

九年级数学

一、选择题 (本大题共 6 题)

1. 在直角坐标平面内, 如果点 $P(4,1)$, 点 P 与原点 O 的连线与 x 轴正半轴的夹角是 α , 那么 $\cot \alpha$ 的值是 ()

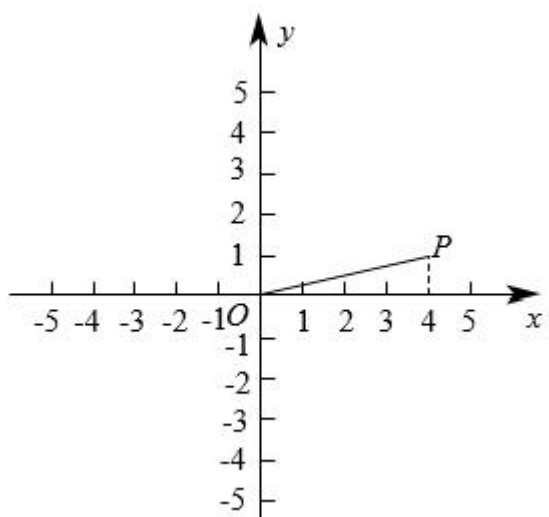
- A. 4 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ D. $\frac{\sqrt{17}}{17}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 由锐角的余切定义, 即可求解.

【详解】 解: 如图,



$\therefore$ 点 $P(4,1)$,

$$\therefore \cot \alpha = \frac{4}{1} = 4.$$

故选: A

【点睛】 本题考查解直角三角形, 坐标与图形的性质, 关键是掌握锐角的三角函数定义.

2. 关于抛物线 $y = (x-1)^2 - 2$ 以下说法正确的是 ()

- A. 抛物线在直线 $x = -1$ 右侧的部分是上升的
B. 抛物线在直线 $x = -1$ 右侧的部分是下降的
C. 抛物线在直线 $x = 1$ 右侧的部分是上升的
D. 抛物线在直线 $x = 1$ 右侧的部分是下降的

【答案】 C

【解析】

【分析】根据题目中的抛物线解析式和二次函数的性质，可以判断各个选项中的说法是否正确，从而可以解答本题.

【详解】解： $\because$ 抛物线 $y = (x-1)^2 - 2$,

$\therefore$ 抛物线在直线 $x=1$ 右侧的部分是上升，故选项 A、B 错误，不符合题意；

抛物线在直线 $x=1$ 右侧的部分是上升的，故选项 C 正确，符合题意，选项 D 错误，不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题考查二次函数的性质、二次函数图象上点的坐标特征，解答本题的关键是明确题意，利用二次函数的性质解答.

3. 二次函数 $y = 2x^2 + 8x + 5$ 的图像的顶点位于 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】利用配方法把二次函数解析式配成顶点式，然后利用二次函数的性质求解.

【详解】解： $y = 2x^2 + 8x + 5$

$$= 2(x^2 + 4x + 4 - 4) + 5$$

$$= 2(x^2 + 4x + 4) - 8 + 5,$$

$$= 2(x+2)^2 - 3,$$

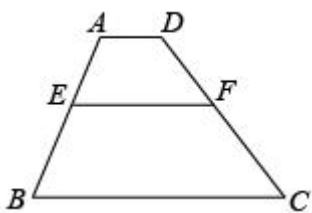
$\therefore$ 顶点坐标为 $(-2, -3)$,

$\therefore$ 二次函数 $y = 2x^2 + 8x + 5$ 的图像的顶点位于第三象限，

故选 C.

【点睛】本题考查二次函数的性质，解答本题的关键是将题目中的函数解析式化为顶点式.

4. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 E 、 F 分别在腰 AB 、 CD 上，且 $EF \parallel BC$ ，下列比例成立的是 ()



A. $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{EF}$ B. $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$ C. $\frac{AE}{AB} = \frac{DF}{FC}$ D. $\frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DC}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据平行线分线段成比例：三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例，即可得到结论.

【详解】 解： $\because AD \parallel BC, EF \parallel BC,$

$$\therefore AD \parallel BC \parallel EF,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DC},$$

故选 D.

【点睛】 本题主要考查平行线分线段成比例，掌握平行线所分线段对应成比例是解题的关键.

5. 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，如果 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$ ，那么 ()

A. $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$ B. $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$

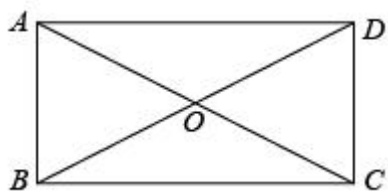
C. $\overrightarrow{DO} = \vec{a} - \vec{b}$ D. $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a})$

【答案】 B

【解析】

【分析】 求出 $\overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}$ ，再根据 $DO = \frac{1}{2}DB$ 即可得到结果.

【详解】 解： 如图所示：



$$\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$$

$$= \vec{a} - \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}),$$

故选： B.

【点睛】 本题主要考查了平面向量，矩形的性质，本题侧重考查知识点的理解能力.

6. 下列条件中，不能判定 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似的是 ()

- A. $\angle A = \angle D = 70^\circ$, $\angle B = \angle E = 50^\circ$
B. $\angle A = \angle D = 70^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $\angle E = 60^\circ$
C. $\angle A = \angle E$, $AB = 12$, $AC = 15$, $DE = 4$, $EF = 5$
D. $\angle A = \angle E$, $AB = 12$, $BC = 15$, $DE = 4$, $DF = 5$

【答案】 D

【解析】

【分析】 由相似三角形的判定依次判断，可求解.

