.$$

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质、等腰三角形的判定与性质以及相似三角形的判定与性质，涉及的知识较多解决本题的关键是注意掌握几何涂星性质的运用.

24. 如图，已知在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = \frac{4}{9}x^2 + bx + c$ 经过原点，且与 x 轴相交于点 A ，点 A 的横坐标为 6，抛物线顶点为点 B .



(1) 求这条抛物线的表达式和顶点 B 的坐标;

(2) 过点 O 作 $OP \parallel AB$ ，在直线 OP 上点取一点 Q ，使得 $\angle QAB = \angle OBA$ ，求点 Q 的坐标;

(3) 将该抛物线向左平移 $m(m > 0)$ 个单位，所得新抛物线与 y 轴负半轴相交于点 C 且顶点仍然在第四象限，

此时点A移动到点D的位置, $CB:DB=3:4$, 求m的值.

【答案】 (1) $y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x$, $B(3, -4)$; (2) $Q(\frac{33}{25}, \frac{44}{25})$; (3) $m = \frac{21}{16}$.

【解析】

【分析】 (1) 将点O, 点A坐标代入解析式可求抛物线的表达式和顶点B的坐标;

(2) 由点A, 点B坐标可求直线AB解析式, 即可求直线OP解析式为: $y = \frac{4}{3}x$, 设点Q $(3k, 4k)$, 可证四边形OQAP为等腰梯形, 可得 $OB=QA$, 由两点距离公式可求k的值, 即可求点Q坐标;

(3) 过点B分别做x、y轴垂线, 垂足分别为点E、F, 由题意可证 $\triangle BCF \sim \triangle BDE$, 可得 $\frac{CF}{DE} = \frac{BC}{BD} = \frac{3}{4}$, 可得 $CF = \frac{3}{4}(3-m)$, 可得 $OC = 4 - CF = 4 - \frac{3}{4}(3-m)$, 可得关于m的方程, 即可求m的值.

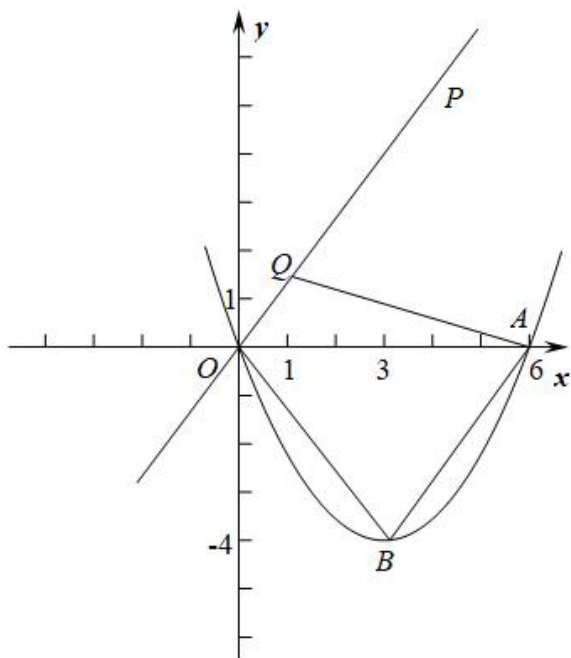
【详解】 (1) $\because$ 点 $O(0,0)$ 、 $A(6,0)$ 在抛物线 $y = \frac{4}{9}x^2 + bx + c$ 上

$$\therefore \begin{cases} c = 0 \\ \frac{4}{9} \times 36 + 6b + c = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = -\frac{8}{3} \\ c = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x = \frac{4}{9}(x-3)^2 - 4$,

$\therefore$ 顶点B的坐标是 $(3, -4)$;

(2) 如图,



$\therefore A(6,0)$, $B(3,-4)$

$$\therefore \text{直线 AB 解析式为: } y = \frac{4}{3}x - 8,$$

$$\therefore OP \parallel AB$$

$$\therefore \text{直线 OP 解析式为: } y = \frac{4}{3}x,$$

$$\text{设点 } Q(3k, 4k),$$

$$\therefore \angle OBA = \angle QAB > \angle OAB,$$

$$\therefore k > 0$$

$$\therefore OP \text{ 平行于 } AB, QA \text{ 不平行于 } OB$$

$$\therefore \text{四边形 OQAB 为梯形}$$

$$\text{又 } \therefore \angle QAB = \angle OBA$$

$$\therefore \text{四边形 OQAB 为等腰梯形}$$

$$\therefore QA = OB$$

$$\therefore (6-3k)^2 + (4k)^2 = 25$$

$$\therefore k = \frac{11}{25} \text{ 或 } k = -1 \text{ (舍去)}$$

$$\therefore Q\left(\frac{33}{25}, \frac{44}{25}\right)$$

$$(3) \text{ 由 (1) 知 } y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x = \frac{4}{9}(x-3)^2 - 4$$

$$\text{设抛物线向左平移 } m(m > 0) \text{ 个单位后的新抛物线表达式为 } y = \frac{4}{9}(x-3+m)^2 - 4$$

$$\therefore \text{新抛物线与 } y \text{ 轴负半轴相交于点 C 且顶点仍然在第四象限, 设点 C 的坐标为 } C(0, c)$$

$$\therefore 0 < m < 3, -4 < c < 0,$$

如图, 过点 B 分别做作 x、y 轴垂线, 垂足分别为点 E、F

当两圆内切时, $PD = |r_p - R|$, 即 $R_1 = 0$ (舍去), $R_2 = \frac{36}{5}$;

即两圆相交时, $0 < R < \frac{36}{5}$.

【点睛】 此题考查圆的综合题, 梯形的性质, 平行四边形的性质, 勾股定理, 相似三角形的判定和性质, 正确的作出辅助线是解题的关键.