【详解】 解：A. $\because \angle A = \angle D = 70^\circ$, $\angle B = \angle E = 50^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似,

故选项 A 不合题意;

B. $\because \angle A = \angle D = 70^\circ$, $\angle B = 50^\circ$,

$\therefore \angle C = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ$,

$\therefore \angle C = \angle E = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似,

故选项 B 不合题意;

C. $\because \frac{AB}{DE} = \frac{3}{1} = \frac{AC}{EF}$, $\angle A = \angle E$,

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似,

故选项 C 不合题意;

D. $\frac{AB}{DE} = \frac{3}{1} = \frac{BC}{DF}$, 但 $\angle B$ 与 $\angle D$ 不一定相等,

$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 不一定相似,

故选项 D 符合题意;

故选：D.

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定，熟练运用相似三角形的判定是本题的关键.

二、填空题：(本大题共 12 题)

7. 计算： $3(2\vec{a} - \vec{b}) - (3\vec{a} + 2\vec{b}) =$ _____.

【答案】 $3\vec{a} - 5\vec{b}$

【解析】

【分析】根据向量的运算法则可直接进行解答.

【详解】解: $3(2\vec{a} - \vec{b}) - (3\vec{a} + 2\vec{b})$

$$= 6\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$= 3\vec{a} - 5\vec{b},$$

故答案为: $3\vec{a} - 5\vec{b}$.

【点睛】本题考查的是平面向量的知识, 熟悉向量的相关性质是解题的关键.

8. 如果一个二次函数的图像的对称轴是 y 轴, 且这个图像经过平移后能与 $y = 3x^2 + 2x$ 重合, 那么这个二次函数的解析式可以是_____. (只要写出一个)

【答案】 $y = 3(x + 2)^2 + 3$

【解析】

【分析】先设原抛物线的解析式为 $y = a(x + h)^2 + k$, 根据二次函数的图像平移性质知 $a = 3$, 据此写出符合要求的解析式即可.

【详解】解: 先设原抛物线的解析式为 $y = a(x + h)^2 + k$,

$\because$ 经过平移后能与抛物线 $y = 3x^2 + 2x$ 重合,

$$\therefore a = 3,$$

$$\therefore \text{这个二次函数的解析式可以是 } y = 3(x + 2)^2 + 3 \text{ (答案不唯一).}$$

【点睛】本题考查二次函数的图像与几何变换, 熟知二次函数图像平移中不变的性质是解答的关键.

9. 已知两个矩形相似, 第一个矩形的两边长分别是 3 和 4, 第二个矩形较短的一边长是 4, 那么第二个矩形较长的一边长是_____.

【答案】 $\frac{16}{3}$ 或 $5\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】设第二个矩形较长的一边长是 a , 根据相似多边形的性质得出 $\frac{3}{4} = \frac{4}{a}$, 再求出 a 即可.

【详解】解: 设第二个矩形较长的一边长是 a ,

$\because$ 两个矩形相似, 第一个矩形的两边长分别是 3 和 4, 第二个矩形较短的一边长是 4,

$$\therefore \frac{3}{4} = \frac{4}{a},$$

解得： $a = \frac{16}{3}$ ，

即第二个矩形较长的一边长是 $\frac{16}{3}$ ，

故答案为： $\frac{16}{3}$ 。

【点睛】本题考查了相似多边形的性质，能熟记相似多边形的性质（相似多边形的对应边的比相等）是解此题的关键。

10. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ， $AB = 4$ ，那么 $AP =$ _____。

【答案】 $2\sqrt{5} - 2$

【解析】

【分析】根据黄金分割点的定义，知 AP 是较长线段；则 $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB$ ，代入数据即可得出 AP 的长。

【详解】解：∵ P 为线段 AB 的黄金分割点，且 AP 是较长线段；

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = 2\sqrt{5} - 2.$$

故答案为： $2\sqrt{5} - 2$ 。

【点睛】本题考查了黄金分割的概念。应该识记黄金分割的公式：较短的线段=原线段的 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ，较长的线段=原线段的 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。

11. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 2、3、4， $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似，且 $\triangle DEF$ 周长为 54，那么 $\triangle DEF$ 的最短边的长是_____。

【答案】 12

【解析】

【分析】先计算出 $\triangle ABC$ 的周长，进而得出相似比为 1:6，进而得出答案。

【详解】解：∵ $\triangle ABC$ 的三边长分别为 2、3、4，

∴ $\triangle ABC$ 的周长为：9

∵ $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似，且 $\triangle DEF$ 周长为 54，

∴ $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的周长比为 $9:54 = 1:6$ ，

∴ $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比为 1:6，

设 $\triangle DEF$ 的最短边的长是 x ，则：

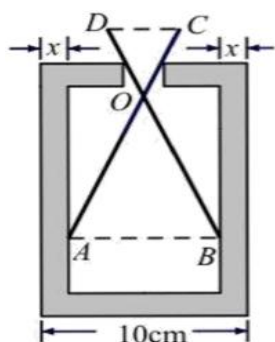
$$2:x = 1:6,$$

解得： $x=12$ 。

故答案为：12。

【点睛】本题主要考查相似三角形的性质，掌握相似三角形的周长比等于相似比是解题的关键。

12. 如图是一个零件的剖面图，已知零件的外径为10cm，为求出它的厚度 x ，现用一个交叉卡钳（ AC 和 BD 的长相等）去测量零件的内孔直径 AB 。如果 $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{1}{3}$ ，且量得 CD 的长是3cm，那么零件的厚度 x 是_____cm。



【答案】 $\frac{1}{2}$ ## 0.5

【解析】

【分析】根据相似三角形的判定和性质，可以求得 AB 的长，再根据某零件的外径为10cm，即可求得 x 的值。

【详解】解： $\because \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{1}{3}$ ， $\angle COD = \angle AOB$ ，

$\therefore \triangle COD \sim \triangle AOB$ ，

$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{1}{3}$ ，

$\because CD$ 的长是3cm，

$\therefore AB = 9\text{cm}$ ，

$\because$ 零件的外径为10cm，

$\therefore$ 零件的厚度为： $x = \frac{10-9}{2} = \frac{1}{2}(\text{cm})$ ，

故答案为： $\frac{1}{2}$ 。

【点睛】本题考查相似三角形的应用，解答本题的关键是求出 AB 的值。

13. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，已知 $\angle A$ 的正弦值是 $\frac{2}{3}$ ，那么 $\angle B$ 的正弦值是_____。

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ## $\frac{1}{3}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】根据锐角三角函数的定义以及勾股定理进行计算即可.

【详解】解: Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A$ 的正弦值是 $\frac{2}{3}$ 即 $\frac{BC}{AB} = \frac{2}{3}$,

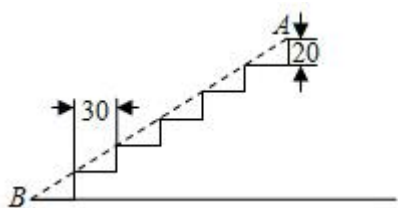
$\therefore$ 设 $BC = 2k$, 则 $AB = 3k$, 由勾股定理得 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{5}k$,

$$\therefore \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

【点睛】本题考查锐角三角函数、勾股定理, 掌握锐角三角函数的定义以及勾股定理是正确解答的前提.

14. 如图, 某幢楼的楼梯每一级台阶的高度为 20 厘米, 宽度为 30 厘米, 那么斜面 AB 的坡度为_____.



【答案】1: 1.5

【解析】

【分析】根据坡度的概念计算, 得到答案.

【详解】解: $\because \tan \angle B = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 斜面 AB 的坡度为 $2: 3 = 1: 1.5$,

故答案为: 1: 1.5.

【点睛】本题考查的是解直角三角形的应用-坡度坡角问题, 掌握坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比是解题的关键.

15. 在一块底边长为 20 厘米的等腰直角三角形铁皮上截一块矩形铁皮, 如果矩形的一边与等腰三角形的底边重合且长度为 x 厘米, 矩形另两个顶点分别在等腰直角三角形的两腰上, 设矩形面积为 y 平方厘米, 那么 y 关于 x 的函数解析式是_____. (不必写定义域)

【答案】 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 10x$

【解析】

【分析】根据几何关系先把矩形的另一边用 x 表示出来, 再利用矩形面积公式得到 y 与 x 的表达式.

【详解】解: 如图所示, 由题意, $\angle B = \angle C = 45^\circ$, $\angle DFB = \angle EGC = 90^\circ$, $FG = x$

$\therefore \triangle BDF$ 和 $\triangle CEG$ 都是等腰直角三角形,

$\therefore BF = DF, CG = EG,$

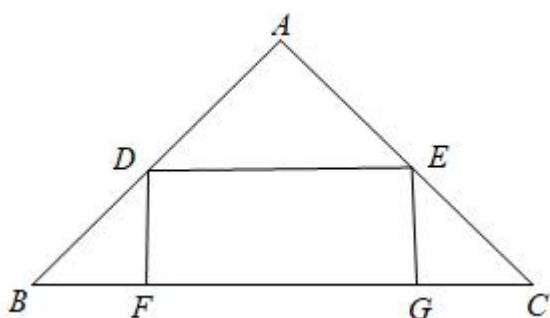
由矩形可知, $DF = EG,$

$\therefore BF = CG = DF = EG,$

$\therefore DF = BF = \frac{20-x}{2} = 10 - \frac{1}{2}x,$

$\therefore$ 矩形面积为 $y = DF \cdot FG = \left(10 - \frac{1}{2}x\right)x = -\frac{1}{2}x^2 + 10x,$

故答案为: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 10x.$



【点睛】 本题考查等腰直角三角形、矩形的性质和函数表达式, 解题关键是熟知等腰直角三角形和矩形的性质.

16. 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 G 作 $GD \parallel AC$ 交边 AB 于点 D , 作 $GE \parallel AB$ 交边 AC 于点 E , 如果四边形 $ADGE$ 的面积为 2, 那么 $\triangle ABC$ 的面积是_____.

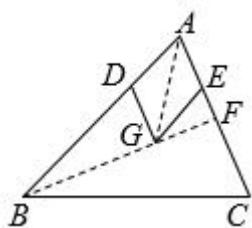
【答案】 9

【解析】

【分析】 延长 BG 交 AC 于 F 点, 连接 AG , 先证四边形 $ADGE$ 为平行四边形得

$S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形} ADGE} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$, 由 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 得 $BG = 2GF$, BF 为 AC 边上的中线, 再根据平行线分线段成比例可证 $\frac{BD}{AD} = \frac{BG}{GF} = 2$, 从而即可求解.

【详解】 解: 延长 BG 交 AC 于 F 点, 连接 AG , 如图,



$$\therefore GD \parallel AC, \quad GE \parallel AB,$$

$\therefore$ 四边形 $ADGE$ 为平行四边形,

$$\therefore S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形}ADGE} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$\therefore G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore BG = 2GF$, BF 为 AC 边上的中线,

$$\therefore GD \parallel AC,$$

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{BG}{GF} = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle BDG} = 2S_{\triangle ADG} = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABG} = 2 + 1 = 3,$$

$$\therefore BG = 2GF,$$

$$\therefore S_{\triangle AGF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABG} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ABG} + S_{\triangle AGF} = \frac{9}{2},$$

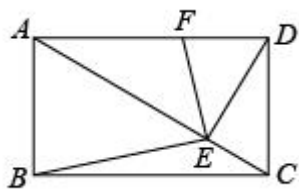
$\therefore BF$ 为 AC 边上的中线,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABF} = 2 \times \frac{9}{2} = 9.$$

故答案为：9.

【点睛】 本题考查了三角形的重心：三角形的重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2:1，也考查了平行四边形的判定与性质和平行线分线段成比例，熟练掌握平行线分线段成比例定理是解题的关键.

17. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，过点 D 作对角线 AC 的垂线，垂足为 E ，过点 E 作 BE 的垂线，交边 AD 于点 F ，如果 $AB = 3$ ， $BC = 5$ ，那么 DF 的长是_____.



【答案】 $\frac{9}{5}$

【解析】

【分析】 利用矩形的性质求出 AC ，利用三角形的面积、勾股定理求出 DE 、 CE 的长，再利用等角的余角相等说明 $\angle BAE = \angle ADE$ 、 $\angle AEB = \angle DEF$ ，得 $\triangle DEF \sim \triangle AEB$ ，最后利用相似三角形的性质得结论.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ, \quad AB = CD = 3, \quad BC = AD = 5, \quad AB \parallel CD,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34},$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot CD = \frac{1}{2} AC \cdot DE,$$

$$\therefore DE = \frac{15\sqrt{34}}{34},$$

$$\therefore DE \perp AC,$$

$$\therefore CE = \sqrt{CD^2 - DE^2},$$

$$= \sqrt{3^2 - \left(\frac{15\sqrt{34}}{34}\right)^2}$$

$$= \frac{9\sqrt{34}}{34},$$

$$\therefore AE = AC - CE = \frac{25\sqrt{34}}{34},$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DCA,$$

$$\therefore \angle DCA + \angle CDE = \angle CDE + \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle ADE,$$

$$\therefore BE \perp EF, \quad DE \perp AC,$$

$$\therefore \angle BEA + \angle AEF = \angle AEF + \angle FED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEA = \angle FED,$$

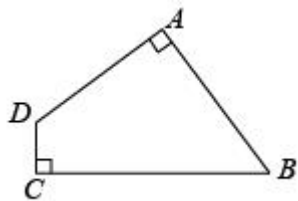
$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle AEB,$$

$$\therefore \frac{DF}{AB} = \frac{DE}{AE}$$

$$\therefore DF = \frac{DE \cdot AB}{AE} = \frac{9}{5},$$

【点睛】 本题主要考查了相似三角形，掌握相似三角形的性质与判定、三角形的内角和定理及勾股定理是解决本题的关键.

18. 将一张直角三角形纸片沿一条直线剪开，将其分成一张三角形纸片与一张四边形纸片，如果所得四边形纸片 $ABCD$ 如图所示，其中 $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ， $AB = 7$ 厘米， $BC = 9$ 厘米， $CD = 2$ 厘米，那么原来的直角三角形纸片的面积是_____平方厘米.



【答案】 $\frac{98}{3}$ 或 54

【解析】

【分析】 先由勾股定理求得 $AD = 6$ 厘米，再分情况讨论，利用三角形相似求解即可.

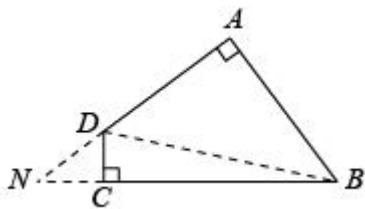
【详解】 解：连接 BD ，

$\because \angle A = \angle C = 90^\circ$ ， $AB = 7$ 厘米， $BC = 9$ 厘米， $CD = 2$ 厘米，

$\therefore BD^2 = BC^2 + CD^2 = AD^2 + AB^2$ 即 $9^2 + 2^2 = AD^2 + 7^2$ ，

$\therefore AD = 6$ 厘米，

① 如下图，延长 AD ， BC 相交于点 N ，设 $NC = x$ 厘米，



$\because \angle NCD = \angle A = 90^\circ$ ， $\angle N = \angle N$ ， $BN = 9 + x$ 厘米，

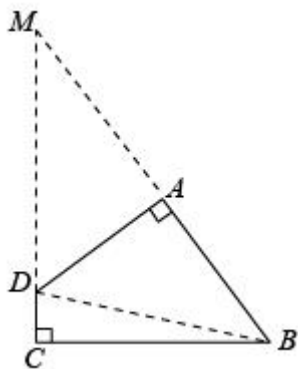
$\therefore \triangle NCD \sim \triangle NAB$ ，

$\therefore \frac{ND}{NB} = \frac{NC}{NA} = \frac{CD}{AB}$ 即 $\frac{ND}{x+9} = \frac{x}{ND+6} = \frac{2}{7}$ ，

$\therefore x = \frac{8}{3}$ 厘米， $ND = \frac{10}{3}$ 厘米，

$S_{\triangle ANB} = \frac{1}{2} AN \times AB = \frac{1}{2} \times \left(6 + \frac{10}{3}\right) \times 7 = \frac{98}{3}$ 平方厘米；

② 如下图，延长 CD ， BA 相交于点 M ，设 $MD = y$ 厘米，



$\therefore \angle MAD = \angle C = 90^\circ$, $\angle M = \angle M$, $CM = 2 + y$ 厘米,

$\therefore \triangle MAD \sim \triangle MCB$,

$$\therefore \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} = \frac{AD}{CB} \text{ 即 } \frac{MA}{2+y} = \frac{y}{AM+7} = \frac{6}{9},$$

$\therefore y = 10$ 厘米,

$$S_{\triangle CMB} = \frac{1}{2} CM \times BC = \frac{1}{2} \times (10+2) \times 9 = 54 \text{ 平方厘米},$$

故答案为 $\frac{98}{3}$ 或 54.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定及性质，勾股定理，熟练掌握相似三角形的判定及性质是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题)

19. 计算: $\frac{\tan 45^\circ + \cot 45^\circ}{\sin 45^\circ + \cos 30^\circ}$.

【答案】 $4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 将特殊角的三角函数值代入求解.

【详解】 解: $\frac{\tan 45^\circ + \cot 45^\circ}{\sin 45^\circ + \cos 30^\circ}$

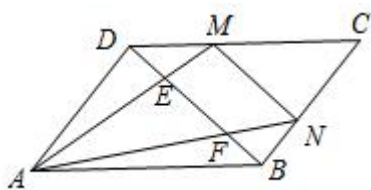
$$= \frac{1+1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

$$= 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查了特殊角的三角函数值，解答本题的关键是掌握几个特殊角的三角函数值.

20. 已知：如图，平行四边形 $ABCD$ 中，点 M 、 N 分别在边 DC 、 BC 上，对角线 BD 分别交 AM 、 AN 于点 E 、 F ，且 $DE:EF:BF=1:2:1$ 。



(1) 求证： $MN \parallel BD$ ；

(2) 设 $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AN} = \vec{b}$ ，请直接写出 $\overrightarrow{BD}$ 关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的分解式。

【答案】(1) 证明见解析；

$$(2) \overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}.$$

【解析】

【分析】(1) 由平行四边形的性质可得， $DM \parallel AB$ ， $BN \parallel AD$ ， $AB = CD$ ， $AD = BC$ ，进而得 $\triangle DEM \sim \triangle BEA$ ， $\triangle BFN \sim \triangle DFA$ ，得 $DM:DC = BN:BC = 1:3$ ，再证 $\triangle MCN \sim \triangle DCB$ 得 $\angle CMN = \angle CDB$ ，从而即可得证；

(2) 由向量的差可知， $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \vec{a} - \vec{b}$ ，再证 $BD = \frac{3}{2}MN$ ，从而 $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ 。

【小问 1 详解】

证明： $\because DE:EF:BF = 1:2:1$

$$\therefore DE:BE = 1:3, \quad BF:DF = 1:3$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore DM \parallel AB, \quad BN \parallel AD, \quad AB = CD, \quad AD = BC,$$

$$\therefore \triangle DEM \sim \triangle BEA, \quad \triangle BFN \sim \triangle DFA,$$

$$\therefore DM:DC = DM:AB = DE:BE = 1:3,$$

$$BN:BC = BN:AD = BF:BD = 1:3,$$

$$\therefore DM:DC = BN:BC = 1:3,$$

$$\therefore CM:DC = CN:BC = 2:3,$$

$$\therefore \angle MCN = \angle DCB,$$

$$\therefore \triangle MCN \sim \triangle DCB,$$

$$\therefore \angle CMN = \angle CDB,$$

$$\therefore MN \parallel BD;$$

【小问 2 详解】

解: $\because \overrightarrow{AM} = \vec{a}, \overrightarrow{AN} = \vec{b},$

$$\therefore \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \vec{a} - \vec{b},$$

由 (1) 知, $MN \parallel BD$, $\triangle MCN \sim \triangle DCB$, $CM : DC = 2 : 3$,

$$\therefore MN : BD = CM : DC = 2 : 3,$$

$$\therefore BD = \frac{3}{2}MN,$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}.$$

【点睛】 本题主要考查相似三角形的性质与判定, 平行线分线段成比例, 平面向量的计算等相关知识, 熟练掌握相关知识是解题关键.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = x^2 + mx + m$.

(1) 如果抛物线经过点 $(1, 9)$, 求该抛物线的对称轴;

(2) 如果抛物线的顶点在直线 $y = -x$ 上, 求 m 的值.

【答案】 (1) $x = -2$;

(2) 0 或 2.

【解析】

【分析】 (1) 把已知点的坐标代入函数解析式, 列出关于系数的方程, 解方程求得 m 的值; 然后将所求的抛物线解析式转化为顶点式, 直接得到抛物线的对称轴;

(2) 根据题意可以求得抛物线的顶点坐标, 然后将顶点坐标代入 $y = -x$, 从而可以求得 m 的值.

【小问 1 详解】

解: 把点 $(1, 9)$ 代入 $y = x^2 + mx + m$, 得 $9 = 1^2 + m + m$.

解得 $m = 4$,

则该抛物线解析式为: $y = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

$\therefore$ 该抛物线的对称轴是 $x = -2$;

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because y = x^2 + mx + m = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + m,$$

$$\therefore \text{抛物线 } y = x^2 + mx + m \text{ 的顶点坐标是 } \left(-\frac{m}{2}, -\frac{m^2}{4} + m\right),$$

∴ 抛物线 $y = x^2 + mx + m$ 的顶点在直线 $y = -x$ 上,

$$\therefore \frac{m}{2} = -\frac{m^2}{4} + m,$$

解得： $m = 0$ 或 $m = 2$.

【点睛】 本题考查了二次函数的性质，函数图象上点的坐标特征，顶点式 $y = a(x - h)^2 + k$ ，顶点坐标是 (h, k) ，对称轴是直线 $x = h$ ，此题考查了学生的应用能力，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

22. 圭表（如图 1）是我国古代度量日影长度的天文仪器，它包括一根直立的杆（称为“表”）和一把南北方向水平放置且与杆垂直的标尺（称为“圭”）. 当正午的阳光照射在“表”上时，“表”的影子便会投射在“圭”上. 我国古代很多地区通过观察“表”在“圭”上的影子长度来测算二十四节气，并以此作为指导农事活动的重要依据. 例如，我国古代历法将一年中白昼最短的那一天（当日正午“表”在“圭”上的影子长度为全年最长）定为冬至；白昼最长的那一天（当日正午“表”在“圭”上的影子长度为全年最短）定为夏至.

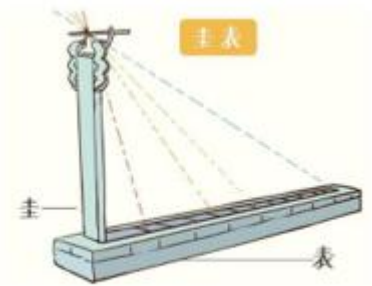


图1

某地发现一个圭表遗迹（如图 2），但由于“表”已损坏，仅能测得“圭”上记录的夏至线与冬至线间的距离（即 AB 的长）为 11.3 米. 现已知该地冬至正午太阳高度角（即 $\angle CBD$ ）为 $35^{\circ}34'$ ，夏至正午太阳高度角（即 $\angle CAD$ ）为 $82^{\circ}26'$ ，请通过计算推测损坏的“表”原来的高度（即 CD 的长）约为多少米？（参考数据见表 1，结果精确到个位）

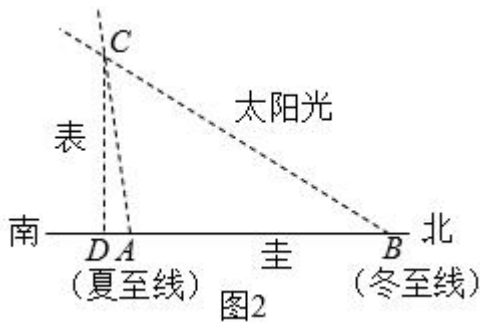


表 1

a	$\sin a$	$\cos a$	$\tan a$
-----	----------	----------	----------

$35^{\circ}34'$	0.58	0.81	0.72
$82^{\circ}26'$	0.99	0.13	7.5

(注：表 1 中三角比的值是近似值)

【答案】表 CD 的高度是 9 米.

【解析】

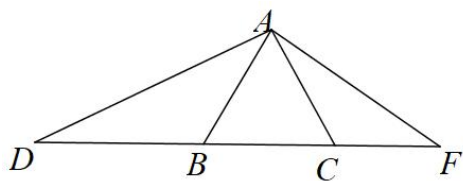
【分析】利用 $\angle CBD$ 和 $\angle CAD$ 的正切，用 CD 表示出 BD 和 AB ，得到一个只含有 CD 的关系式，再解答即可.

【详解】解： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中， $\tan 82^{\circ}26' = \frac{CD}{AD} = 7.5$ ，在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中， $\tan 35^{\circ}34' = \frac{CD}{BD} = 0.72$ ，
 $\therefore AD = \frac{2}{15}CD$ ， $BD = \frac{25}{18}CD$ ，
 $\therefore \frac{25}{18}CD - \frac{2}{15}CD = 11.3$ ，
 $\therefore CD = 9$ (米)

答：表 CD 的高度是 9 米.

【点睛】本题主要考查了三角函数，熟练掌握建模思想是解决本题的关键.

23. 已知：如图，点 D 、 F 分别在等边三角形 ABC 的边 CB 的延长线与反向延长线上，且满足 $BD \cdot CF = BC^2$. 求证：



- (1) $\triangle ADB \sim \triangle FAC$;
- (2) $AF \cdot AD = BC \cdot DF$.

【答案】(1) 证明见解析;

(2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 由三角形的性质证 $AB = BC = AC$ ， $\angle DBA = \angle ACF$ ，再由 $BD \cdot CF = BC^2$ 得 $\frac{BD}{AC} = \frac{BA}{CF}$ ，即可得证；

(2) 证明 $\triangle FAC \sim \triangle FDA$ 即可得证.

【小问 1 详解】

证明： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\begin{aligned} \therefore AB = BC = AC, \quad \angle ABC = \angle ACB = \angle CAB = 60^\circ, \\ \therefore \angle DBA = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ = 180^\circ - \angle ACB = \angle ACF, \\ \therefore BD \cdot CF = BC^2, \\ \therefore \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{CF} \text{ 即 } \frac{BD}{AC} = \frac{BA}{CF}, \\ \therefore \triangle ADB \sim \triangle FAC; \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

证明：由 (1) 得 $\triangle ADB \sim \triangle FAC$,

$$\therefore \angle FAC = \angle D,$$

$$\therefore \angle F = \angle F,$$

$$\therefore \triangle FAC \sim \triangle FDA,$$

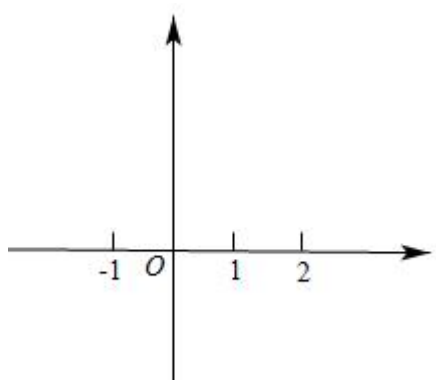
$$\therefore \frac{AF}{DF} = \frac{AC}{AD},$$

$$\therefore AC = BC,$$

$$\therefore AF \cdot AD = BC \cdot DF,$$

【点睛】 本题主要考查了等边三角形的性质、相似三角形的判定及性质，熟练掌握相似三角形的判定及性质是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(-1, y_1)$, $B(0, y_2)$, $C(1, y_3)$, $D(2, y_4)$ 在抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 上.



(1) 当 $y_1 = 0$, $y_2 = y_3$ 时,

①求该抛物线的表达式;

②将该抛物线向下平移 2 个单位, 再向左平移 m 个单位后, 所得的新抛物线经过点 $(-1, 0)$, 求 m 的值;

(2) 若 $y_2 = 0$, 且 y_1, y_3, y_4 中有且仅有一个值大于 0, 请结合抛物线的位置和图像特征, 先写出一个

满足条件的 b 的值，再求 b 的取值范围.

【答案】(1) ① $y = -x^2 + x + 2$ ；② $m = 1$ 或 $m = 2$ ；

(2) 可取 $b = -2$ ， $b < -1$ 或 $1 < b \leq 2$.

【解析】

【分析】(1) ①先求得对称轴为 $x = \frac{1}{2}$ ，再根据待定系数法即可求得抛物线的表达式；②根据平移得 $y = -(x+m)^2 + (x+m) + 2 - 2$ ，又由抛物线过点 $(-1, 0)$ ，即可得解；

(2) 由 $y_2 = 0$ 得抛物线 $y = -x^2 + bx$ ，又由点 $A(-1, y_1)$ ， $C(1, y_3)$ ， $D(2, y_4)$ 在抛物线 $y = -x^2 + bx$ 上，且使得 y_1 、 y_3 、 y_4 中有且仅有一个值大于 0，从而可取 $b = -2$ ，此时 $y_1 > 0$ ， $y_3 < 0$ ， $y_4 < 0$ ，分抛物线的对称轴在 y 轴的左侧时和抛物线的对称轴在 y 轴的右侧两种情况讨论求解 b 的取值范围.

【小问 1 详解】

解：① $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 过点 $B(0, y_2)$ ， $C(1, y_3)$ ， $y_2 = y_3$ ，

$\therefore$ 点 B 、 C 为对称点，其对称轴为 $x = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore x = \frac{b}{2} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore b = 1$ ，

$\therefore y = -x^2 + x + c$ ，

$\because y = -x^2 + x + c$ 过点 $A(-1, y_1)$ ， $y_1 = 0$ ，

$\therefore 0 = -1 + (-1) + c$ ，

解得 $c = 2$ ，

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -x^2 + x + 2$ ，

② 抛物线 $y = -x^2 + x + 2$ 向下平移 2 个单位，再向左平移 m 个单位后得 $y = -(x+m)^2 + (x+m) + 2 - 2$ ，

$\because y = -(x+m)^2 + (x+m) + 2 - 2$ 过点 $(-1, 0)$ ，

$\therefore 0 = -(-1+m)^2 + (-1+m) + 2 - 2$ ，

解得 $m = 1$ 或 $m = 2$ ；

【小问 2 详解】

解： $\because y_2 = 0$ ，

∴ 抛物线过点 $B(0,0)$,

∴ 抛物线 $y = -x^2 + bx$

∵ 点 $A(-1, y_1)$, $C(1, y_3)$, $D(2, y_4)$ 在抛物线 $y = -x^2 + bx$ 上, 且使得 y_1, y_3, y_4 中有且仅有一个值大于 0,

∴ 可取 $b = -2$, 此时 $y_1 > 0$, $y_3 < 0$, $y_4 < 0$,

当抛物线的对称轴在 y 轴的左侧时,

∵ 抛物线 $y = -x^2 + bx$ 开口向下,

∴ $y_1 > 0$, $y_3 < 0$, $y_4 < 0$,

∴ $-(-1)^2 - b > 0$, $-1^2 + b < 0$, $-2^2 + 2b < 0$,

∴ $b < -1$,

当抛物线的对称轴在 y 轴的右侧时,

∵ 抛物线 $y = -x^2 + bx$ 开口向下,

∴ $y_1 < 0$, $y_3 < 0$, $y_4 > 0$,

∴ $-(-1)^2 - b < 0$, $-1^2 + b > 0$, $-2^2 + 2b \leq 0$,

∴ $b > -1$, $b > 1$, $b \leq 2$,

∴ $1 < b \leq 2$,

综上得, $b < -1$ 或 $1 < b \leq 2$.

【点睛】 本题主要考查了二次函数的图像及性质, 待定系数法求解二次函数的解析式以及二次函数与坐标轴的交点, 熟练掌握二次函数的图像及性质式解题的关键.

25. 已知, 如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAC = \angle ADC = 90^\circ$, $CD = 4$, $\cos \angle ACD = \frac{4}{5}$.

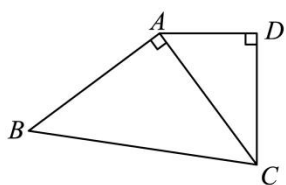


图1

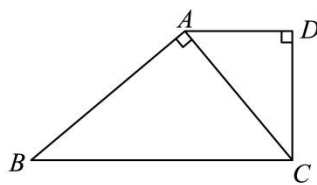
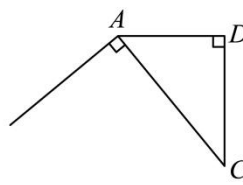


图2



备用图

(1) 当 $BC \parallel AD$ 时 (如图 2), 求 AB 的长;

(2) 连接 BD , 交边 AC 于点 E ,

① 设 $CE = x$, $AB = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式并写出定义域;

②当 $\triangle BDC$ 是等腰三角形时，求 AB 的长.

【答案】(1) $\frac{20}{3}$;

(2) AB 的长为 $\frac{10}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{319}-12}{5}$.

【解析】

【分析】(1) 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，解直角三角形得 $AC=5$ ， $AD=3$ ，再证 $\triangle BAC \sim \triangle CDA$ 即可得解；

(2) ①先求得 $AE=5-x$ ， $EN=x-\frac{16}{5}$ ，根据 $AE>0$ ， $EN>0$ 可得定义域，证明 $\triangle BAC \sim \triangle CDA$ 可得 y 关于 x 的函数解析式；②分两类讨论求解，当 $BD=BC$ 时，作 $BQ \perp CD$ 于点 Q ，作 $AP \perp BQ$ 于点 P ，证 $\triangle BPA \sim \triangle CDA$ 得解，当 $BD=CD=4$ 时，作 BN 垂直直线 AD 于点 N ，证 $\triangle NBA \sim \triangle DAC$ 得解.

【小问1详解】

解： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $\cos \angle ACD = \frac{CD}{AC} = \frac{4}{5}$ ， $CD=4$ ，

$$\therefore AC=5, AD=\sqrt{5^2-4^2}=3,$$

$$\because BC \parallel AD,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DAC,$$

$$\because \angle BAC = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BAC \sim \triangle CDA,$$

$$\therefore \frac{BA}{CD} = \frac{AC}{AD} \text{ 即 } \frac{BA}{4} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore AB = \frac{20}{3};$$

【小问2详解】

解：①如图2，作 $DN \perp AC$ 于点 N ，

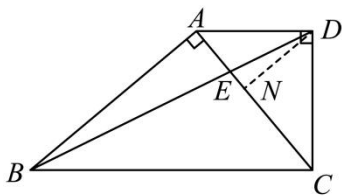


图2

$$\because S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AC \times DN = \frac{1}{2} AD \times CD, \quad CD=4, \quad AC=5, \quad AD=3,$$

$$\therefore DN = \frac{12}{5},$$

$$\therefore CN = \sqrt{4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{16}{5}, \quad AN = AC - CN = \frac{9}{5},$$

$$\therefore CE = x,$$

$$\therefore AE = 5 - x, \quad EN = x - \frac{16}{5},$$

$$\therefore AE > 0, \quad EN > 0,$$

$$\therefore \frac{16}{5} < x < 5,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DNE = 90^\circ, \quad \angle AEB = \angle NED,$$

$$\therefore \triangle AEB \sim \triangle NED,$$

$$\therefore \frac{AE}{NE} = \frac{AB}{DN}, \quad \text{即} \quad \frac{5-x}{x-\frac{16}{5}} = \frac{y}{\frac{12}{5}},$$

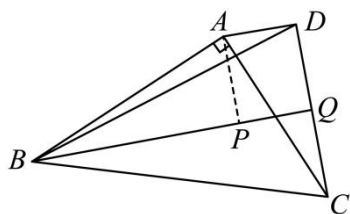
$$\therefore y = \frac{60-12x}{5x-16} \left(\frac{16}{5} < x < 5 \right),$$

$$\textcircled{2} \because \angle BAC = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore BC > AC > CD,$$

$$\therefore BC \neq CD,$$

当 $BD = BC$ 时, 作 $BQ \perp CD$ 于点 Q , 作 $AP \perp BQ$ 于点 P , 如下图, 易知四边形 $APQD$ 是矩形,



$$\therefore AP = DQ = CQ = 2, \quad \angle PAD = \angle PAC + \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BAP + \angle PAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAP = \angle CAD,$$

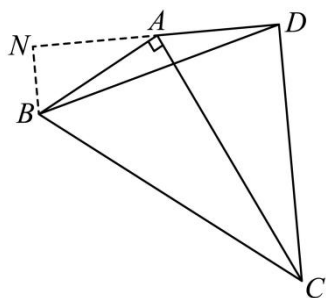
$$\therefore \angle BPA = \angle CDA = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BPA \sim \triangle CDA,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AD} \quad \text{即} \quad \frac{AB}{5} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AB = \frac{10}{3};$$

当 $BD = CD = 4$ 时, 作 BN 垂直直线 AD 于点 N , 如下图,



$$\therefore \angle N = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NAB + \angle NBA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NAB + \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NBA = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle NBA \sim \triangle DAC,$$

$$\therefore \frac{AN}{CD} = \frac{AB}{AC} \text{ 即 } \frac{AN}{4} = \frac{AB}{5},$$

$$\therefore AN = \frac{4}{5}AB,$$

$$\therefore BN \perp AD,$$

$$\therefore BN^2 = BD^2 - DN^2 = 16 - \left(3 + \frac{4}{5}AB\right)^2, \quad BN^2 = AB^2 - AN^2 = AB^2 - \left(\frac{4}{5}AB\right)^2,$$

$$\therefore 16 - \left(3 + \frac{4}{5}AB\right)^2 = AB^2 - \left(\frac{4}{5}AB\right)^2,$$

$$\text{解得 } AB = \frac{\sqrt{319}-12}{5} \text{ 或 } AB = \frac{-\sqrt{319}-12}{5} \text{ (舍去),}$$

$$\text{综上 } AB \text{ 的长为 } \frac{10}{3} \text{ 或 } \frac{\sqrt{319}-12}{5}.$$

【点睛】 本题主要考查了解直角三角形、勾股定理、求函数解析式、矩形的判定及性质以及相似三角形的判定及性质，熟练掌握勾股定理以及相似三角形的判定及性质是解题的关键。

